目　　录

第三篇 非线性系统

第四篇 若干应用

第一篇　总　论

第一章　运动稳定性理论基础

§1. 问题的提出

运动系统的稳定性的研究是自然科学与工程技术中很受人们关心的问题。经典的例子是太阳系的稳定性，旋转流体所构成的星球的稳定性等等。近年来关于运动稳定性的理论在世界各国都引起了极大的兴趣。这个由著名学者 A. M. 李雅普诺夫 (Ляпунов) 在上一世纪九十年代所开创的理论，在物理科学和工程技术的各个部门都获得了广泛的应用。

按李雅普诺夫意义下的运动稳定性理论，研究的是干扰性因素对于物质系统运动的影响。所谓干扰性因素，应理解为那些在描述运动时由于与基本力相比较甚小而未曾加以考虑的力。这些力通常是不确切知道的。它们可以是瞬时的作用，因而引起物质系统初始状态的微小的变化。

众所周知，微小的干扰因素对于物质系统运动的影响，对于不同的运动来说是不一样的。对于一些运动，这种影响并不显著，因而受干扰的运动与不受干扰的运动差得很少。反之，对于另外某些运动，干扰的影响就可能很显著，以致无论干扰的力多么小，随着时间的发展，受干扰的运动与不受干扰的运动可能相差得很多。简单说来属于第一类的运动称为是稳定的；而第二类运动则称为是不稳定的。研究运动稳定性理论就是从事于建立一些准则，用以判断所考察的运动是稳定的还是不稳定的。因为在实际情况中干扰的因素总是不可避免地存在着的，所以，运动稳定性的问题就有其重要的理论和实际的意义。这也是近年来稳定性理论蓬勃发展的原因。

稳定性这个词的意义起始于力学，它刻划了一个刚体运动的**平衡状态**．通常说这个平衡态是稳定的，就是说刚体在受到干扰力的作用从原来位置微微移动后，仍回到它原来的位置；反之，它趋于一新位置，这时我们就说平衡态是不稳定的．最显著的一个例子，就是单摆，它的一端固定于某一点，另一端受重力的作用．

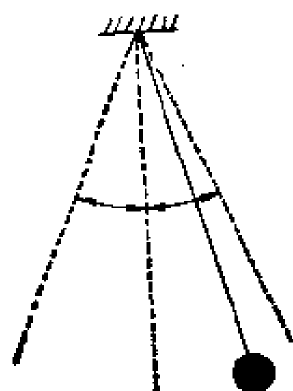


图 1

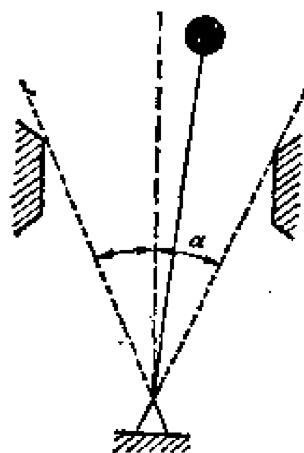


图 2

当固定点位于摆的重心之上时，单摆的平衡态是稳定的（见图 1）；当固定点位于重心之下时，单摆的平衡态是不稳定的（见图 2）．从上面我们所引进的平衡态的稳定性或不稳定性的概念，可以看出两个基本要点：

1）关于平衡态的稳定或不稳定，是根据在平衡位置附近所发生的运动的性质来判断的．

2）对于稳定的平衡，只要适当地选择系统偏离平衡位置的初始值和初速度，就可以使系统对平衡位置的偏离和运动速度总是小于任何事先给定的数值．如果单摆的重心位于固定点之下，单摆在平衡态附近的运动就具有上述稳定的性质．而在图 2 所表示的情况下，平衡态总是不稳定的，因为无论怎样选择运动的初始条件，都不可能使单摆对平衡位置的偏离小于某个预先给定的数值．

运动稳定性的概念乃是平衡态稳定性概念的直接推广．

假定我们考虑的动力系统可以用下列微分方程组来描述：

$$\frac{dy_s}{dt} = Y_s(t; y_1, \cdots, y_n) \qquad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.1}$$

其中 y_s 是某些与运动有关的参数，例如坐标、速度，或者一般地是

这些量的某些函数.

考虑这个系统的任何特殊运动，它对应于(1.1)的某个特解 $y_s = f_s(t)$ $(s = 1, 2, \cdots, n)$，我们称这个运动是未受干扰的，以区别于这个系统的其它那些我们称为受干扰的运动．量 y_s 是任何受干扰的和未受干扰的运动之间的差值，我们称它为扰动或干扰．

定义 1.1： 如果对于任意正数 ε，无论它多么小，总可以找到另一个正数 $\eta(\varepsilon)$，使得对于所有受干扰的运动 $y_s = y_s(t)$ $(s = 1, 2, \cdots, n)$，当其在初始时刻 $t = t_0$ 满足不等式

$$|y_s(t_0) - f_s(t_0)| \leqslant \eta(\varepsilon) \qquad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.2}$$

而在所有 $t \geqq t_0$ 时满足不等式

$$|y_s(t) - f_s(t)| < \varepsilon \qquad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.3}$$

则未受干扰的运动就称为对量 y_s 是稳定的．

未受干扰的运动如果不是稳定的，则称为是不稳定的．由此可知，如果存在有任何固定的数 ε，而对于无论多么小的数 η，即使只有一种受干扰的运动，它满足不等式(1.2)，但在某一个时刻，不等式(1.3)中即使只有一个变为等式，那末未被扰动运动就是不稳定的．

但是也有这种情形，未被扰动运动不但是稳定的，而且当初始扰动足够小时，随着时间 t 的无限增加，所有受干扰的运动都逐渐趋近于未受干扰的运动．在这种情况下，我们就说未被扰动运动是渐近稳定的．

到此为止，我们仅仅把李雅普诺夫关于运动稳定性的基本概念和他的关于稳定、不稳定、以及渐近稳定的定义陈述了，但是还没有达到最终解决问题时所要求的那种定义形式，以上只是问题的提出．此时要针对方程(1.1)来研究特解 $y_s = f_s(t)$ 相对于量 y_s 的稳定性还有一定的困难．为此我们对方程(1.1)进行坐标变换，令

$$x_s = y_s - f_s(t) \qquad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.4}$$

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{dy_s}{dt} - \frac{df_s(t)}{dt}$$

$$
\begin{aligned}
&= Y_s(t;\ x_1(t)+f_1(t),\ \cdots,\ x_n(t)+f_n(t)) \\
&\qquad - Y_s(t;\ f_1(t),\ \cdots,\ f_n(t)) \\
&= X_s\,(t;\ x_1,\ \cdots,\ x_n).
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

这样一来，就可以将研究方程组 (1.1) 的特解 $y_s=f_s(t)$ 的稳定性问题，化为研究系统 (1.5) 的平凡解 $x_s=0$ $(s=1,2,\cdots,n)$ 的稳定性问题，于是就可以方便地运用现有的分析技巧来对 (1.5) 的平凡解 $x_s=0$ $(s=1,2,\cdots,n)$ 的稳定性问题进行研究.

此时不等式 (1.2)，(1.3) 分别变成

$$|x_s(t_0)| \leqslant \eta, \tag{1.6}$$

$$|x_s(t)| < \varepsilon. \tag{1.7}$$

因而李雅普诺夫的稳定性定义可以由下列方式来表述：

如果对于任何正数 ε，无论它多么小，可以选取另一个正数 $\eta(\varepsilon)$，使得对于所有受干扰的运动，当其在初始时刻 t_0 时满足不等式 (1.6)，而在所有 $t>t_0$ 时满足不等式 (1.7)，则 (1.5) 的未被扰动运动(即 $x_s=0$，$s=1,2,\cdots,n$) 是稳定的.

反之，则称未被扰动运动是不稳定的.

如果未被扰动运动是稳定的，并且数 η 可选取得如此之小，使得对于所有满足不等式 (1.6) 的扰动运动满足条件

$$\lim_{t\to\infty} x_s(t)=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n),$$

则称未被扰动运动是渐近稳定的.

从上面所述的李雅普诺夫的稳定性定义中可以看出它有下列几个特点：

1）首先，李雅普诺夫的稳定性概念是一个局部概念，它涉及到在被考虑的状态附近的特性，因此，初始扰动的范围较小，也就是 η 值较小，特别是对渐近稳定性而言，要求的 η 值就更小；

2）时间是无限长的；

3）初始扰动的大小与初始时刻 t_0 的选取无关；

4）初始扰动之后无其它外扰；

5）未被扰动运动与扰动运动服从于同一个方程，而且二者在同一时刻进行比较。

如果对于我们所研究的扰动运动微分方程，能够把它的解求出来（积分为封闭形式），那末我们对稳定性的研究也就没有困难了。而实际上大量工程、物理系统中所出现的微分方程，除了极个别的情况可积外，大部分都是不可积的。因此 A. M. 李雅普诺夫在他的著名论文“运动稳定性一般问题”[1]中提出了两种解决问题的方法。

第一方法就是通常为大家所熟悉的级数展开法。详细介绍可参看秦元勋编“运动稳定性的一般问题讲义”一书[2]或 Г. Н. 杜柏欣著的“运动稳定性的基本理论”一书[3]。Н. П. 叶罗金[4]总结了在 1966 年以前有关李雅普诺夫第一方法的重要成果，并附有 50 篇文献索引。我们这里着重叙述第二方法的基本内容，因为它已经发展成为今天解决运动稳定性问题的基本方法。

李雅普诺夫第二方法，有时又称李雅普诺夫直接法，它不需要去寻求运动方程的特殊解，当把未被扰动运动的稳定性归结为平衡位置的稳定性问题时，A. M. 李雅普诺夫将稳定性或者不稳定性的事实与具有特殊性质的函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$（通常称为李雅普诺夫函数）的存在性联系起来。这个函数 V 的根据微分方程组所取得的对于时间的导数，具有确定的性质。

但是李雅普诺夫函数的作用，决不仅限于对稳定性或不稳定性事实的建立问题，李雅普诺夫函数方法是研究自动调节系统的最有成效的方法之一。对具体的非线性自动调节系统而言，适当地作出李雅普诺夫函数，就能解决一系列有重大实际意义的问题。例如，可以给出调节量变化的估计，过渡过程经过的时间（调节时间）的估计、调节质量的估计等。А. И. 鲁里叶、А. М. 列托夫[5]的工作，有力地表明了应用李雅普诺夫直接法来解决自动调节理论中一些问题之卓著成效。Ф. Г. 甘特马赫及 В. А. 雅库柏维奇[6]对这一方面的工作作了进一步的总结。利用李雅普诺夫函数，可以估计经常作用下扰动的影响，可以解决大范围稳定性问

题，即估计初始扰动的区域，使得随着时间的增加，其解不离开预先给定的区域的范围．在某些情况下，用李雅普诺夫函数的方法也可以解决关于周期解的存在问题．李雅普诺夫函数也可用于最佳控制理论．总之，李雅普诺夫第二方法在科学的许多领域内已经得到广泛的应用．

为了说明李雅普诺夫函数的思想实质，我们首先用下列简单例题来说明．

例 1：谐振动．假定一物体M连结在两个弹簧中间．这两个弹簧同样长，在位置O处物体是在平衡状态中(见图 3 中 (1))．将物体 M 由平衡点向右方移过一个线段 $+x$ (见图 3 中 (2))，这时右方的弹簧被压缩，左方的弹簧被拉伸，作用在这物体上的力$-f$ 指向平衡点 O，位移愈大，则作用力也就愈大．在这力底作用下，物体M开始向平衡点方向运动，这时运动的速度逐渐增加．当它又回到平衡点时(见图 3 中 (3))，作用力等于零，但物体M有一速度$-v$．由于这个速度，物体M通过平衡点继续向左运动．这时左边的弹簧被压缩，右边的被拉伸，将有一力 $+f$ 作用于物体上，这力向右指向平衡点．当物体M未停止之前，这力将阻滞其运动．当物体M停止后，它立刻又开始向反方向，即向平衡点方向运动 (见图 3 中 (4))．这样，物体M就在平衡点附近振动．如果物体M开始时离平衡位置距离很小，那末物体 M 总在平衡点的邻近作周期性运动，所以平衡点O为稳定的．以上是直观的看法．当我们考虑物体M的质量为m时，那末由牛顿第二定律得出物体的运动方程为：

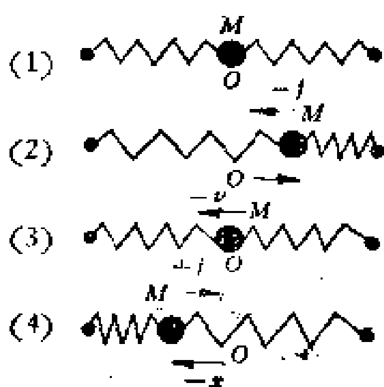


图 3
上图是连结在两个弹簧中间的物体M在平衡位置O附近的振动情形

$$m\ddot{x} = f = -kx,$$

这里 k 是弹簧的弹性系数．m 与 k 是二个正量，引入符号

$$\omega^2 = \frac{k}{m},$$

数 ω 被称为物体振动的圆频率(亦称为角频率). 如果把圆频率标准化后(即令 $\omega^2 = 1$), 那末上述的运动方程就简化为

$$\ddot{x} + x = 0.$$

令 $\dot{x} = y$, 上面的运动方程就化为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \tag{1.8}$$

这时系统的总能量为

$$E(x, y) = x^2 + y^2,$$

因为

$$\frac{dE}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2xy + 2y(-x) = 0,$$

这就说明了系统 (1.8) 是一个保守系统, 而

$$E(x, y) = x^2 + y^2 = R^2 \; (R \text{ 是常量})$$

为其首次积分.

在相平面 (x, y) 上, $E(x, y) = x^2 + y^2 = R^2$ 表示以原点为中心的一族同心圆. 当初始位置与初始速度取得足够小时 (R^2 是由初始位置与初始速度决定的, 这里 $R^2 = x_0^2 + \dot{x}_0^2$), 那末运动总是在原点的足够小的邻域内,因此系统 (1.8) 的零解是稳定的. 但显然不是渐近稳定的.

我们可以取

$$V(x, y) = E(x, y) = x^2 + y^2. \tag{1.9}$$

上面就是借助了这样的函数来研究系统 (1.8) 的平凡解的稳定性问题. 我们指出,由于系统 (1.8) 极为简单, 其积分曲线就是以原点为中心的一族同心圆. 故其稳定性问题是可以直接得到的. 下面我们将举出例子,从系统本身不易直接得出稳定性的结论,而借助于一族闭曲线 $V(x, y) = c$ 来控制系统积分曲线的趋向, 可以非常巧妙地解决系统的稳定性问题.

例 2: 考虑动力系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - ax(x^2 + y^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - ay(x^2 + y^2), \qquad a > 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

此时仍考虑函数(1.9)作为李雅普诺夫函数，虽然这时函数(1.9)对系统(1.10)而言，不一定再能表示它的总能量。此时求函数 $V(x, y)$ 沿(1.10)的积分曲线的变化率

$$\frac{dV}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2x[y - ax(x^2 + y^2)]$$

$$+ 2y[-x - ay(x^2 + y^2)]$$

$$= -2a(x^2 + y^2)^2 = -2aV^2 < 0.$$

$$-\frac{dV}{V^2} = 2adt, \quad \frac{1}{V} = 2at + k_0 \text{（任意常数）},$$

$$V(x(t), y(t)) = x^2(t) + y^2(t) = \frac{1}{2at + k_0},$$

$$\lim_{t\to\infty} V(x(t), y(t)) = 0.$$

因为 $V(x, y) = x^2 + y^2$ 是定号函数，因此有

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

所以(1.10)的未被扰动运动是渐近稳定。

由

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1.10)} = -2a(x^2 + y^2) < 0 \qquad (a > 0),$$

这就说明了封闭曲线族 $V(x, y) = x^2 + y^2 = c$ 沿着(1.10)的积分曲线在不断的收缩，直至收缩到原点。换句话说，也就是(1.10)的积分曲线随着 t 的增加由外向里的穿过每一条闭曲线 $V(x, y) = x^2 + y^2 = c$，最后趋于原点。实际上在这个例题中，函数(1.9)表示了在相平面上由(1.10)所描述的运动质点的状态 (x, y) 与原点之间的距离平方。因此

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1.10)} < 0$$

就表示了这个距离随着时间的增长而在不断的缩小，最后此距离趋于零。

从以上两个例子可以看出：

1）当研究动力系统(由常微分方程组来描述)的稳定性时，可

以不必去寻求它的特解或通解，而是引进一类具有特殊性质的函数，由这种函数来控制积分曲线的动向，足以保证未被扰动运动的稳定性问题得到解决；

2）函数 V 有各种作法，一般说来，应结合实际的物理背景来作出 V.

我们今后称这种类型的函数 V 为李雅普诺夫函数.

最后，我们对于解在整个 t 的正半轴上存在性的问题，引进一些简单的讨论.

考虑自治系统

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s(x_1,\cdots,x_n)\qquad(s=1,2,\cdots,n).\qquad(1.11)$$

一般对函数 X_s 总假定它在区域

$$|x_s|\leqslant h(s=1,2,\cdots,n)$$

内关于 x_s 具有连续的一阶偏导数，且 $X_s(0,\cdots,0)=0$，这样就可保证 (1.11) 有从任何初始时刻 t_0 和初始状态 $x_{s0}(s=1,2,\cdots,n)$ 开始的唯一解. 实质上函数 X_s 关于变元 $x_s(s=1,2,\cdots,n)$ 的李浦希兹条件就足以保证这一点. 不过，应当引起注意的是：局部的李浦希兹条件仅描述了解在 (t_0,x_{s0}) 附近的性质，而由这一点并不能得出，对任意大的 t 值解都存在的结论.

例如，考虑一阶非线性微分方程

$$\frac{dx}{dt}=x^2=f(x).$$

显见

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)|&\leqslant|x_1+x_2|\cdot|x_1-x_2|\\&\leqslant L(x_1,x_2)|x_1-x_2|,\end{aligned}$$

因此在初始状态的邻近可以找到一个常数，但是要找到与 x 无关的常数却比较困难. 可是如果我们就小范围来讨论，这时能保证在初始值 (t_0,x_0) 的邻近解的存在唯一性，但不能保证解在整个 t 的正半轴上存在. 实际上由分离变量法

$$\frac{dx}{x^2}=dt,\quad 得\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x^2}=\int_{t_0}^{t}dt,$$

故

$$-\frac{1}{x(t;\ x_0,\ t_0)}+\frac{1}{x_0}=t-t_0.$$

由此看出：当 $t\to t_1=t_0+\frac{1}{x_0}$ 时，方程的解

$$x(t;\ x_0,\ t_0)\to\infty.$$

这就说明方程由 $(t_0>0,\ x_0>0)$ 开始的解不可能在 $[t_0,\ \infty)$ 上延拓。除非状态 $x(t_1;\ x_0,\ t_0)$ 有一个从 $+\infty$ 到 $-\infty$ 的"跳跃"。显见这不是动力系统工作的方式。L. 马尔库斯[7]对这种现象的看法是：微分方程的解在有限时间内要跑到无穷，说明了这个方程的解具有有限逸时 (finite escape time)。要避免这种现象的出现，我们只要假定方程右端在所考虑的定义域上一致的满足李浦希兹条件：

$$|X_s(x_1,\ \cdots,\ x_n)-X_s(y_1,\ \cdots,\ y_n)|\leqslant L\sum_{s=1}^{n}|x_s-y_s|.$$

其中 L 是与变量 $x_s(s=1,\ \cdots,\ n)$ 无关的正常数。

事实上，假定

$$x_s=\varphi_s(t;\ x_{s0},\ t_0)\qquad(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

是 (1.11) 的任一解，因此

$$\varphi_s(t;\ x_{s0},\ t_0)=x_{s0}+\int_{t_0}^{t}X_s(\varphi_1(t;\ x_{s0},\ t_0),\ \cdots,\ \varphi_n(t;\ x_{s0},\ t_0))\,dt,$$

$$|\varphi_s(t;\ x_{s0},\ t_0)|\leqq|x_{s0}|+\int_{t_0}^{t}|X_s(\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_n)|\,dt$$

$$\leqq|x_{s0}|+L\int_{t_0}^{t}\sum_{s=1}^{n}|\varphi_s(t;\ x_{s0},\ t_0)|\,dt,$$

$$\sum_{s=1}^{n}|\varphi_s(t;\ x_{s0},\ t_0)|\leqq\sum_{s=1}^{n}|x_{s0}|+nL\int_{t_0}^{t}\sum_{s=1}^{n}|\varphi_s(t;\ x_{s0},\ t_0)|\,dt.$$

根据格劳沃尔-贝尔曼 (Gronwall-Bellman) 不等式[8]，以上不等式就

有

$$\sum_{s=1}^{n}|\varphi_s(t;x_{10},\cdots,x_{n0},t_0)|$$

$$\leqq\left(\sum_{s=1}^{n}|x_{s0}|\right)\exp nL(t-t_0).$$

由此立即可以看出，$\varphi_s(t;x_{s0},t_0)$ 在任何有限时刻 $t-t_0$ 都不会跑到无穷远处，也就是说在李浦希兹常数 L 与变元 $x_s(s=1,2,\cdots,n)$ 无关的假定下，就可保证方程之解不会出现有限逸时的现象。

§2. 基本定义

（一）定号、常号、变号函数

下面我们将要考虑定义在坐标原点邻域内的变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的连续函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$. 我们假定它是单值的，当 $x_1=\cdots=x_n=0$ 时取零值，而且具有连续的偏导数.

定义 2.1：函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$ 称为是定号的（正定的或者负定的），如果当

$$|x_s|\leqq h\ (s=1,2,\cdots,n)\tag{2.1}$$

时（这里 h 是足够小的正数），它只能取具有一定符号的值，而且只在 $x_1=\cdots=x_n=0$ 时，它才变为零.

定义 2.2：函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$ 称为是常号的（正的或负的），如果它在区域 (2.1) 内只能取具有一定符号的值，但它可以在

$$\sum_{s=1}^{n}x_s^2\neq 0$$

时取零值.

定义 2.3：函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$ 称为变号的，如果它既不是定号的，也不是常号的. 也就是说，无论数 h 多么小，它在区域 (2.1) 内既可取到正的值，也可取到负的值.

例如，在三维欧氏空间，函数

$$V(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4$$

是正定的；

$$V(x, y, z) = 2x^2 + z^4$$

是常正的；

$$V(x, y, z) = x^2 + 5y^2 - z^4$$

是变号的。

通常取二次型作为李雅普诺夫函数是用得最广泛的一种，因此对怎样保证二次型是正定的(或负定的）一些判定准则，对我们说来是很重要的．近年来在文献中对二次型的应用，常用矩阵形式将其表示出来，因为用矩阵形式来表示有其显著的优点．

令

$$2V(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

是一个二次型．用 x 表示一个 n 行一列的矩阵，x' 表示 x 的转置；$A = (a_{ij})$ 是一个 $n \times n$ 阶的方阵，A' 表示 A 的转置，这里 $A = A'$．这样一来

$$2V(x_1, \cdots, x_n) = x'Ax,$$

我们就可以把二次型的定号性用方阵 A 来表示．

定义 2.4：方阵 A 是正定的，如果对任意 $x \neq 0$ 时，二次型 $x'Ax$ 是正定的话．简单的用 $A > 0$ 表示二次型 $x'Ax$ 是正定的．同理用 $A < 0$ 表示二次型 $x'Ax$ 是负定的．

方阵 A 的特征值 $\lambda_i(A)$ 就是多项式

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = |a_{ij} - \delta_{ij}\lambda| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda, & \cdots, & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

的根．其中 I 是单位矩阵．

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$ 是克朗涅克符号．

性质 1：正定方阵 A 总是可逆的．

事实上存在非奇异的线性变换

$$y_s = k_{s1}x_1 + k_{s2}x_2 + \cdots + k_{sn}x_n \qquad (s = 1, 2, \cdots, n),$$

将二次型 $2V(x_1, \cdots, x_n)$ 变成

$$2V(x_1, \cdots, x_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_i = \lambda_i(A) > 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，所以特征方程 $\det(A - \lambda I) = 0$ 没有零根，即 $\det A \neq 0$，故 A 是可逆的.

性质 2：当 A，B 都是对称方阵时，则 $\lambda_i(AB) = \lambda_i(BA)$，

事实上 $A = A'$，$B = B'$，$(AB)' = B'A' = BA$，

$$|AB - \lambda I| = |(AB)' - \lambda I| = |BA - \lambda I|.$$

定理 2.1：方阵 A 是正定的，当且仅当以下三个条件中之一成立即可：

(1) 存在一个非奇异的矩阵 B，使得 $B'B = A$；

(2) 对一切 i，有 $\lambda_i(A) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$；

(3) A 的所有主子行列式都是正的.

条件 (3) 就是著名的西尔威斯特(Sylvester)定理：A 正定的充分必要条件为

$$a_{11} > 0; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0; \cdots \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

A 是负定的充要条件：即是 A 的所有主子式正负号相间，但第一个主子式总是小于零.

这个定理的证明，可参看 Φ. P. 甘特马赫所著“矩阵论”一书[9].

(二) 定号函数的几何意义

为了简单起见，我们考虑具有三个自变量的正定函数 $V(x, y, z)$ (对于 n 个变量的情形同样可以阐明). 考虑曲面

$$V(x, y, z) = c, \tag{2.2}$$

其中 $c > 0$ 是常量. 在 $c = 0$ 时，由于 V 的定号性，我们有 $x = y = z = 0$，于是曲面就蜕化为坐标原点. 下面要来证明，当 c 足够小时 (2.2) 是一个围绕坐标原点的封闭曲面.

为此我们来证明，由坐标原点出发到区域(2.1)的边界上任一点的任何连续曲线一定和曲面(2.2)相交，只要数 c 不超过某一个只与 h 有关的足够小的正数 l 的话(见图4)．

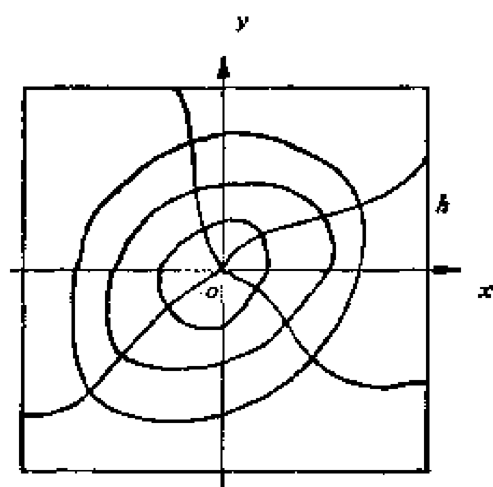


图　4

事实上设 l 是函数 V 在区域(2.1)的边界上的下确界，因而在这个边界上我们有 $V(x, y, z) \geq l$，(由于 V 的连续性等号定能取到)，数 l 显然不等于零，而且是正的．现在我们考虑任意的连续曲线，它由坐标原点出发并引至区域(2.1)的边界．我们沿着这条曲线来看函数 V 的变化，在曲线的起点(即坐标原点) V 取零值，而在曲线的终点，V 等于某个不小于 l 的数．因为函数 V 沿着这条连续曲线是连续地变化，因此只要取 $c < l$，V 在这条曲线上的某一点就必然要取到数值 c．换句话说，这条曲线必然要和曲面(2.2)相交．因此当 c 值足够小时，所有曲面(2.2)都是封闭的，并且包围坐标原点．如果现在我们把 c 的值由零变化到某一足够小数值，那末我们就得到一族封闭的、彼此不相交的(由于 V 的单值性)曲面，它们包围坐标原点，当 $c = 0$ 时，曲面蜕化成一个点，即坐标原点．

(三)稳定性、不稳定性、渐近稳定性的定义

在今后的讨论中，如果不作特殊的声明，我们都是针对(1.11)所描绘的动力系统而言的．因此对函数 $X_s(x_1, \cdots, x_n)$ 在区域

$$|x_s| \leq H \qquad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.3}$$

内总是假定它是连续的，且使得方程(1.11)对于每一组在区域(2.3)内的初始值 x_s^0 有且只有唯一的解 $x_s(t)$．且总假设

$$X_s(0, \cdots, 0) = 0 \qquad (s = 1, 2, \cdots, n).$$

定义 2.5: 如果对于任意正数 ε，无论它多么小，可以找到另一正数 $\eta(\varepsilon)$，使得对于所有受干扰的运动，当其在初始时刻 t_0 满足不等式

$$|x_s(t_0)| \leqslant \eta \qquad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{2.4}$$

而在所有 $t > t_0$ 时满足不等式

$$|x_s(t)| < \varepsilon \qquad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{2.5}$$

则我们就称未被扰动运动(即 $x_s = 0 \ s = 1, \cdots, n$)是稳定的.反之,则称未被扰动运动是不稳定的.

定义 2.6: 如果未被扰动运动是稳定的,并且数 η 可选择得如此之小,使得对于所有满足不等式 (2.4) 的扰动运动, 同时又满足条件

$$\lim_{t\to\infty} x_s(t) = 0 \qquad (s = 1, 2, \cdots, n),$$

则就称未被扰动运动是渐近稳定的.

§3. 稳定性的基本定理

(一) 关于稳定性的李雅普诺夫定理

在考虑函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$ 的同时, 我们还考虑它对于时间的导数, 这些导数是基于下列假定作出的, 即 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是时间的函数, 它们满足 (1.11). 在这样的假定下, 关于 V 对时间的导数我们有

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}\frac{dx_s}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}$$

$$\times X_s(x_1, \cdots, x_n) = w(x_1, \cdots, x_n), \tag{3.1}$$

因而 $\frac{dV}{dt}$ 也是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数, 且在 $x_1 = \cdots = x_n = 0$ 变为零.

定理 3.1: 如果对于扰动运动的微分方程 (1.11)

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \cdots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \cdots, n),$$

可以找到一个定号函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$, 它对于时间 t 的由于这些方程构成的全导数 (3.1) 是常号函数, 且其正负号与 $V(x_1, \cdots, x_n)$ 相反或者恒等于零, 则未被扰动运动是稳定的.

证： 不妨假定 $V(x_1, \cdots, x_n)$ 是正定的函数，因而在区域

$$|x_s| \leq h \leq H \qquad (s = 1, 2, \cdots n) \tag{3.2}$$

内的所有点，除了坐标原点以外，V 只能取正值．在同一个区域内，根据定理的条件，有不等式

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s(x_1, \cdots, x_n) \leqslant 0. \tag{3.3}$$

设 ε 是一个小于 h 的任意小的正数，以 x 表示数 $|x_1|, \cdots, |x_n|$ 中之最大者，即是令

$$x = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}.$$

考虑由边长为 2ε 之 n 维正方体的表面构成的点集

$$x = \varepsilon, \tag{3.4}$$

显见这是一个闭集．设 l 是函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$ 在此闭集上的下确界，因而在 $x = \varepsilon$ 上，有

$$V(x_1, \cdots, x_n) \geqslant l > 0.$$

这是因为 V 是正定的，并且由于 V 是连续的，所以在闭集合 $x = \varepsilon$ 上可以达到其下确界．

现在考虑方程 (1.11) 的任一解 $x_s(t)$，设其初始值 $x_{s0} = x_s(t_0)$ 在区域

$$|x_{s0}| \leqslant \eta \qquad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.5}$$

内．这里我们假定 η 小于 ε，而且它是如此之小，使得

$$V(x_{10}, \cdots, x_{n0}) < l.$$

这样选择 η 当然是可能的，因为 $V(x_1, \cdots, x_n)$ 是连续函数，而且 $V(0, \cdots, 0) = 0$．将解 $x_s(t)$ 代入函数 V 中，我们得到一个依赖于时间 t 的函数，根据 (3.3) 式，只要 $x_s(t)$ 在区域 (3.2) 内时，它是不上升的．因此，对于 $x_s(t)$ 在区域 (3.2) 内的所有时间 t，有不等式

$$V(x_1(t), \cdots, x_n(t)) \leq V(x_{10}, \cdots, x_{n0}) < l. \tag{3.6}$$

由此可以直接得出，在所有 $t > t_0$ 时，有不等式

$$|x_s(t)| < \varepsilon. \tag{3.7}$$

事实上，因为 $\eta < \varepsilon$，由于 $x_s(t)$ 的连续性，不等式 (3.7) 至少对足

够接近于 t_0 的 t 值是成立的. 如果这些不等式在某一时刻不成立了,那末必然有这样的时刻 $t=T$,此时量 x_s 中至少有一个在数值上达到 ε. 换句话说,必然存在这样的时刻 $t=T$, 此时条件 (3.4) 被满足,因而根据 l 是函数 V 在 $x=\varepsilon$ 上的下确界,就有

$$V(x_1(T), \cdots, x_n(T)) \geqq l.$$

不过这是不可能的,因为 $\varepsilon < h$, 集合 (3.4) 在区域 (3.2) 内,因而在 $x=\varepsilon$ 时,必然要满足不等式 (3.6)

$$V(x_1(T), \cdots, x_n(t)) \leqq V(x_{10}, \cdots, x_{n0}) < l.$$

因此, 对于所有扰动运动微分方程的解, 如果它们满足不等式 (3.5), 那末在所有 $t > t_0$ 时就满足不等式 (3.7), 这就证明了未被扰动运动的稳定性.

上述证明的过程, 指出了给定 ε 如何来确定初始扰动范围 η 的方法:

(i) 给定数 ε, 确定函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$ 在 $x=\varepsilon$ 上的下确界 $l(\varepsilon)$;

(ii) 根据数 $l(\varepsilon)$ 决定 $\eta(\varepsilon)$, 使得在满足 $|x_{s0}| \leqslant \eta$ 时就满足 $V(x_{10}, \cdots, x_{n0}) < l$.

(二) 关于渐近稳定性的李雅普诺夫定理

定理 3.2: 如果对于扰动运动的微分方程 (1.11)

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \cdots, x_n) \qquad (s=1, 2, \cdots, n),$$

可以找到定号函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$, 它对于时间 t 的由于 (1.11) 构成的全导数也是定号函数,且其正负号与 V 的正负号相反,则未被扰动运动是渐近稳定的.

证: 不失普遍性, 仍假定 $V(x_1, \cdots, x_n)$ 是正定的, 那末 $\frac{dV}{dt}$ 是负定的,因此在区域 (3.2) 内, 有

$$V(x_1, \cdots, x_n) \geqq 0, \quad \frac{dV}{dt} \leqq 0.$$

这里等号仅在 $x_1=\cdots=x_n=0$ 时成立.

设 $0<\varepsilon<h$, 根据前面定理 3.1 知未被扰动运动 $x_1=\cdots=$

$x_n = 0$ 是稳定的. 所以根据任给的 $\varepsilon > 0$, 可找到 $\eta = \eta(\varepsilon)$, 使得对于 (1.11) 的任一解 $x_s(t)$, 如果在初始时刻满足不等式

$$|x_{s0}| = |x_s(t_0)| < \eta(\varepsilon), \tag{3.8}$$

则对在所有 $t > t_0$ 的时刻都满足不等式

$$|x_s(t)| < \varepsilon.$$

现在我们进一步来证明

$$\lim_{t\to\infty} x_s(t) = 0 \qquad (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{3.9}$$

证明了这点,也就证明了未被扰动运动是渐近稳定的.

事实上,因为所讨论的解对所有时刻 $t > t_0$ 总在区域 (3.2) 内, 于是根据定理中的条件函数 $V(x_1(t), \cdots, x_n(t))$, 对于时间 t 的导数对所有时间 t 都取负值, 不可能取零值. 这个结论是由于函数 $x_s(t)$ 对任何 t 值都不能同时变为零. 因为如果这种情况在某一时刻 $t = T$ 时发生,那末取 T 为初始时刻,我们就得到方程 (1.11) 的具有零初始条件的两个不同的解:所讨论的解 $x_s(t)$ $(s = 1, \cdots, n)$ 和平凡解 $x_1 = \cdots = x_n = 0$. 而这是不可能的, 因为方程 (1.11) 在给定的初始条件下只能有一个解.

由于导数对所有的时刻 t 总取负值, 故函数 $V(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 是单调减少的, 而当 $t \to \infty$ 时, 它就必然要趋近于某一极限值 α, 而在所有时刻都大于这一极限值,即

$$V(x_1(t), \cdots, x_n(t)) > \alpha. \tag{3.10}$$

下面我们来证明 $\alpha = 0$. 用反证法, 假定 $\alpha \neq 0$, 于是根据 V 的正定性有 $\alpha > 0$. 因为 V 是连续函数,由 (3.10) 得

$$x(t) = \max\{|x_1(t)|, \cdots, |x_n(t)|\} > \beta, \tag{3.11}$$

其中 β 是某个正数. 但因 $\frac{dV}{dt}$ 是负定的函数,于是在闭集 $\beta \leqslant x \leqslant h$ 上函数 $\frac{dV}{dt}$ 可取到其上确界, 即

$$\frac{dV}{dt} \leqq -b,$$

其中 b 也是一个正数. 所以对所有 $t > t_0$, 有不等式

$$V(x_1(t), \cdots, x_n(t)) = V(x_1(t_0), \cdots, x_n(t_0)) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt} dt$$
$$\leqq V(x_1(t_0), \cdots, x_n(t_0)) - b(t - t_0).$$

但这显然是不可能的, 因为对于足够大的 t 值这个不等式的右端是负的,这就违反了 $V(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 是正定的条件. 因此我们得到结论

$$\lim_{t \to \infty} V(x_1(t), \cdots, x_n(t)) = 0.$$

再由 V 的定号性就得到 (3.9). 定理证毕.

注: 对于方程 (1.11) 的满足条件(3.9)的解, 其初始值 x_{s0} 的最大区域称为渐近稳定性区域.

(三) 基本定理的几何解释

上述两个定理有着简单的几何解释. 这种解释不仅阐明了定理的基本内容,而且在解决许多工程技术问题时有其广泛的应用.

先考虑李雅普诺夫的第一定理,即定理 3.1. 假设存在有定号的函数 $V(x_1, x_2, x_3)$ (为了简单起见,我们在这里假设 $n = 3$). 其导数 $\frac{dV}{dt} \leqslant 0$. 作出曲面族

$$V(x_1, x_2, x_3) = c, \tag{3.12}$$

其中 c 是一个正的参数, 在零至某一足够小的值之间变化. 正如我们在前面已指出的那样, 曲面族 (3.12) 是封闭的, 它们包围坐标原点并在 $c = 0$ 时收缩于这一点. 如果 $c_1 < c_2$, 那末曲面 $v = c_1$ 完全位于曲面 $V = c_2$ 之内.

考虑方程 (1.11) 的任一积分曲线, 它在初始时刻由坐标原点附近的任一点出发,这条积分曲线在 t 增长时,无论在什么时刻都不会由里向外地通过曲面族 (3.12). 事实上, 如果在某一点发生了这样的相交, 那末在这一点函数 $V(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ 必然具有正的导数, 因为在由曲面族 (3.12) 中任一曲面过渡到这一族中的另一曲面,而且当后者包围前者的时候,函数 $V(x_1, x_2, x_3)$ 的值是增加的. 因此, 如果任一积分曲线在初始时刻是在 (3.12) 的某

一曲面内，那末在后来所有时刻，它也一定在该曲面之内。但当 c 足够小时，曲面 (3.12) 包含着足够小的坐标原点的邻域，由此就直接得出未被扰动运动的稳定性的结论。

根据上面简单的几何解释，可以给出根据数 ε 来确定数 $\eta(\varepsilon)$ 的方法。为此我们考虑完全位于边长为 2ε 的立方体内的曲面族 (3.12) 中的最大曲面。设这个曲面是 $V=l$。这里 l 是函数 V 在 $x=\varepsilon$ 上的下确界。再作出边长为 2η 的立方体，使它完全位于上述曲面之内。于是任何由这立方体内起始的连续的积分曲线，也就是初始值满足 $|x_{s0}|\leq\eta(s=1, 2, \cdots n)$ 的积分曲线，将永远在曲面 $V=l$ 之内，因而也总在边长为 2ε 的立方体之内。这就是具体地给出了如何根据给定的 ε 值来确定 η 值的方法。

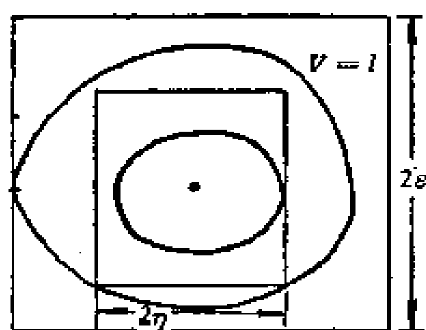


图 5

我们指出，可以利用定理 3.1 的几何解释来估计允许扰动的区域(参看 [3])，区域 E 称为给定区域 G 的允许扰动区域，如果由区域 E 内任一点所引出的轨线，总不超出区域 G 的范围。在目前的情形下，显然上面所述的以原点为中心，边长为 2η 的正立方体是对以原点为中心，边长为 2ε 的正立方体的允许扰动区域，因此，为了确定允许扰动区域，首先必须找出函数 v 在区域 G 的边界上的最小值 l，然后由此来决定区域 E，使在区域 E 中有 $V<l$。

如果 $\frac{dV}{dt}$ 是负定的函数，那末由坐标原点的足够小邻域内出发的每一条积分曲线，都必然地要由外向里地与曲面族 (3.12) 中的每一个相交，因为函数 $V(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ 必定是不断地减小。在这种情形，积分曲线就必然要无限地趋近坐标原点，也就是说未被扰动运动是渐近稳定。

我们指出，利用定理 3.2 的几何解释可以估计过渡过程的时间。在控制理论中，过渡过程时间通常称为控制时间。

设数 l 是函数 V 在边长为 2η 的立方体的边界上的最小值，则由立方体 $x=\varepsilon\ (\varepsilon>\eta)$ 的边界过渡到立方体 $x=\eta$ 的表面的过渡时间可按下式来计算，

$$V(x(t))=V(x(t_0))+\int_{t_0}^{t}\frac{dV}{dt}dt,$$

得

$$l\leqslant V(x_0)-b(t-t_0).$$

这里 $-b$ 是负定函数 $\frac{dV}{dt}$ 在闭集 $\eta\leqslant x\leqslant\varepsilon$ 上的上确界，b 是大于零的，故得过渡过程的时间估计

$$t-t_0\leqslant\frac{V(x_0)-l}{b}.$$

由此可见，由几何的观点来看，研究稳定性的李雅普诺夫第二方法就归结于建立一族封闭的曲面，它们包围坐标原点并具有这样的性质，就是积分曲线只能由外向里地与每一个这样的曲面相交. 只要能用任何方法建立起这样的曲面族，那末也就可断定未被扰动运动的稳定性.

（四）稳定性定理的推广

由 E. A. 巴尔巴欣与 H. H. 克拉索夫斯基[10]所给出的关于渐近稳定性的定理，可以得到李雅普诺夫关于渐近稳定性的定理，所以这个定理是李雅普诺夫的关于渐近稳定性定理的推广. 这个定理给出后，可以借助于有常号导数的李雅普诺夫函数来解决渐近稳定性的问题. 同时，这个定理的重要性在于，针对具体的动力系统能够作出李雅普诺夫函数. 在以后的章节中可以看到，对非线性系统而言，多半都是作出这种具有常号导数的李雅普诺夫函数.

为了证明这个定理，首先研究轨线的某些极限性质.

定义 3.1： 相空间的点 y 称为点 x_0 的 ω 极限点，如果存在时间序列 $\{t_n\}$，当 $n\to\infty$ 时，$t_n\to\infty$，有

$$y=\lim_{n\to\infty}x(t_n,x_0).$$

也就是说，在点 y 的任意小的邻域内，对任意大的 T 而言，当 $t>T$

时，总有轨线 $x(t;\ x_0)$ 的点在这个邻域内.

例如，渐近稳定的平衡位置，是对位于这个平衡位置足够小的邻域内之所有点的 ω 极限点；

又如，稳定的极限环上的每一个点也是它的邻域内的每个点的 ω 极限点.

引理 3.1：给定点的 ω 极限点的集合，是由整条轨线组成的闭集合.

证明分二步：

(1) 如果证明了 x_0 的 ω 极限点的集合 Ω 的极限点，也属于 Ω，这就证明了集合 Ω 的闭的性质. 这点根据 ω 极限点的定义很容易推出.

(2) 如果点 y 是点 x_0 的 ω 极限点；则通过 y 的轨线上的每一个点，都是 x_0 的 ω 极限点.

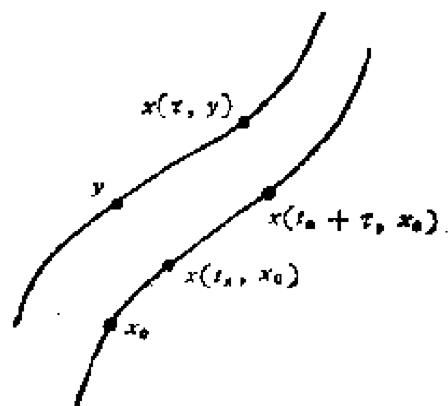


图 6

事实上，通过点 y 作方程组的轨线. 设 $x(\tau,\ y)$ 是轨线上任一点，现证明 $x(\tau,\ y)$ 也是 x_0 的 ω 极限点（这里 $\tau>0$，对 $\tau<0$ 也可同样的讨论）.

根据解对初值的连续依赖性直接得出.

如果 $y=\lim\limits_{n\to\infty}x(t_n,\ x_0)$，那末 $x(\tau,y)=\lim\limits_{n\to\infty}x(t_n+\tau,\ x_0)$. 以上证明了通过点 y 的轨线上任一点 $x(\tau,\ y)$，也都是 x_0 的 ω 极限点. 这也就是说，极限点集 Ω 是由整条轨线组成.

引理 3.2：如果在区域 D 内，存在有下界的李雅普诺夫函数，并且如果这个函数关于时间的导数，在这个区域内取负号，那末，给定轨线的全部 ω 极限点，当 $t\to\infty$ 时，不离开区域 D，并位于函数 V 的同一个位曲面上（即 $V=$ 常量的曲面上）.

证：设点 x_0 在区域 D 内，并设 $y=\lim\limits_{n\to\infty}x(t_n,\ x_0)$ 是 x_0 的 ω 极

限点.

首先指出,当 $t\to\infty$ 时,函数 $V(x(t,x_0))$ 不增,并有下界,因此存在极限 $V_0=\lim\limits_{t\to\infty}V(x(t,x_0))$; 其次由于函数的连续性

$$V(y)=\lim_{n\to\infty}V(x(t_n,x_0)),$$

但因为 $V(x(t,x_0))$ 是单调地变化,故有

$$V(y)=V_0,$$

即所有极限点位于同一个位曲面上. 引理证毕.

有了这些预备知识后,就可证明下列定理.

定理 3.3: 如果对于扰动运动的微分方程 (1.11)

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s(x_1,\cdots,x_n)\qquad(s=1,2,\cdots,n),$$

存在正定函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$, 使得

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}X_s(x_1,\cdots,x_n)\leq 0,$$

并且 $\dot V=0$ 除点 O 外不包含 (1.11) 的整条轨线, 则 (1.11) 的未被扰动运动在李雅普诺夫意义下是渐近稳定的.

证: 因为定理的假设满足稳定性定理 3.1 的全部条件, 所以任给 $\varepsilon>0$, 可以找到 δ, 只要 $x_0\in I_\delta$(这里 I_δ 是点 O 的 δ 邻域), 那末当 $t>0$ 时, 有 $x(t,x_0)\in I_\varepsilon$ (I_ε 是点 O 的 ε 邻域). 所以轨线 $x(t,x_0)$ 当 $t>0$ 时,不离开球 $\bar I_\varepsilon$ 的界限,因此, 点 x_0 的 ω 极限点集合 Ω 是非空的(因为有界无穷点集必有极限点).

如果 Ω 与坐标原点 O 重合,则定理就证明了,因为此时有

$$\lim_{t\to\infty}x(t,x_0)=0.$$

用反证法, 假设集合 Ω 至少包含一个异于点 O 的点 y. 由引理 3.2 得

$$V(y)=V(x(t,y))=\lim_{t\to\infty}V(x(t,x_0))\neq 0.$$

这是因为点 y 异于点 O, V 是定号函数之故. 这样一来, 点 x_0 的全部 ω 极限点, 位于同一个位曲面上; 由引理 3.1 知集合 Ω 是闭的,并且由整条轨线组成. 这样一来,因为 V 沿着这条轨线保持常

量，则在整个集合 Ω 上有 $\dot{V}=0$，按定理的条件，集合 Ω 应当包含在集合 $\dot{V}=0$ 内。但由假设集合 $\dot{V}=0$ 不包含整条轨线，从而导出矛盾。因此 Ω 必与点 O 重合。定理证毕。

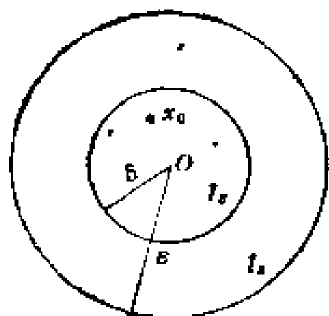


图 7

这个定理与定理 3.2 的不同之处，就在于这里不要求函数 $\dot{V}$ 的定号性，这点是很重要的。因为在实际作李雅普诺夫函数时，往往导致有常号的导数的函数。

此外，应当指出，就是关于在集合 $\dot{V}=0$ 上不存在整条轨线这一假定，在具体的情况下是容易检查的，如果曲面 $\dot{V}=0$ 由方程 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)=0$ 给出，那末

$$\frac{d\varphi}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}X_s(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$$

是在它上面不存在整条轨线的充分条件。因为如果上面的条件满足，表示积分曲线的切线不与曲面的法线垂直，故积分曲线会穿过这个曲面。

（五）全局稳定性

正如我们在 § 1 所指出的，A. M. 李雅普诺夫所建立的未被扰动运动稳定性的概念是针对局部小范围的情况而言的，换句话说，就是在初始扰动很小的情况下，他建立了关于未被扰动运动稳定性的二个基本定理。对于初始扰动为任意大的情况下，是否还存在着未被扰动运动的稳定性呢？这个问题 A. M. 李雅普诺夫本人并未提出，而是由其后继者们在发展他的工作中提出的。实质上 A. M. 李雅普诺夫解决问题的思想方法完全可以用来解决这个所谓全局稳定性的问题。

(1) 仍考虑方程 (1.11)

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s(x_1,\cdots,x_n)\qquad(s=1,2,\cdots,n).$$

假设方程的右端 $X_s(x_1,\cdots,x_n)$ 在全相空间内连续，且满足

李浦希兹条件； $X_s(0,\cdots 0)=0$，且坐标原点 $O(0,\cdots,0)$ 是 (1.11) 的唯一奇点(即平衡态).

定义 3.2：系统 (1.11) 的未被扰动运动(即零解 $O(0,\cdots,0)$) 称为是全局稳定的(或称在任意初始扰动下为稳定的)．如果它在李雅普诺夫意义下是稳定的．并且 (1.11) 的所有其它解 $x_s(t)$ $(s=1,2,\cdots n)$ 都具有性质

$$\lim_{t\to\infty} x_s(t)=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n).$$

我们将研究在 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的全相空间有定义的函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$，一般总假定它连续，且有连续的一阶偏导数.

定义 3.3：函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$ 被称为无限大的．如果对于任何 $A>0$，存在这样的 $R>0$，使得在球 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2=R^2$ 之外，不等式 $V(x_1,\cdots,x_n)>A$ 成立.

例 1：变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的正定二次型

$$V(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}x_ix_j=x'Ax$$

总是具有无限大性质．因为 $V(x_1,\cdots,x_n)$ 总满足不等式

$$V(x_1,\cdots,x_n)\geqslant \lambda_1 r^2.$$

这里 λ_1 是特征方程 $|A-\lambda I|=0$ 的最小特征根，

$$r^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

例 2：函数

$$V(x,y)=\frac{x^2}{1+x^2}+y^2$$

在 (x,y) 的全平面上是正定的，但没有无限大的性质，因为在 $y=0$ 的情况下，令 $x\to\infty$（即沿着 x 轴趋于无穷大时），

$$V(x,y)\to 1.$$

具有无穷大性质的正定函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$ 的位曲面

$$V(x_1,\cdots,x_n)=c\ (\text{常量})$$

是有界的.

事实上,根据假定函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$ 具有无限大的性质,因此对于任意给定的位曲面 $V=c$ (c 是大于零的有限值),总可找到半径为 R 的球,在这个球的外面将有 $V(x_1, \cdots, x_n)>c$,因此曲面 $V(x_1, \cdots, x_n)=c$. 将位于这个球内. 也就是说曲面 $V(x_1, \cdots, x_n)=c$ 不会出现跑到无穷远处的分支.

(2) 全局稳定性的基本定理(巴尔巴欣-克拉索夫斯基定理)

定理 3.4: 如果存在正定的、具有无限大性质的函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$,它关于 t 的由系统 (1.11) 所构成的全导数

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}X_s(x_1, \cdots, x_n)$$

在全相空间是负定的,则 (1.11) 的零解在任意初始扰动下是稳定的.

这个定理是下面的更一般定理的特殊情形. 现在我们来叙述并证明更一般的定理.

定理 3.5: 如果对于扰动运动的微分方程组 (1.11)

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s(x_1, \cdots, x_n)$$

存在正定的、具有无限大性质的函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$,使得

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}X_s(x_1, \cdots, x_n)\leqq 0,$$

且在集合 $\dot{V}=0$ 上除平凡解 $O(0, \cdots 0)$ 外,不包含 (1.11) 的整条轨线,则 (1.11) 的零解是全局稳定.

证: 设 x_0 是相空间 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的任意一点,从点 x_0 引出 (1.11) 的半轨线 $x=x(t; x_0)$ $(t>0)$,因为由假设

$$\dot{V}=\frac{dV}{dt}\leqq 0,$$

则有 $V(x(t, x_0))\leqslant V(x_0)$. 既然集合 $V(x)\leqslant V(x_0)$ 是有界,根据函数 $V(x)$ 具有无限大的性质得出半轨线 $x=x(t, x_0)$ $(t>0)$ 一定位于有界区域内,因此存在半轨 $x=x(t, x_0)$ $(t>0)$ 的 ω

极限点集 Ω. 往下的证明恰好与定理 3.3 的证明一样. 因为在证明中重要之点是：非空的 ω 极限点集合 Ω 的存在性，这点已由集合 $V(x) \leqslant V(x_0)$ 的有界性得到.

由此可以获得这样的启发，也可以写出下面的定理 3.6. 这里加上了系统 (1.11) 的所有正半轨线都是有界的条件，而对函数 V 在无穷远处的性质不附加补充的要求.

定理 3.6： 如果存在正定函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$，使得

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s(x_1, \cdots, x_n)$$

在整个相空间是常负的，且集合 $\dot{V} = 0$ 上除点 O 外不包含 (1.11) 的整条轨线，并且系统 (1.11) 的所有正半轨都是有界的（按拉格朗日意义 T-的稳定性），则系统 (1.11) 的零解是全局稳定.

可以举出这样的例子，存在正定函数 V，在全相空间有负定的导数，但并不保证全局稳定性[10].

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} + 2y, \\ \dot{y} = -\dfrac{2y}{(1+x^2)^2} - \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}. \end{cases} \tag{3.13}$$

对此系统而言，我们可以找到函数

$$V(x, y) = \frac{x^2}{1+x^2} + y^2.$$

它在整个 (x, y) 的相平面上是正定的，它的关于 t 的由 (3.13) 构成的全导数

$$\frac{dV}{dt} = -4\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^4} + \frac{y^2}{(1+x^2)^2}\right)$$

在整个相平面上是负定的. 下面我们就来证明 (3.13) 的未被扰动运动不是全局稳定的.

现在我们研究曲线

$$y = 2 + \frac{1}{1+x^2} \tag{3.14}$$

(见图 8)，在曲线 (3.14) 上，微分方程 (3.13) 有下列形式：

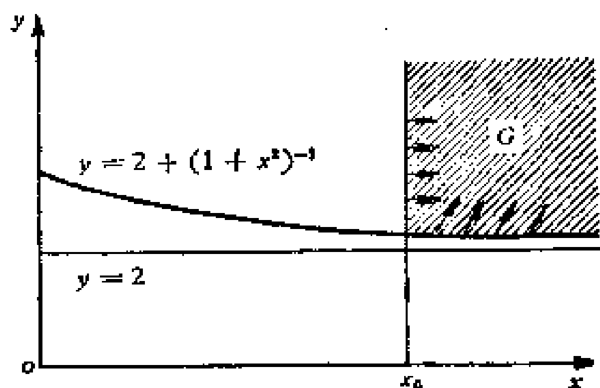


图 8

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2t}{(1+x^2)^2} + 4 + \frac{2}{1+x^2},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{(1+x^2)^2}\left(4 + \frac{2}{1+x^2}\right) - \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

因此在曲线 (3.14) 的点上，由微分方程组 (3.13) 所确定的轨线的切线斜率为

$$k_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2(1+x^2)^2}\left[\frac{1 + \frac{1}{x}\left(2 + \frac{1}{1+x^2}\right)}{1 + \frac{1}{2(1+x^2)} - \frac{x}{2(1+x^2)^2}}\right].$$

另一方面曲线 (3.14) 的切线斜率为

$$k_2 = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

因此当取足够大的正 x 值时，就有

$$k_2 < k_1. \tag{3.15}$$

这就保证了当 x 足够大时，方程组 (3.13) 在曲线

$$y = 2 + \frac{1}{1+x^2}$$

上的方向场，其箭头指向区域 G 内. 这里，区域 G 是由不等式

$$x \geqslant x_0,\quad y \geqq 2 + \frac{1}{1+x^2}$$

所界限. 这里 x_0 取得足够大，以保证在 $x > x_0$ 时不等式 (3.15)

和不等式

$$\frac{2x_0}{(1+x_0^2)^2} < 4$$

同时成立. 此时在区域G的边界直线 $x = x_0$ 上，由于方程组(3.13)，我们有

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=x_0} = \left[-\frac{2x}{(1+x^2)^2} + 4 + \frac{1}{1+x^2}\right]\Bigg|_{x=x_0}$$

$$= -\frac{2x_0}{(1+x_0^2)^2} + 4 + \frac{1}{1+x_0^2} > 0.$$

因此当初始点取在区域G内，由(3.13)所确定的轨线不能跑出区域G，因为它自外往内地交这区域的边界，由此我们得出(3.13)的零解不是全局稳定的.

其所以不能保证全局稳定性，主要是我们对系统(3.13)所引进的函数

$$V(x, y) = \frac{x^2}{1+x^2} + y^2,$$

正如前面在例题 2 中已指出的，即它不具有无限大的性质. 此外还要指出，此定号函数

$$V(x, y) = \frac{x^2}{1+x^2} + y^2 = c \tag{3.16}$$

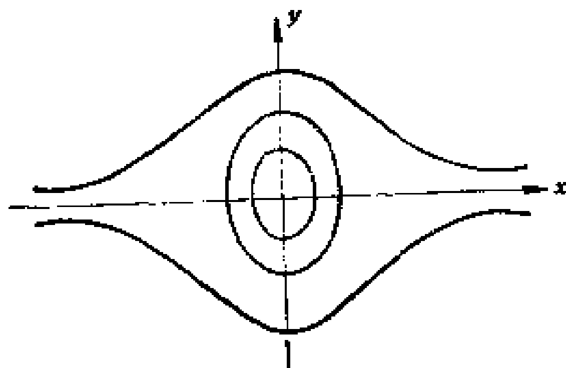


图 9

仅仅在原点的局部范围内，才表示一族包含原点在内、一个包围一个的闭曲线. 也即是当 $c < 1$ 时(3.16)才表示一族、围绕原点的闭曲线. 而当 $c = 1$ 时，(3.16)就表示两条沿着横坐标轴方

向到无穷远去的曲线分支，而且以横轴作为这两支对称曲线的渐近线.

定理 3.7: $V(x)$ 是一个对所有 x 都有连续一阶偏导数的纯量函数. 假设对所有 $x \neq 0$，有 $V(x) > 0$，并且 $\dot{V}(x) \leqslant 0$. 令 E 表示由 $\dot{V}=0$ 所确定的点集，M 是包含在 E 内的最大不变集，则所有的对 $t > 0$ 都是有界的解，当 $t \to \infty$ 时都趋于 M[14].

§4. 关于运动的不稳定性定理

（一）**定理 4.1**：如果对于扰动运动的微分方程 (1.11)

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \cdots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \cdots, n),$$

可以找到函数 $V(x_1 \cdots, x_n)$，它对于时间 t 的由 (1.11) 构成的全导数

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s(x_1, \cdots, x_n)$$

是定号的函数，而函数 V 本身不是具有与 $\frac{dV}{dt}$ 的正负号相反的常号函数，则 (1.11) 的未被扰动运动是不稳定的.

证：设

$$|x_s| \leqslant h \leqslant H \qquad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.1}$$

是函数 $\frac{dV}{dt}$ 的定号区域，我们假设 h 是如此之小，使得在区域 (4.1) 内，我们在前面对 (1.11) 的右端所叙述的条件全都满足. 并且为了确定起见，假定函数 $\frac{dV}{dt}$ 是正定的.

我们来证明，无论数 η 多么小，总可以找到这样的初始值 x_s^0，

$$|x_s^0| \leqslant \eta, \tag{4.2}$$

使得方程 (1.11) 具有这些初始值的解 $x_s(t)$ 在某一时刻越出区域 (4.1). 这样就自然证明了运动的不稳定性. 为此，我们这样来选

择量 x_i^0，使它不仅满足不等式（4.2），而且满足不等式

$$V(x_1^0, \cdots, x_n^0) > 0.$$

这种选择是可能的，因为根据条件，函数 V 不是负常号的函数，因而在无论多么小的原点邻域内，它可以取正值。现在来考察方程（1.11）具有如此选择的初始值的解 $x_s(t)$ $(s = 1, 2, \cdots, n)$. 这个解在某一时刻必然要越出区域（4.1）. 用反证法：假设这个解 $x_s(t)$，在所有 $t > t_0$ 时不越出区域（4.1）. 那末根据 $\frac{dV}{dt}$ 是正定的，即 $V(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 在所有时刻都是增加的，所以我们可以写作

$$V(x_1(t), \cdots, x_n(t)) > V(x_1^0, \cdots, x_n^0). \qquad (4.3)$$

由此必然得到

$$x(t) = \max\{|x_1(t)|, \cdots, |x_n(t)|\} \geqslant \lambda, \qquad (4.4)$$

其中 λ 是某个正数，因为如果我们有 $x(t) < \lambda$，那末对足够小的 λ，不等式（4.3）不能被满足，因为函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$ 是连续的，且在 $x_1 = \cdots = x_n = 0$ 时等于零。由于 $\frac{dV}{dt}$ 是正定的函数，于是由不等式（4.4）得出，对于所论的解 $x_s(t)$，在所有时刻有不等式

$$\frac{dV}{dt} \geqslant l,$$

其中 l 是正数。因此

$$V(x_1(t), \cdots, x_n(t))$$
$$= V(x_1^0, \cdots, x_n^0) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt} dt$$
$$\geqslant V(x_1^0, \cdots, x_n^0) + l(t - t_0).$$

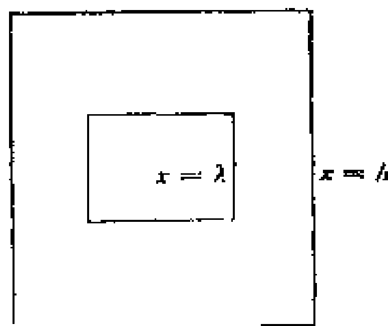


图 10

由此得知，$V(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 将无限增加。然而这就与解 $x_s(t)$ 停留在区域（4.1）内的条件矛盾，因为在这个区域内，连续的函数 V 必然是有限的。这就证明了未被扰动运动的不稳定性。

定理 4.2： 如果对（1.11）存在有函数 V，它对于 t 的由（1.11）

构成的全导数在区域 (4.1) 内有形式

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + w(x_1, \cdots, x_n), \tag{4.5}$$

其中 λ 是正的常数，而 w 或者恒等于零，或者是常号函数，并且在后一情形，V 不是与 w 的正负号相反的常号函数，那末未被扰动运动是不稳定的.

证：为了确定起见，设 $w(x_1, \cdots, x_n)$ 是正的函数，于是由 (4.5) 得到

$$\frac{dV}{dt} \geqslant \lambda V, \tag{4.6}$$

和证明前面定理 (4.1) 时一样，我们来选择解 $x_s(t)$ 的初始值 x_s^0（在 $t = t_0$ 时），使得同时满足不等式

$$|x_s^0| \leqslant \eta, \quad V(x_1^0, \cdots, x_n^0) > 0.$$

其中 η 是任意小的正数. 我们来证明，这个解必然在某一时刻离开区域 (4.1). 用反证法：假定这个解在所有 $t > t_0$ 时都满足 (4.1)，于是在所有时刻都满足不等式 (4.6)，并且因为 $V(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 是正的，导数 $\frac{dV}{dt}$ 在所有时刻都保持是正的，因而，$V(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 是渐增的函数. 于是由 (4.6) 得到

$$\frac{dV}{dt} \geqslant \lambda V(x_1(t), \cdots, x_n(t)) \geqslant \lambda V(x_1^0, \cdots, x_n^0),$$

因而

$$V \geqslant \lambda V(x_1^0, \cdots, x_n^0)(t - t_0).$$

但这是不可能的，因为在区域 (4.1) 内，函数 V 是有限的. 因此对于所论的解，不等式 (4.1) 必然要被破坏，这就证明了未被扰动运动的不稳定性.

这两个不稳定性定理是由 A. M. 李雅普诺夫建立的.

（二）定理 4.1 的几何解释

为了简单起见，取 $n = 2$，我们先考虑函数 $V(x, y)$ 不是定号的情形. 在这种情形，曲线 $V = 0$ 具有一条（图 11）或几条（图 12）实的分支，它们通过坐标原点.

假设导数 $\frac{dV}{dt}$ 是正定的. 根据定理的条件，在坐标原点的附近，必然至少有一个 $V>0$ 的区域. 这些区域显然是被曲线 $V=0$ 所界限的. 在上面二图中，扇形 AOB 就代表了一个这样的区域，并设虚线表示充满了这个区域的 $V=c>0$ 的曲线.

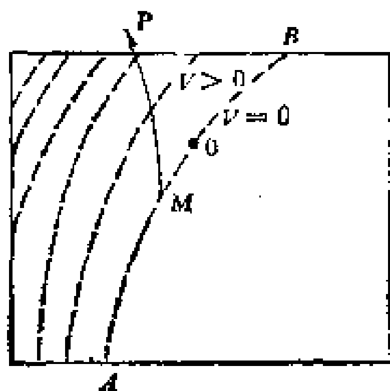


图 11

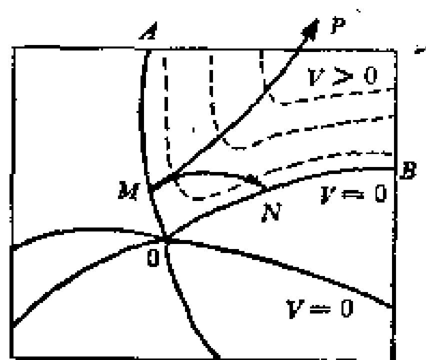


图 12

考虑由区域边界上任一点M出发的积分曲线 MP. M 这一点可以取得任意靠近坐标原点. 因为 $\frac{dV}{dt}>0$，所以这条积分曲线在 t 增加时，必然要进入区域 $V>0$，并在对应于 c 增加的方向与曲线族 $V=c$ 相交，也就是离开边界 $V=0$，只要它不在某一时刻到达区域 $V>0$ 的另一条边界的话，那末积分曲线就逐渐离开坐标原点，最后就越出区域 (4.1). 但是积分曲线要到达另一条边界是不可能的，假使这种情况发生，积分曲线交另一边界于某一点 N（见图 12)，那末在这点显然就有 $\frac{dV}{dt}\leqslant 0$，因为函数 V 由正值变到零，V 必然是减少的. 由此可见，我们有这样的积分曲线，它们由任意靠近坐标原点的点出发，在某一时刻就离开区域 (4.1). 这就得出了运动的不稳定性.

上面是对函数 V 不是定号的情形进行了讨论. 如果 V 是定号的情形，其结果也是一样. 此时坐标原点的全部邻域都是 $V>0$ 的区域.

由上述定理 4.1 的几何解释，立即可作出这个定理的重要推

广. 事实上,在所有前面的推理中,导数 $\frac{dV}{dt}$ 是定号的这个条件没有任何作用. 如果代替定号性的要求而假设 $\frac{dV}{dt}$ 在区域 $V>0$ 的所有点都取正值,那末所有前面的论断仍然是有效的. 这样就导致了下面由 H. Г. 切达耶夫[12]建立的定理.

定理 4.3 (H. Г. 切达耶夫定理): 如果对于扰动运动的微分方程 (1.11), 可以找到这样的函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$, 使得

(i) 在坐标原点的任意小邻域内,存在有 $V>0$ 的区域,在它的边界上 $V=0$;

(ii) 在区域 $V>0$ 的所有点,导数 $\frac{dV}{dt}$ 取正值; 则 (1.11) 的未被扰动运动是不稳定的.

证: 考虑坐标原点的邻域 (4.1)

$$|x_s| \leqslant h \qquad (s=1, 2, \cdots, n),$$

根据定理的条件,如果 h 足够小, 那末在这个邻域内, 就有 $V>0$ 的区域.

考虑具有初始值 $x_s^0=x_s(t_0)$ 的扰动运动的微分方程的解 $x_s(t)$, 我们选择这些初始值 $x_s^0(s=1, 2, \cdots, n)$ 在数值上是任意地小,而且使得

$$V_0=V(x_1^0, \cdots, x_n^0)>0,$$

因为在区域 $V>0$ 内,导数 $\frac{dV}{dt}$ 是正的, 于是函数 $V(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 是增加的. 我们现在来证明解 $x_s(t)$ 一定要在某一时刻越出区域 (4.1).

用反证法: 假定不这样,即解 $x_s(t)$ 无论在什么时刻都不越出由 (4.1) 所定义的区域. 于是在所有时刻就有不等式

$$V(x_1(t), \cdots, x_n(t))>V_0>0.$$

由此根据函数 V 的性质就有

$$\frac{dV(x_1(t), \cdots, x_n(t))}{dt} \geqslant l,$$

其中 l 是某个异于零的正数. 由此不等式即得

$$V(x_1(t), \cdots, x_n(t)) \geqslant V_0 + l(t - t_0),$$

但这是不可能的，因为在区域 (4.1) 内函数 V 是有界的. 由此可见，解 $x_s(t)$ 在某一时刻必然要越出由 (4.1) 所确定的区域，又因量 x_s^0 可选取得任意小，因而未被扰动运动是不稳定的.

下面再介绍一个关于未被扰动运动的不稳定性定理，这个定理是 H. H. 克拉索夫斯基[33]在 1955 年所建立.

定理 4.4 (克拉索夫斯基定理)：如果对扰动运动微分方程 (1.11)，存在函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$，它在坐标原点 o 的任意邻域中不是常负的；并且它关于 t 的由于 (1.11) 构成的全导数

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s(x_1, \cdots, x_n)$$

是常正的；且集合 $\frac{dV}{dt} = 0$ 除坐标原点外不包含 (1.11) 的整条轨线，则 (1.11) 的未被扰动运动是不稳定的.

证：因假定函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$ 不是常负的，所以在原点 o 的任意小的邻域 I_ε 中一定可选取点 $x_0 = (x_{01}, \cdots, x_{0n})$，使得在此点 x_0 上有 $V(x_{01}, \cdots, x_{0n}) = V_0 > 0$，然后根据 $V(x_1, \cdots, x_n)$ 的连续性及 $V(0, \cdots, 0) = 0$，就可取球域 I_η，使在此小球域内的所有点都有不等式

$$|V| < V_0$$

成立. 现在我们就来证明由初始点 x_0 所确定的 (1.11) 的解 $x(t, x_0)$ 在 $t > t_0$ 的某一时刻一定要越出闭球 $\bar{I}_\varepsilon$ 的范围. 用反证法：假设 $x(t, x_0)$ 在所有 $t > t_0$ 时都不越出闭球 $\bar{I}_\varepsilon$ 的范围. 那末由 $\frac{dV}{dt}$ 是常正的假定知

$$V(x(t)) \geqslant V(x_0) > 0,$$

这就保证了点 $x(t, x_0)$ 不可能落在球域 I_η 中，因此对于所有 $t > t_0$ 的时刻点

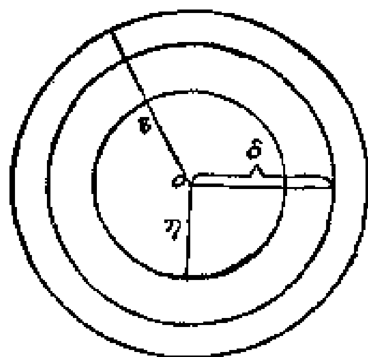


图 13

$x(t, x_0)$ 落在球面层 $l_6—l_7$ 中（图 13），因此点 x_0 的 ω 极限点集合是非空的，并且也将位于这个球面层中．再根据引理 3.1 与 3.2 知

(i) 极限点集 Ω 位于同一张位曲面 $V = c$ 上；

(ii) 且此极限点集 Ω 是闭的，由 (1.11) 的整条轨线组成．

这样一来，在集合 Ω 上就有 $\frac{dV}{dt} = 0$，而这与定理的假设矛盾．所以定理得证．

由此看出，李雅普诺夫所建立的不稳定性定理4.1是此定理的直接推论．

§5. 非驻定运动的情形

前面我们讨论了扰动运动方程的右端不显含时间 t 的情形，这也就是通常所谓驻定的动力系统．同样，对于描绘动力系统的微分方程组的右端，如果是显含时间 t 的话，也就是对这种非驻定的动力系统，李雅普诺夫第二方法仍旧可用来研究未被扰动运动的稳定性问题．因此在叙述李雅普诺夫第二方法的基本定理时，首先要引进一些不同于驻定情形的概念．

考虑在给定区域

$$t \geqslant t_0 > 0, \ |x_s| \leqslant h \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{5.1}$$

内定义的函数 $V(t; x_1, \cdots, x_n)$（这里 t_0 和 h 是常量）．我们假定函数 V 在上述区域内对于所有的变数具有连续的偏导数，而且在 $x_1 = \cdots = x_n = 0$ 时函数 V 取零值．

(一) 基本定义

定义 5.1： 如果对于任一正数 λ，可以找到另一正数 μ，使得对满足不等式

$$t \geqslant t_0, \ |x_s| \leqslant \mu \ (s = 1, 2, \cdots, n)$$

的 $t; x_1, \cdots, x_n$ 的所有值，有不等式

$$|V(t; x_1, \cdots, x_n)| \leqslant \lambda$$

成立，我们就说 V 具有无穷小上界。

换句话说，如果在 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \to 0$ 时，函数 V 对于 t 是一致地趋于零，那末它就具有无穷小上界。

例如，函数

$$V(t;\ x_1,\ \cdots,\ x_n) = (x_1 + \cdots + x_n)\sin t$$

就具有无穷小上界，而函数

$$V(t; x_1,\ \cdots,\ x_n) = \sin\left[t(x_1 + \cdots + x_n)\right]$$

就不具有这种性质，虽然它是有界的。

定义 5.2: 如果在 t_0 足够大而 h 足够小时，函数 V 在区域 (5.1) 内取一确定符号的值，或取零值，那末我们称 V 是常号的。由此可见，对于依赖于 t 的函数，其常号性的定义与不依赖于 t 的函数是一样的。但关于定号性的概念就略有不同。

定义 5.3: 如果函数 $V(t;\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 在区域 (5.1) 内，而当 t_0 足够大而 h 足够小时，满足不等式

$$V(t;\ x_1,\ \cdots, x_n) \geqslant w(x_1,\ \cdots,\ x_n), \tag{5.2}$$

其中 $w(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 是不依赖于 t 的正定的函数，那末我们称 V 是正定的。

类似地，如果在同样的条件下，函数 $V(t;\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 满足不等式

$$V(t;\ x_1,\ \cdots,\ x_n) \leqslant -w(x_1,\ \cdots,\ x_n),$$

我们就称 V 是负定的。

由此可见，对于依赖于 t 的函数，在区域 (5.1) 内不变为零并不是定号性的充分条件。例如函数

$$V(t;\ x_1,\ \cdots,\ x_n) = e^{-t}(x_1^2 + \cdots + x_n^2),$$

虽然它只在 $x_1 = \cdots = x_n = 0$ 时才取零值，但它不是定号的，因为在一定的 $x_1,\ \cdots,\ x_n$ 时，它在 $t \to \infty$ 时趋近于零，因而不能满足不等式 (5.2)。相反，函数

$$V_1(t;\ x_1,\ \cdots,\ x_n) = (2 + \sin t)\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

$$V_2(t;\ x_1, \cdots, x_n) = (-2 + \sin t)\sum_{s=1}^{n} x_s^2$$

都是定号的，而且第一个是正定的，而第二个是负定的，这是因为

$$V_1(t;\ x_1, \cdots, x_n) \geqslant \sum_{s=1}^{n} x_s^2;$$

$$V_2(t;\ x_1, \cdots, x_n) \leqslant -\sum_{s=1}^{n} x_s^2.$$

容易作出依赖于 t 的定号函数的几何解释．为此考虑变数 $x_1, \cdots, x_n$ 的空间，并将 t 视作参数作出曲面族 $V(t;\ x_1, \cdots, x_n) = c$.

设 c_1 是任一足够小的 c 值，于是方程 $V = c_1$ 在每一个 t 值时就表示一包围坐标原点的封闭曲面．给 t 以所有可能的值，就得到一曲面族，我们可以把它看成是一个运动的曲面．

另外我们再考虑不动曲面 $w(x_1, \cdots, x_n) = c_1$．设 V 是正定函数．容易看出，曲面 $V = c_1$ 在其运动过程中，在所有时刻都在曲面 $w = c_1$ 之内．事实上，在 w 取值 c_1 的所有点上，根据 (5.2)，函数 V 取大于或等于 c_1 的数值，因而，所有这些点将在曲面 $V = c_1$ 之外或在其上．

如果函数 V 除了是定号的以外，还具有无穷小的上界，那末曲面 $V = c_1$ 在运动时将总在坐标原点的某一足够小的邻域之外．事实上，如果上述曲面在任一时刻与坐标原点的任意小的邻域相交，那末这就表示，在这个时刻 t，在这个曲面上有这样的点，它们满足不等式

$$|x_s| \leqslant \mu (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{5.3}$$

其中 μ 是任意小的正数．但因 V 具有无穷小的上界，于是在满足 (5.3) 和在任何 $t > t_0$ 时，只要 μ 足够地小，它就可任意地小，因而就小于 c_1．这就表明只要 μ 足够地小，曲面 $V = c_1$ 的所有点都在区域 (5.3) 之外．

（二）非驻定运动的基本定理

现在转入讨论对于非驻定运动情况下的李雅普诺夫第二方法

的基本定理.

设扰动运动的微分方程具有形式

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s(t;x_1,\cdots,x_n)\qquad(s=1,2,\cdots,n),\tag{5.4}$$

其中函数 X_s 定义在区域

$$t\geqslant t_0,\ |x_s|\leqslant H\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{5.5}$$

内.我们假定在上述区域内,函数 X_s 是连续的, $X_s(t,0,\cdots,0)=0$, 并满足关于变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的李浦希兹条件,以保证方程(5.4)有唯一的满足给定初始条件的解存在.

定理 5.1: 如果对于扰动运动的微分方程(5.4)可以找到定号函数 $V(t;x_1,\cdots,x_n)$, 它对于时间 t 的由(5.4)构成的全导数

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}X_s(t;x_1,\cdots,x_n)\tag{5.6}$$

是正负号与 V 相反的常号函数,或者恒等于零,则(5.4)的未被扰动运动(即平凡解 $x_1=\cdots=x_n=0$)是稳定的.

证: 为了确定起见,设 V 是正定的函数,因此存在有足够大的数 t_0 和足够小的数 $h\leqslant H$, 使得在区域

$$t\geqslant t_0,\ |x_s|\leqslant h\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{5.7}$$

内满足不等式

$$V(t;x_1,\cdots,x_n)\geqslant w(x_1,\cdots,x_n).\tag{5.8}$$

其中 w 是某个与 t 无关的正定函数. 此外在同一区域内,算式(5.6)只能取负值或者等于零.

设 ε 是任意小的正数,我们假设在所有场合 $\varepsilon<h$. 考虑由关系式

$$x=\max\{|x_1|,\cdots,|x_n|\}=\varepsilon\tag{5.9}$$

联系的量 $x_1,\cdots,x_n$ 的所有可能值的集合,并用 l 表示函数 w 在这个条件下的下确界. 由于 w 的定号性,数 l 是异于零的正数. 根据(5.8)

$$\text{当 } x=\varepsilon \text{ 时},\ V(t;x_1,\cdots,x_n)\geqslant l.\tag{5.10}$$

现将量 x_s 看成是满足扰动运动微分方程组(5.4)的时间 t 的

函数．假定这些函数在 $t=t_0$ 时的初始值 x_s^0，按照不等式

$$|x_s^0| \leqslant \eta \tag{5.11}$$

来选择，而且 η 是如此之小，使得

$$V(t_0; x_1^0, \cdots, x_n^0) < l. \tag{5.12}$$

因为 $V(t_0; 0, \cdots, 0)=0$，再注意 $V(t_0; x_1, \cdots, x_n)$ 的连续性就可以断定这样选择 η 是完全办得到的．

我们假定在任何情形下，取数 $\eta<\varepsilon$．于是在初始时刻满足的不等式

$$|x_s| < \varepsilon \quad (s=1, 2, \cdots, n), \tag{5.13}$$

至少在 $t-t_0$ 充分小时仍旧成立，这是因为函数 $x_s(t)$ 随着时间连续变化的缘故．

往下我们来证明，不等式 (5.13) 对所有 $t>t_0$ 都成立．

事实上，如果不等式 (5.13) 在某一时刻被破坏了，那末就必然有这样一个时刻 $t=T$，此时不等式 (5.13) 中至少有一个变成了等式．换句话说，我们将有

$$x(T)=\max\{|x_1(T)|, \cdots, |x_n(T)|\}=\varepsilon.$$

因而根据 (5.10) 就有

$$V(T; x_1(T), \cdots, x_n(T)) \geqslant l. \tag{5.14}$$

另一方面，因为 $\varepsilon<h$，于是在整个 (t_0, T) 的时间区间内，不等式 (5.7) 成立，因而在这个时间区间 (t_0, T) 内，$\frac{dV}{dt} \leqslant 0$．这就给出

$$V(T; x_1(T), \cdots, x_n(T)) \leqslant V(t_0; x_1^0, \cdots, x_n^0),$$

根据 (5.12)，这与 (5.14) 矛盾．因此，不等式 (5.13) 必然在所有 $t>t_0$ 的时刻都成立，这就得到了未被扰动运动的稳定性结论．

和在驻定运动的情况一样，上面证明的定理5.1 有其简单的几何解释．为此我们考虑在变数 $x_1, \cdots, x_n$ 的空间内的区域 $|x_s| \leqslant \varepsilon$（见图 14）．我们选择 c 如此之小，使得封闭曲面

$$w(x_1, \cdots, x_n)=c$$

完全在上述区域之内．然后考虑运动的曲面

$$V(t; x_1, \cdots, x_n)=c.$$

前面已经指出，这个曲面在任何时刻都在曲面 $w=c$ 内，因而也就在区域 $|x_s|<\varepsilon$ 之内. 假定 $(x_1, \cdots, x_n)$ 这一点(它的运动由方程 (5.4) 决定) 在任一时刻是在曲面 $V=c$ 以内. 那末它在所有时刻都将停留在这个曲面以内。事实上，如果它要由里向外地离开，那末在它与上述曲面相交的一刻，在相交点的导数 $\frac{dV}{dt}$ 就是正的，这就违背了定理的条件. 由此就直接得出，由完全在曲面

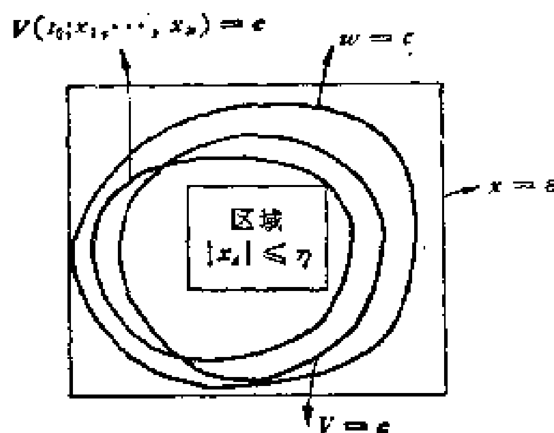


图 14

$$V(t_0;x_1, \cdots, x_n)=c$$

之内的区域 $|x_s|\leqslant\eta$ 内开始的任何运动，将永远停留在区域 $|x_s|<\varepsilon$ 之内.

定理 5.2: 如果在满足定理 5.1 的条件下，导数 $\frac{dV}{dt}$ 是定号的，而且函数 V 本身具有无穷小上界，那末未被扰动运动是渐近稳定的.

证: 设 V 是正定的函数，因而 $\frac{dV}{dt}$ 就是负定的. 于是在区域 (5.7) 内不但不等式 (5.8) 成立，而且不等式

$$\frac{dV}{dt}\leqslant -w_1(x_1, \cdots, x_n) \tag{5.15}$$

也成立. 这里 w_1 是不依赖于 t 的正定的函数.

我们把量 x_s 看作是时间的函数，它们满足扰动运动的微分方程 (5.4)，并假设这些量的初始值 $x_s^0=x_s(t_0)$ 满足不等式 (5.11). 因为未被扰动运动在这个情况总归是稳定的，因此我们可以把量 η 选得如此之小，使得在所有 $t>t_0$ 时，量 x_s 总是在区域 (5.7) 内. 于是根据 (5.15)，函数 $V(t;x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 的导数在任何时刻都是负的，因而随着 t 的无限增长，这个函数就趋近于某一极

限，但在任何时刻都大于这个极限. 我们来证明这个极限等于零. 假定不是这样，即假定这个极限等于某个异于零的正数 α. 于是在所有 $t > t_0$ 时有不等式

$$V(t;\ x_1(t),\ \cdots,\ x_n(t)) > \alpha \tag{5.16}$$

成立.

因为 V 具有无穷小的上界，因而由这个不等式就得

$$x(t) = \max\{|x_1(t)|,\ \cdots,\ |x_n(t)|\} \geqslant \lambda, \tag{5.17}$$

其中 λ 是某个足够小的正数. 实际上如果这样的数 λ 不存在，也就是说，如果量 $x(t)$ 可以小于任意小的数，那末根据无穷小上界的定义，函数 $V(t;\ x_1(t),\ \cdots,\ x_n(t))$ 也将可以是任意地小，这就和不等式 (5.16) 矛盾.

但是如果在所有 $t > t_0$ 时，有不等式 (5.17) 成立，那末 (5.15) 表明在所有时刻就亦有不等式

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -l_1$$

成立，这里 l_1 是异于零的正数，它乃是函数 $w_1(x_1(t),\ \cdots,\ x_n(t))$ 在条件 (5.17) 下的下确界. 这样在所有 $t > t_0$ 时，我们就有

$$V(t;\ x_1(t),\ \cdots,\ x_n(t)) = V(t_0;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\, dt \leqslant V(t_0;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0) - l_1(t - t_0).$$

这显然与 (5.16) 矛盾. 这个矛盾就表明在 t 无限增加时，函数 $V(t;\ x_1(t),\ \cdots,\ x_n(t))$ 是趋近于零的，因而对于函数 $w(x_1(t),\ \cdots,\ x_n(t))$ 也有同样的结果，由此就直接得出

$$\lim_{t\to\infty} x_s(t) = 0 \qquad (s = 1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

定理得证.

定理 5.3: 如果存在具有无穷小上界的函数 $V(t;\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$，它对于时间 t 的由扰动运动方程构成的全导数 (5.6) 是定号的函数，而函数 V 本身在任意小的 x_s 值和任意大的 t 值时，可以取与导数有相同正负号的值，则未被扰动运动是不稳定的.

证：为确定起见，设导数 $\frac{dV}{dt}$ 是正定的. 于是在区域

$$t \geqslant t_0 > 0, \qquad |x_s| \leqslant h \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{5.18}$$

内有不等式

$$\frac{dV}{dt} \geqslant w(x_1, \cdots, x_n), \tag{5.19}$$

其中 $w(x_1, \cdots, x_n)$ 是不依赖于 t 的正定的函数.

设 η 是任意小的正数. 考虑扰动运动方程的解 $x_s = x_s(t)$，它的初始值 $x_s^0 = x_s(t_0)$ 是按照条件

$$|x_s^0| \leqslant \eta, \qquad V(t_0; x_1^0, \cdots, x_n^0) > 0$$

来选取的.

根据定理的条件，无论数 η 多么小，这样选取量 x_s^0 是可能的. 我们来证明所论的解必然要在某一时刻越出区域 (5.18).

事实上，如果这个解在所有时刻都留在区域 (5.18) 内，于是根据 (5.19)，函数 $V(t; x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 的导数在任何情况都是正的，因而我们有

$$V(t; x_1(t), \cdots, x_n(t)) > V(t_0; x_1^0, \cdots, x_n^0), \tag{5.20}$$

因为 V 具有无穷小的上界，于是由 (5.20) 得出

$$x(t) = \max\{|x_1(t)|, \cdots, |x_n(t)|\} \geqslant \lambda, \tag{5.21}$$

其中 λ 是足够小的正数. 但由 (5.19) 就得出

$$\frac{dV(t; x_1(t), \cdots, x_n(t))}{dt} \geqslant l, \tag{5.22}$$

其中异于零的正数 l 是函数 $w(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 在条件 (5.21) 下的下确界.

不等式 (5.22) 给出

$$V(t; x_1(t), \cdots, x_n(t)) = V(t_0; x_1^0, \cdots, x_n^0) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt} dt \geqslant V(t_0; x_1^0, \cdots, x_n^0) + l(t - t_0),$$

但这是不可能的，因为函数 V 既然具有无穷小的上界，那末在任何场合都是有限的.

由这个矛盾得知解 $x_s = x_s(t) \qquad (s = 1, 2, \cdots, n)$ 在某一

时刻必然要越出与初始值 x_s^0 无关的区域 (5.18), 又因这些初始值是任意地小,因而未被扰动运动是不稳定的. 定理得证.

上述就是李雅普诺夫针对非驻定运动情形所建立起的关于未被扰动运动稳定和不稳定性的三个定理. 其中最后一个关于不稳定性的定理有一极大的缺点, 就是要求函数 V 必须在全部区域 (5.18) 内具有一定的性质. 特别是在全部区域内, 导数 $\frac{dV}{dt}$ 必须是正定的, 这就表示在区域 (5.18) 内的所有的积分曲线必须在一定的边上与曲面 $V = c$ 相交. 不过在运动是不稳定的场合, 为了发现运动的不稳定性,只要在坐标原点任意小的邻域内,发现即使一条不稳定的积分曲线就够了. 而为了发现这种积分曲线, 又只需要知道积分曲线在区域(5.18)的某些部分内而非全部区域内的性质就够了. 作出这个研究工作的是 Н. Г. 切达耶夫. 下面就来叙述证明切达耶夫定理.

在变数 $x_1, \cdots, x_n$ 的空间的坐标原点邻域

$$|x_s| \leqslant h \qquad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{5.23}$$

内, 任何由曲面 $V = 0$ 界限的, 函数 V 在其内取正值的区域称为 $V > 0$ 的区域.

假设函数 V 具有下列性质:

(1) 在任意大的 t 值和任意小的坐标原点邻域内, 存在有 $V > 0$ 的区域;

(2) 在区域 $V > 0$ 内,函数 V 是有界的;

(3) 在区域 $V > 0$ 内, 由扰动运动方程构成的全导数 $\frac{dV}{dt}$ 取正值,而这时对于所有由关系式

$$V(t; x_1, \cdots, x_n) > \alpha$$

联系的 $t; x_1, \cdots, x_n$ 的值(α 是任何正数),有不等式 $\frac{dV}{dt} \geqslant l$, 其中 l 是某个与 α 有关的正数.

定理 5.4 (切达耶夫定理): 如果对于扰动运动的微分方程 (5.4)

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t; x_1, \cdots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \cdots, n),$$

可以找到满足上述条件 1), 2), 3) 的函数 $V(t; x_1, \cdots, x_n)$, 则 (5.4) 的未被扰动运动是不稳定的.

证: 坐标原点的邻域是 (5.23), 根据定理的条件, 如果 h 足够小,那末在这个邻域内就有 $V > 0$ 的区域. 在这个 $V > 0$ 的区域内,都有任意接近坐标原点的点.

考虑具有初始值 $x_s^0 = x_s(t_0)$ 的方程 (5.4) 的解 $x_s(t)$, 我们选取这些初始值,在数值上是任意地小,而且使得

$$V(t_0; x_1^0, \cdots, x_n^0) = V_0 > 0.$$

因为在区域 $V > 0$, 导数 $\frac{dV}{dt}$ 为正,于是函数 $V(t; x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 是增加的,因而至少在不等式 (5.23) 未破坏时, 量 $x_s(t)$ 将停留在区域 $V > 0$ 内.

我们来证明: 不等式 (5.23) 在某一时刻是要被破坏的. 假定不是这样,而设不等式 (5.23) 无论什么时候都不被破坏. 于是在所有时刻就有

$$V(t; x_1(t), \cdots, x_n(t)) > V_0,$$

由此根据函数 v 的性质知

$$\frac{dV(t; x_1(t), \cdots, x_n(t))}{dt} \geqslant l, \qquad (5.24)$$

其中 l 是某个异于零的正数. 由 (5.24) 得出

$$V(t; x_1(t), \cdots, x_n(t)) \geqslant V_0 + l(t - t_0),$$

但这是不可能的,因为函数 V 在区域 $V > 0$ 内是有界的. 因此可见,解 $x_s(t)$ 在某一时刻必然要越出区域 (5.23), 又因量 x_s^0 可以选取得任意小,因而未被扰动运动是不稳定的.

第二章　李雅普诺夫函数的存在性

§1. 在渐近稳定情形中关于周期系统及定常系统运动的李雅普诺夫函数的存在问题

考虑

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s(t;\ x_1,\ \cdots,\ x_n)\qquad (s=1,2,\cdots,n),\quad (1.1)$$

这里假定方程的右端是 t 的周期函数，其周期为 ω，且在区域 $t\geqslant 0$, $|x_s|\leqslant H$ $(s=1,2,\cdots,n)$ 中函数 X_s 对变量 x_s 具有连续的一阶偏导数。

令

$$x_s=\varphi_s(t;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0,t_0)\qquad (s=1,2,\cdots,n)$$

是方程 (1.1) 的解，它由初始条件

$$\varphi_s(t_0;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0,t_0)=x_s^0$$

所确定。

根据解对初值的连续依赖性定理[3]知、对所有在区域 $|t_0|\leqslant \omega$, $|x_s^0|\leqslant h<H$ 中的这些变量以及满足条件 $|\varphi_s|\leqslant H$ 的所有 t 值，函数 φ_s 具有对变量 $t_0;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0$ 的连续一阶偏导数，又由于 φ_s 本身的定义得出，对每一个 t_1 及 $t_2>t_1$ 有下面恒等式

其中

$$\left.\begin{aligned}x_s''=\varphi_s(t_2;\ x_1'\cdots,\ x_n',\ t_1)=\varphi_s(t_2;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0,\ t_0),\\ x_s'=\varphi_s(t_1;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0,\ t_0).\end{aligned}\right\}(1.2)$$

实际上，动点 $(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 在时刻 t_0 由位置 $(x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0)$ 出发，在时刻 t_1 到达位置 $(x_1',\ \cdots,\ x_n')$，同时，另外一点在该时刻 t_1 由位置 $(x_1',\ \cdots,\ x_n')$ 出发，在 t_2 时刻则到达位置 $(x_1'',\ \cdots,\ x_n'')$，因

为初始条件唯一地确定了运动.

此外,因方程 (1.1) 将 t 换为 $t+\omega$ 时并不改变,故也有下面的恒等式:

$$\begin{aligned}\varphi_s\ (t \pm m\omega,\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0,\ t_0 \pm m\omega)\\ = \varphi_s(t;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0,\ t_0),\end{aligned} \tag{1.3}$$

其中 m 为任意整数.

今设 (1.1) 的未被扰动运动(即 $X(0,\ \cdots,\ 0,\ t) = 0,\ t \geqslant 0$) 是渐近稳定的,那末在下面区域中

$$|x_s^0| \leqslant \alpha, \tag{1.4}$$

其中 α 是充分小的正数,满足条件

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_s(t;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0,\ t_0) = 0, \tag{1.5}$$

J. L. 马塞尔 (Massera)[4] 证明了这个关系式对变量 x_s^0 是一致地满足,即对于任意的 ε,无论它多么小,可以找到这样一个不依赖 x_s^0 的 $T(\varepsilon)$,对所有 $t > T$ 时,有不等式 $|\varphi_s(t;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0,\ t_0)| < \varepsilon$.

为了证明,首先由条件

$$|\varphi_s(t;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0,\ 0)| < \varepsilon,\ \text{当}\ |x_s^0| < \eta(\varepsilon) \tag{1.6}$$

来确定数 $\eta(\varepsilon)$. 由于未被扰动运动是稳定的,所以这件事情总是办得到的. 现在我们就来证明上面指出的数 $T(\varepsilon)$ 是存在的. 用反证法. 假如上面所指的 $T(\varepsilon)$ 不存在,则不论整数 m 有多么大,总能找到这样的 $t_m > m\omega$ 及一组在域 (1.4) 中的初始值 x_{sm}^0,使得

$$\begin{aligned}\varphi = \max\{|\varphi_1(t_m;\ x_{0m}^0,\ \cdots,\ x_{nm}^0,\ 0)|,\\ \cdots,\ |\varphi_n(t_m;\ x_{1m}',\ \cdots,\ x_{nm}',\ 0)|\} \geqslant \varepsilon.\end{aligned} \tag{1.7}$$

因为点列 $\{x_{sm}^0\}$ 在闭域 (1.4) 中,故其极限点必在这个域中. 设其为点 x_s^*,因此对这一点满足关系式 (1.5),由它得出,存在如此充分大的整数 N,使得有不等式

$$|\varphi_s\ (N\omega,\ x_1^*,\ \cdots,\ x_n^*,\ 0)| < \frac{1}{2}\eta(\varepsilon), \tag{1.8}$$

而这时可找到任意大的 m,对它有不等式

$$|x_s^{(N)}| = |\varphi_s(N\omega,\ x_{1m}^0,\ \cdots,\ x_{nm}^0,\ 0)| < \eta(\varepsilon). \tag{1.9}$$

实际上，在点列 $\{x_{sm}^0\}$ 中可以找到具有任意大的指数 m 的点，它们与极限点如此地接近，使得差

$$\varphi_s(N\omega,\ x_{1m}^0,\ \cdots,\ x_{nm}^0,\ 0)-\varphi_s(N\omega,\ x_1^*,\ \cdots,\ x_n^*,\ 0)$$

由于 φ_s 的连续性是小于 $\frac{\eta}{2}$. 由 (1.9) 与 (1.6) 得出，对所有 $t>0$

$$|\varphi_s(t;\ x_1^{(N)},\ \cdots,\ x_n^{(N)},\ 0)|<\varepsilon,$$

再注意到 (1.3) 与 (1.2)，

$$\begin{aligned}\varepsilon &> |\varphi_s(t,\ x_1^{(N)},\ \cdots,\ x_n^{(N)},\ 0)|\\ &=|\varphi_s(t+N\omega,\ x_1^{(N)},\ \cdots,\ x_n^{(N)},\ N\omega)|\\ &=|\varphi_s(t+N\omega,\ x_{1m}^0,\ \cdots,\ x_{nm}^0,\ 0)|,\end{aligned}$$

这个不等式与 (1.7) 是矛盾的，因为存在这样的 t_m 使得 $t_m>m\omega$. 这个矛盾证明了关系式 (1.5) 对量 x_s^0 是一致地满足的这个论断成立.

现在来证明关系式

$$\lim_{t\to\infty}\varphi_s(t;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0,\ t_0)=0\qquad(s=1,\ 2,\cdots,n)\quad(1.10)$$

对于在区域

$$|x_s^0|\leqslant\beta,\ 0\leqslant t_0\leqslant\omega\qquad(1.11)$$

中的量 x_s^0 及 t_0 (其中 β 是充分小的数)，也是一致地满足.

事实上，由于 (1.2)，有恒等式

$$\varphi_s(t;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0,\ t_0)=\varphi_s(t;\ x_1',\ \cdots,\ x_n',\ 0),$$

其中量 x_s' 由方程

$$x_s^0=\varphi_s(t_0;\ x_1',\ \cdots,\ x_n',\ 0)\qquad(1.12)$$

来确定.

因此，现在可由已证明的关系式 (1.5) 的论断直接得出我们有兴趣的论断. 只要在 (1.11) 中量 β 取得这样小的值，它使得用方程 (1.12) 决定出的量 x_s' 对所有的 $0\leqslant t_0\leqslant\omega$ 都在域 (1.4) 中即可.

定理 (J. L. 马塞尔)[1]: 如果扰动运动的微分方程形如(1.1)，并且未被扰动运动是渐近稳定的，则存在正定函数 $V(t;\ x_1,\ \cdots,$

x_n)，且由这些方程构成的导数 $\frac{dV}{dt}$ 是负定函数。这时 V 是 t 的周期函数，周期为 ω。特别是当 t 不明显地含于函数 X_s 中时，则 V 不依赖于 t。

证： 以 $\psi(t)$（其中 $t \geqslant t_0$）表示函数

$$\varphi(t;\ x_1^0,\ \cdots,x_n^0,\ t_0)$$
$$= \sum_{s=1}^{n} \varphi_s^2(t;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0,\ t_0) = \sum_{s=1}^{n} x_s^2$$

的上确界，其中变量 x_s^0, t_0 在区域 (1.11) 中变动. 因而当

$$|x_s^0| \leqslant \beta,\ \ 0 \leqslant t_0 \leqslant \omega,\ \ t_0 \leqslant t,$$
$$\varphi(t;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0, t_0) \leqslant \psi(t), \tag{1.13}$$

函数 $\varphi(t)$ 显然是正的. 此外

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0. \tag{1.14}$$

实际上，设 ε 为任意小的正数，选取 $T(\varepsilon)$ 如此地大，使得对 $t > T$ 以及所有在域 (1.11) 中的 x_s^0, t_0 的值都满足不等式

$$\varphi(t;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0,\ t_0) < \varepsilon, \tag{1.15}$$

根据前面的证明这总是可能的. 因 $\psi(t)$ 是连续函数在闭域 (1.11) 中的上确界，故它必然是该函数在所指闭域中所取得的某一个值. 换句话说，在域 (1.11) 中存在一组数 $\bar{x}_s^0$ 及 $\bar{t}_0$，对它们有

$$\varphi(t;\ \bar{x}_1^0,\ \cdots,\ \bar{x}_n^0,\ t_0) = \psi(t),$$

故由 (1.15) 得，当 $t > T$ 时，$\psi(t) < \varepsilon$，这就证明了我们的论断.

今考察由下式所确定的函数

$$V(x_1,\ \cdots,\ x_n;\ t) = \int_t^\infty G[\varphi(\tau;\ x_1,\ \cdots,\ x_n,\ t)]d\tau, \tag{1.16}$$

此地 $G(\eta)$ 为 η 定义于 $\eta \geqslant 0$ 时的某一函数，当 $\eta > 0$ 时只取正的值，当 $\eta = 0$ 时它与其导数 $G'(\eta)$ 同时等于零. 此外，这个函数具有下面性质，积分

$$\int_0^\infty G[\psi^*(t)]dt \tag{1.17}$$

对任何满足不等式 $\psi^*(t) < \psi(t)$ 的正函数 $\psi^*(t)$ 都是收敛的，

并且对函数 $\psi^*(t)$ 的选取一致收敛。

下面证明函数 $G(\eta)$ 的确是可以作出来的.

首先证明函数 V 在域

$$|x_s| \leqslant \beta, \quad t \geqslant 0 \tag{1.18}$$

中所有的点都确实存在并且连续.

实际上,设 x_s 及 t 在域 (1.18) 中, $\tau \geqslant t$, $\tau' = \tau - m\omega \geqslant t - m\omega$, 其中 m 是一个整数, 使得 $0 \leqslant t - m\omega < \omega$. 那末根据 (1.3) 我们可以写出:

$$\varphi(\tau;\ x_1,\ \cdots,\ x_n;\ t) = \varphi(\tau';\ x_1,\ \cdots,x_n;\ t - m\omega) = \psi^*(\tau'),$$

并且函数 $\psi^*(\tau')$ 对于域 (1.13) 中任意的 t 及 x_s, 由于 (1.13) 而满足不等式 $\psi^*(\tau') \leqslant \psi(\tau')$. 在 (1.16) 中引入变量 τ' 代替积分变量 τ, 有

$$V(x_1,\ \cdots,\ x_n;t) = \int_{t-m\omega}^{\infty} G[\psi^*(\tau')]d\tau'. \tag{1.19}$$

但由于函数 G 的选择, 在 (1.19) 中的积分对于 $\psi^*(\tau')$ 是一致收敛的, 即对于在域 (1.18) 中的 x_s, 及 t 是一致收敛的. 故由此推出,在区域 (1.18) 中函数 V 存在并且连续.

求出 V 对 t 及 x_s 的偏导数,在积分符号下作微分运算,得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x_s} &= \int_t^{\infty} G'[\varphi(\tau;\ x_1,\ \cdots,\ x_n;\ t)] \\ &\quad \times \frac{\partial \varphi(\cdot;\ x_1,\ \cdots,\ x_n;\ t)}{\partial x_s}\, d\tau, \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= -G[\varphi(t;\ ,\ x_1,\ \cdots,\ x_n;\ t)] \\ &\quad + \int_t^{\infty} G'[\varphi(\tau;\ x_1,\ \cdots,\ x_n;\ t)] \\ &\quad \times \frac{\partial \varphi(\tau;\ x_1,\ \cdots,\ x_n;\ t)}{\partial t}\, d\tau.\end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

不过欲使这些式子确定表示函数 V 在域 (1.18) 中的偏导数, 必须要使引入的积分收敛, 并且对所有在所指域中的 x_s 及 t 是一致收敛的. 为此必须对函数 G 再加上一个条件, 它可以由下面方式得到.

由于加给方程 (1.1) 右端的条件，对所有左域 $|x_s^0| \leqslant \beta$，$0 \leqslant t_0 \leqslant \omega$，$t_0 \leqslant t$ 中的变量的值，偏导数

$$\frac{\partial \varphi(t; x_1^0, \cdots, x_n^0; t_0)}{\partial x_s^0}, \quad \frac{\partial \varphi(t; x_1^0, \cdots, x_n^0; t_0)}{\partial t_0}$$

是存在的且连续，这是因为由于稳定性，对所指的变量值，函数 φ_s 将停留在函数 X_s 的定义域中，故我们对任何 t 可以规定这些导数的某个正的上界 $M(t)$，这时我们可以假定函数 $M(t)$ 是连续的，并且当 t 增大时它不减小. 那末如果使得积分

$$\int_0^\infty G'[\psi^*(\tau)]M(\tau)\,d\tau \tag{1.21}$$

对于任选的 $\psi^*(\tau)$ 是收敛的，其中 $\psi^*(\tau) < \psi(\tau)$，并使得收敛对于 $\psi^*(\tau)$ 是一致的，则 (1.20) 中积分在域 (1.18) 中一致收敛. 我们将假设函数 $G(\eta)$ 的确满足上面所指的条件. 那末函数与其一阶偏导数在域 (1.18) 中的一切点是有定义的，而且是连续的.

仔细地考察函数 V 的性质. 由于 (1.3) 有：

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n; t+\omega) = \int_{t+\omega}^\infty G[\varphi(\tau; x_1, \cdots, x_n; t + \omega)]d\tau = \int_t^\infty G[\varphi(\tau+\omega; x_1, \cdots, x_n; t+\omega)]d\tau$$
$$= \int_t^\infty G[\varphi(\tau; x_1, \cdots, x_n; t)]d\tau = V(x_1, \cdots, x_n; t).$$

这说明了函数 V 是 t 的周期为 ω 的周期函数. 如果 X_s 不明显地含有 t，则函数 V 将完全不依赖于 t，它可以由下列情况直接推出，即在此时 ω 可以认为是任意的.

函数 V 在域 (1.18) 中所有点都是正的，只有当 $x_1 = \cdots = x_n = 0$ 时才等于零. 既然它对 t 是周期的，它必须是正定的，因为我们可以写

$$V(x_1, \cdots, x_n; t) \geqslant w(x_1, \cdots, x_n),$$

其中 w 是正定函数，它是函数 $V(x_1, \cdots, x_n; t)$ 对变量 t 在区间 $0 \leqslant t \leqslant \omega$ 中的下确界.

作 V 由方程 (1.1) 构成的对 t 的导数. 我们将有

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d\overline{V}}{dt}.$$

其中 $\bar{V}$ 是 V 中代入方程 (1.1) 任一解的结果. 但

$$\bar{V}=\int_t^{\infty} G[\varphi(\tau;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0;\ t_0)]\,d\tau,$$

因为根据 (1.2)

$$\varphi[\tau;\ \varphi_1(t;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0;\ t_0),\ \cdots,\ \varphi_n(t;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0;\ t_0);\ t]$$
$$\cong \varphi(\tau;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0;\ t_0),$$

因此

$$\frac{dV}{dt}=\frac{d\bar{V}}{dt}=-G\,[\varphi\,(t;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0;\ t_0)]$$

$$=-G\left[\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^2(t;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0;\ t_0)\right]$$

$$=-G\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right],$$

即 $\frac{dV}{dt}$ 是负定函数.

因此,函数 V 满足定理的一切条件. 为了最后完全证明它,还必须说明存在有函数 G, 满足所有对它要求的条件. 故必须证明存在正的函数 $G(\eta)$, 定义于 $\eta\geqslant 0$. 当 $\eta=0$ 时它与其导数同时为零, 并具有下面的性质, 即积分 (1.17) 及 (1.21) 对任选的满足条件 $\psi^*(\tau)\leqslant\psi(\tau)$ 的 $\psi^*(\tau)$ 都是收敛的, 并对 $\psi^*(\tau)$ 一致收敛. (1.21) 中所指的 $M(\tau)$ 是定义在 $\tau\geqslant 0$ 上之正的、不减的、连续函数. 函数 $G(\eta)$ 可以用下面的方法作出.

选数列 $t_n(n=1,2,\cdots,)$, 使得当 $t\geqslant t_n$ 时满足关系式

$$\psi(t)\leqslant\frac{1}{n+1},$$

由于 (1.14) 这样的数列是存在的. 这时我们假定 $t_1>1$, $t_{n+1}\geqslant t_n$. 又作函数 $\eta(t)$, 令 $\eta\,(t_n)=\frac{1}{n}$, $\eta(t)$ 在每个介于 t_n 及 t_{n+1} 的区间是线性的, 且当 $0\leqslant t\leqslant t_1$ 时, $\eta\,(t)=\left(\frac{t_1}{t}\right)^p$, 其中 p 是整数. 选得这样大, 使得 $\eta'(t_1-0)<\eta'(t_1+0)$. 显然

$$\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\lim_{t\to\infty}\psi(t)=0,$$

且当 $t\geqslant t_1$ 时，$\psi(t)\leqslant\eta(t)$，函数 $\eta(t)$ 的图形如图 1 所示.

设 $t(\eta)$ 是 $\eta(t)$ 的反函数，这个函数的图形在图 2 中表出.

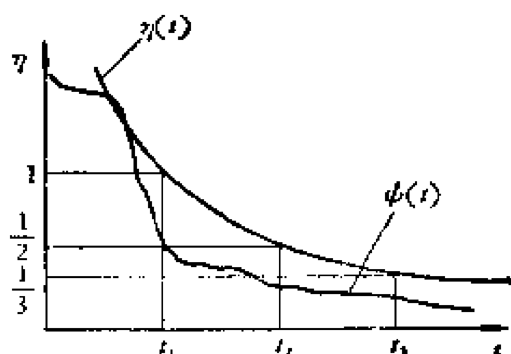


图 1

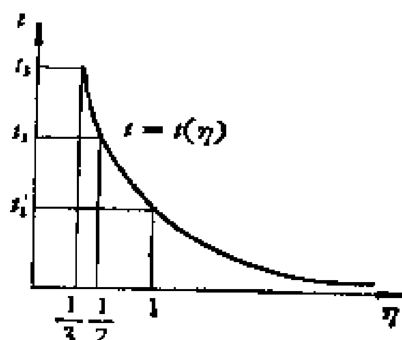


图 2

再令

$$G(\eta)=\int_0^{\eta}\frac{e^{-t(\eta)}}{M[t(\eta)]}d\eta. \tag{1.22}$$

显然函数 $G(\eta)$ 当 $\eta>0$ 时是正的，并且有

$$G(0)=G'(0)=0,$$

又有

$$G'[\psi^*(t)]=\frac{e^{-t[\psi^*(t)]}}{M[t(\psi^*(t))]}. \tag{1.23}$$

当 $t\geqslant t_1$ 时，估值 $\psi^*(t)\leqslant\psi(t)\leqslant\eta(t)$ 是成立的，并因 $t(\eta)$ 是减函数，$t[\psi^*(t)]\geqslant t[\psi(t)]=t$. 因此考虑到 $M(t)$ 是不减的函数，由 (1.23) 可求得

$$G'[\psi^*(t)]\leqslant\frac{e^{-t}}{M(t)},$$

由此立刻得出积分 (1.21) 是一致收敛的. 至于积分 (1.17)，其下限以 t_1 代之，这时收敛问题毫无影响，我们得到其表达式

$$I=\int_{t_1}^{\infty}dt\int_0^{\psi^*(t)}\frac{e^{-t(\eta)}}{M[t(\eta)]}d\eta.$$

对于它可验证得估值式

$$I<\int_{t_1}^{\infty}dt\int_0^{\eta(t)}\frac{e^{-t}}{M(0)}d\eta.$$

以 $t(\eta)$ 换其中内积分的变量 η，得

$$I < \int_{t_1}^{\infty} dt \int_{\infty}^{t} \eta'(t)\, \frac{e^{-t}}{M(0)}\, dt.$$

求得的积分显然是收敛的，因为至少在 $t \geqslant t_1$ 时我们有 $|\eta'(t)| < 1$. 由此得出积分 (1.17) 对于 $\psi^*(t)$ 一致收敛.

因此函数 V 具有一切必需的条件，定理完全证明.

§2. 广义李雅普诺夫函数的作法

在第一章§3已指出，从几何的观点来看，研究稳定性的李雅普诺夫第二方法就归结于建立一族封闭的曲面（在平面上就归结于建立一族封闭的曲线）．它们包围坐标原点，并且有这样的性质：就是积分曲线只能由外向里地与每一个这样的曲面相交．只要能用任何方法确立了这种曲面族的存在，那末也就确定了未被扰动运动的稳定性．因此近几十年来世界上不少的数学、力学及控制论等方面的工作者，如 J. L. 马塞尔，И. Г. 马尔金 (Малкин)，K. П. 佩尔西德斯基 (Персидский)，E. A. 巴尔巴欣，H. H. 克拉索夫斯基 (Красовский) 等就李雅普诺夫函数的存在性从理论上加以论证；以及针对一些具体的动力学系统真正作出所要求的李雅普诺夫函数，先后作了不少的努力，取得了一定的结果．其中 J. L. 马塞尔在1948年建立了关于李雅普诺夫函数的存在性定理，见本章§1，其后的结果可参阅[4]，在这一节我们就李雅普诺夫第二方法的几何意义，从拓扑的观点作进一步的阐述；并就广义渐近稳定情况下，上述曲面族（也就是广义李雅普诺夫函数）的存在性及其具体作法从理论上给予进一步肯定．由于微分方程所定义的积分曲线的拓扑本质是正则曲线，因此只要未被扰动运动是广义渐近稳定，那末上述闭曲面族的存在性问题从拓扑的观点来看，也就完全地解决.

（一）辅助知识

正则曲线族：**定义**：考虑两弧段 $\widehat{PQ}$，$\widehat{P'Q'}$．令 f 是一个把弧

$\widehat{PQ} \to \widehat{P'Q'}$ 的拓扑满映射，即

$$f(\widehat{PQ}) = \widehat{P'Q'},\ f(P) = P',\ f(Q) = Q'$$

对此拓扑映射 f 而言，我们令

$$d(f) = \underset{\substack{\text{点}P_i \in \widehat{PQ} \\ P'_i \in \widehat{P'Q'}}}{\text{U.b}\rho}\ (P_i, P'_i),\ P'_i = f(P_i),$$

令

$$\sigma(\widehat{PQ}, \widehat{P'Q'}) = \sigma(\widehat{P'Q'}, \widehat{PQ}) = \sigma(\widehat{QP}, \widehat{Q'P'})$$

表示是数 $d(f)$ 的全体中的下界. 因为对此两弧段之间不同的拓扑映射，就会有不同的数 $d(f)$. 这个数我们就称其为二弧段之间的“跨度”(span).

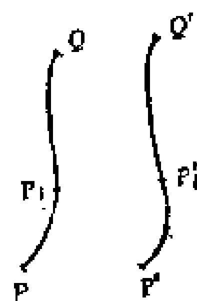


图 3

显见“跨度”有如下简单的性质:

性质 1: 如果 $\widehat{PQR}$ 与 $\widehat{P'Q'R'}$ 是两个弧段，且

$$\sigma(\widehat{PQ}, \widehat{P'Q'}) < \varepsilon,\quad \sigma(\widehat{QR}, \widehat{Q'R'}) < \varepsilon,$$

则

$$\sigma(\widehat{PQR}, \widehat{P'Q'R'}) < \varepsilon.$$

事实上，因为

$$\sigma(\widehat{PQR},\ \widehat{P'Q'R'}) \leqslant \min[\sigma(\widehat{PQ},\ \widehat{P'Q'}), \sigma(\widehat{QR},\ \widehat{Q'R'})].$$

性质 2: 如果 $\sigma(\widehat{Pr},\ \widehat{P'r'}) < \varepsilon$，点 Q 位于弧段 $\widehat{Pr}$ 内，则有一点 Q' 位于弧段 $\widehat{P'r'}$ 内，使得

$$\sigma(\widehat{PQ},\ \widehat{P'Q'}) < \varepsilon, \sigma(\widehat{Qr},\ \widehat{Q'r'}) < \varepsilon. \tag{a}$$

事实上，由于 f 是拓扑映射，当 $Q \in \widehat{Pr}$ 时，则

$$f(Q) = Q' \in \widehat{P'r'}.$$

假设 (a) 不成立，由“跨度”的定义即知

$$\sigma(\widehat{PQr},\ \widehat{P'Q'r'}) = \sigma(\widehat{Pr},\ \widehat{P'r'})$$

$$= \min[\sigma(\widehat{PQ},\ \widehat{P'Q'}),\ \sigma(\widehat{Qr},\ \widehat{Q'r'})] > \varepsilon,$$

这就导出矛盾.

性质 3：对任意三个弧段 $\widehat{PQ}$，$\widehat{P'Q'}$，$\widehat{P''Q''}$ 都有

$$\sigma(\widehat{PQ},\ \widehat{P''Q''}) \leqslant \sigma(\widehat{PQ},\ \widehat{P'Q'}) + \sigma(\widehat{P'Q'},\ \widehat{P''Q''}). \qquad \text{(b)}$$

事实上，因为"跨度"就是在拓扑映射下的欧氏距离，因此(b)也表示了三角形的不等式定理，即二边之和大于第三边；只有当 P、P'、P'' 三点在拓扑映射下位于同一直线上时，(b) 才能取等号.

定义：曲线族 $\{\mathscr{F}\}$ 是正则的，如果它满足下列两个条件的话：

(i) 族 $\{\mathscr{F}\}$ 中任两条曲线都不会相交；

(ii) 任给 $\varepsilon > 0$ 和族 $\{\mathscr{F}\}$ 中的任一条曲线 C 的任一段弧 $\widehat{PQ}$，就有一个 $\delta > 0$，使当 $P' \in C'$ (C' 亦是族 $\{\mathscr{F}\}$ 中的另一条曲线)，及 $\rho(P, P') < \delta$，则就存在曲线 C' 的一段弧 $\widehat{P'Q'}$，使得

$$\sigma(\widehat{PQ},\ \widehat{P'Q'}) < \varepsilon.$$

由此立即可看出，当我们考虑

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \cdots, x_n) \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \qquad (2.1)$$

假定 $X_s(0, \cdots, 0) = 0$；$X_s(x_1, \cdots, x_n)$ 在区域

$$|x_s| \leqslant h \qquad (s = 1, 2, \cdots, n)$$

上连续，且满足李浦希兹条件，那末由方程组 (2.1) 所确定的积分曲线族 $\{\mathscr{F}\}$ 就是一正则曲线族.

因为由解的唯一性就保证了族 $\{\mathscr{F}\}$ 中任意两条曲线不会相交；由解对初值的连续依赖性就保证了正则曲线族定义中的条件 (ii) 得到满足.

在第 **1** 章 § 3 中曾指出，李雅普诺夫定理：如果对 (2.1) 存在正定的函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$，它沿 (2.1) 的轨线所作的全导数

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s(x_1, \cdots, x_n)$$

是负定的，则(2.1)的平凡解 $O(0, \cdots, 0)$ 是渐近稳定的. 换句话说，即由 (2.1) 所确定的正则曲线族 $\{\mathscr{F}\}$ 当 $t \to \infty$ 时都趋于原点 O. 也就是说点 O 是族 $\{\mathscr{F}\}$ 的唯一的一个聚点.

我们现在考虑任一正则曲线族 $\{\mathscr{F}\}$.

定义：如果正则曲线族 $\{\mathscr{F}\}$ 只有一个聚点 O，也即是族 $\{\mathscr{F}\}$ 中每一条曲线都趋于点 O，那我们就称此点 O 是广义渐近稳定.

（二）度量空间

从点集拓扑学知度量空间就是在一点集 S 中引进距离函数 $\rho(P, Q)$ 后而形成的. 当然这里的距离函数 $\rho(P, Q)$ 必须要满足

1）正值性：$\rho(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$；

2）对称性：$\rho(x, y) = \rho(y, x)$；

3）三角形不等式：$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

定义：包含一个可数稠密子集的度量空间，叫作可分的度量空间.

由于我们是在通常的欧氏空间来讨论. 在引进通常的二点之间的距离后，自然欧氏空间也是度量空间. 又因在欧氏空间中以有理数为坐标的点形成一个可数的无穷点集，而且此点集在欧氏空间中稠密，因此欧氏空间也就是一个可分的度量空间.

（三）广义李雅普诺夫函数的作法

设 R 表示我们所论及的欧几里得空间；又令 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ 表示是一个在 R 中稠密的子集. 对应于子集的点 a_i，我们定义一个函数

$$f(a_i, P) = \frac{1}{1 + \rho(a_i, P)}. \tag{2.2}$$

这里的 $\rho(a_i, P)$ 就是表示 R 中二点 a_i 和 P 之间的欧氏距离. 显见如此定义的函数是一个连续函数. 它具有性质:

1）$0 < f(a_i, P) \leqslant 1$,

2）$|f(a_i, P) - f(a_j, P)| \leqslant |\rho(a_i, P) - \rho(a_j, P)| \leqslant \rho(a_i, a_j)$.

我们现在考虑一族正则曲线 $\{\mathscr{F}\}$，假定这正则曲线族 $\{\mathscr{F}\}$ 在整个欧氏空间有定义. 为了便于说明问题，我们首先就 R 的局部情形来讨论，然后再推广至全空间. 因此就 R 的有界域上来讨论所考虑的正则曲线族 $\{\mathscr{F}\}$.

令 C 是 $\{\mathscr{F}\}$ 的一条曲线，P 是曲线 C 上的一点，当 P 在 C 上变动时，根据 $f(a_i, P)$ 的连续性知，函数 $f(a_i, P)$ 在这个有限域的一曲线 C 上一定存在一个最小上界．此时我们就在曲线 C 上定义一个函数，

$$\mu_i(C) = \text{最小上界}_{P\in C} f(a_i, P) - \text{最大下界}_{P\in C} f(a_i, P) = \text{上界}_{\substack{P\in C\\ Q\in C}} |f(a_i, P) - f(a_i, Q)|$$

然后我们就作函数

$$V(C) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i(C)}{2^i}.$$

图 4

根据我们的作法，函数 $V(C)$ 有如下的性质：

1) 当曲线 C 蜕化成一点 P 时，显见由于所有的 $\mu_i(C) = 0$ $(i = 1, 2, \cdots)$，故 $V(C) = 0$；

2) 当 $C_1 \subset C_2$，C_1, C_2 是曲线 C 上的两个子弧段（见图 5）．由于 $\mu_i(C_1) \leqslant \mu_i(C_2)$ （根据 $\mu_i(C)$ 的定义），故

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i(C_1)}{2^i} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i(C_2)}{2^i},$$

$$V(C_1) < V(C_2);$$

3) 当 $\bar{C}_1 =$ 开弧段 $C_1 +$ 两个端点时，显见

$$V(\bar{C}_1) = V(C_1);$$

4) 当 $C_1 \subset w_\varepsilon(C_2)$，则 $V(C_1) < V(C_2) + 2\varepsilon$.

这里 $w_\varepsilon(C_2)$ 表示弧段 C_2 的 ε 邻域，C_1 与 C_2 是曲线 C 上的弧段（图 6）．

证：考虑一个固定的 i，任取 C_1 的一点 P，则根据 C_1 在 C_2 的 ε 邻域内，因此在 C_2 定可取到一对应点 $P' \in C_2$，使 $\rho(P, P') \leqslant \varepsilon + \beta$．其中 β 是一个充分小的正数，使得对某个小的 $\alpha > 0$，有

$$|f(a_i, P) - f(a_i, P')| < \varepsilon - \alpha. \tag{2.3}$$

为此只要使所取的点 P 与 P' 之间的欧氏距离充分小（注意到

$f(a_i, P)$ 的连续性)，就可保证上二不等式同时成立.

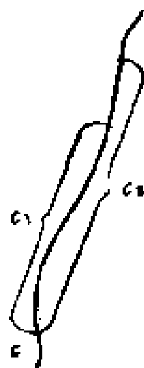


图 5



图 6

把不等式 (2.3) 改写成

$$-(\varepsilon-\alpha)<f(a_i, P)-f(a_i, P')<\varepsilon-\alpha. \qquad (2.4)$$

我们取此不等式的右半部，得

$$f(a_i, P)<f(a_i, P')+\varepsilon-\alpha$$

$$\Longrightarrow \underset{P\in C_1}{\mathrm{U.b}}\, f(a_i, P)<\underset{P'\in C_2}{\mathrm{U.b}}\, f(a_i, P')+\varepsilon-\alpha; \qquad (2.5)$$

再取不等式 (2.4) 的左半部，即得

$$f(a_i, P')-\varepsilon+\alpha<f(a_i, P)$$

$$\Longrightarrow \underset{P'\in C_2}{\mathrm{L.b}}\, f(a_i, P')-\varepsilon+\alpha<\underset{P\in C_1}{\mathrm{L.b}}\, f(a_i, P). \qquad (2.6)$$

由 (2.5) 的右端减去 (2.6) 的左端一定大于 (2.5) 左端减去 (2.6) 的右端.

$$\underset{P\in C_1}{\mathrm{U.b}}\, f(a_i, P)-\underset{P\in C_1}{\mathrm{L.b}}\, f(a_i, P)<\underset{P'\in C_2}{\mathrm{U.b}}\, f(a_i, P')$$

$$-\underset{P'\in C_2}{\mathrm{L.b}}\, f(a_i, P')+2(\varepsilon-\alpha)$$

$$<\underset{P'\in C_2}{\mathrm{U.b}}\, f(a_i, P')-\underset{P'\in C_2}{\mathrm{L.b}}\, f(a_i, P')+2\varepsilon,$$

$$\mu_i(C_1)<\mu_i(C_2)+2\varepsilon,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\mu_i(C_1)<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\mu_i(C_2)+2\varepsilon,$$

$$V(C_1)<V(C_2)+2\varepsilon.$$

这个性质说明了函数 $V(C)$ 是 C 的连续函数;

5) 如果 $C_1\subset C_2$, 且 C_2 上有一点至 C_1 的距离为 d, 则

$$V(C_1) < V(C_2).$$

证：这里 C_1, C_2 是曲线 C 上的子弧段(见图 7)．注意一个点到一段曲线的距离就是此点至这段曲线上的所有点的欧氏距离中的最小者，所以 $d > 0$。

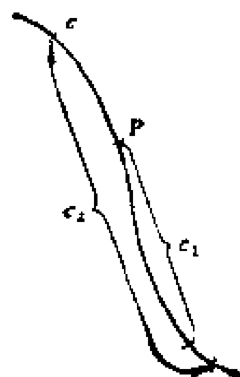


图 7

又因 $C_1 \subset C_2$，故对每个 i 有

$$\mu_i(C_1) \leqq \mu_i(C_2).$$

根据假定知，点列 a_1, a_2, $\cdots$. 在 R 中稠密，因此一定存在一点 a_i，使

$$\rho(a_i, P) < \frac{d}{3},$$

因此有

$$\underset{P \in C_2}{f(a_i, P)} = \frac{1}{1 + \rho(a_i, P)} > \frac{1}{1 + \frac{1}{3} d}.$$

而另一方面

$$\rho(a_i, C_1) > \frac{2}{3} d,$$

$$\underset{q \in C_1}{f(a_i, q)} = \frac{1}{1 + \rho(a_i, q)} < \frac{1}{1 + \frac{2}{3} d},$$

$$\underset{q \in C_1}{f(a_i, q)} < \frac{1}{1 + \frac{2}{3} d} < \frac{1}{1 + \frac{1}{3} d} < \underset{P \in C_1}{f(a_i, P)},$$

$$\underset{q \in C_1}{\mathrm{U.b}} f(a_i, q) < \underset{P \in C_2}{\mathrm{U.b}} f(a_i, P),$$

对此 i 而言，$\mu_i(C_1) < \mu_i(C_2)$，最终得 $V(C_1) < V(C_2)$。

这个性质说明函数 $V(C)$ 是曲线 C 的递增函数．综合上述的讨论，在正则曲线 C 上我们所作的函数 $V(C)$ 是一个连续递增的正函数，当曲线 C 蜕化成一点时，函数 $V(C)$ 才取零值．

下面就利用这个函数来作我们所要求的广义的李雅普诺夫函数．

考虑一正则曲线族$\{\mathscr{F}\}$.

定理： 假设空间R的一点O是此正则曲线族$\{\mathscr{F}\}$的唯一聚点，则必存在包围点O的闭曲面族（就平面情形而言，必存在包围点O的闭曲线族），且此闭曲面族中任意两张曲面都不会相交，而是一个包含另一个；并且每一张闭曲面与正则曲线族中每一条曲线只相交一次（就平面情形而言，此闭曲线族中的任意两条曲线都不会相交，而是一个包含另一个；并且每一条闭曲线与正则曲线族中每一条曲线只相交一次）.

证： 1）由假定点O是正则曲线族$\{\mathscr{F}\}$的唯一聚点，因此我们利用前面对函数$V(C)$的作法，从点O开始沿着每一条正则曲线来作函数$V(C)$，根据上面的作法知函数V是C的连续递增函数，且当C蜕化到仅有一点时，函数V才取零值．由于这种作法是对正则曲线族$\{\mathscr{F}\}$中的任一条都行得通．因此也就是说，由聚点O开始在正则曲线族$\{\mathscr{F}\}$上我们作出了一个连续递增的正函数$V(C)$.

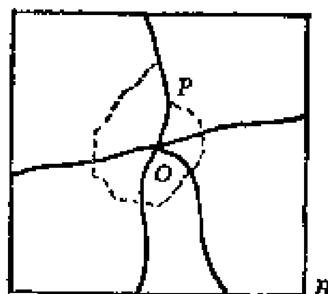


图 8

2）其次我们要证明$V(P)=k$（k是正常量），就平面而言，它表示一条围绕O点的闭曲线；就空间而论，它表示一条围绕O点的闭曲面．我们首先就平面的情形来证明.

这里我们分两步来进行：

(i) 假如我们所考虑的广义渐近稳定域如图8所示，那末根据函数$V(P)$的连续性知，在此域的边界B（边界B是一个闭集）上必能取到下确界$l>0$，因此就取满足不等式 $0<k<l$ 的常量k．我们要证明的是曲线$V(P)=k$是一个围绕O点的闭曲线．由于函数V在聚点O取零值，在边界上取的函数值满足不等式

$$V(P)|_{P\in B}\geqslant l>0,$$

因此在每一条正则曲线上必存在一点P，使得函数V在弧段$\overset{\frown}{OP}$上取值为k，即$V(P)=k$（见图8）．这一点根据V的连续性一定能办到．所以曲线$V(P)=k$交正则曲线族$\{\mathscr{F}\}$于“等距”．亦

即是说曲线 $V(P)=k$ 与每一条正则曲线都相交一次.

ii) 往下就证明此曲线一定是绕 O 点的闭曲线. 由于曲线 $V(P)=k$ 与每一条正则曲线都相交,因此不妨就假定 $V(P)=k$ 与正则曲线 C_1 相交于 P_1 点,那末由 P_1 点出发曲线 $V(P)=k$ 与正则曲线族中的每一条都相交. 如果此曲线 $V(P)=k$ 往下再与 C_1 相交一次,而且交点与 P_1 点重合,那末我们就证明了 $V(P)=k$ 是一条绕 O 点的闭曲线了(见图 9).

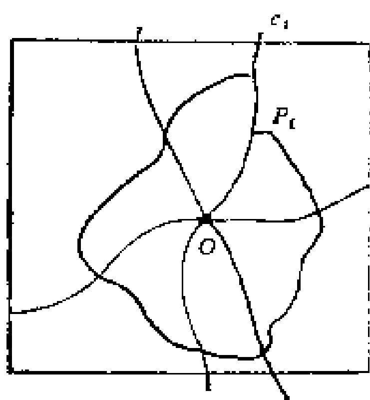


图 9

要证明这一点,首先要证明曲线 $V(P)=k$ 必定要与正则曲线相交第二次. 用反证法:假定 $V(P)=k$,除了在 P_1 点与 C_1 相交一次外,再不与 C_1 相交了. 由于 C_1 上的点都是常点,所以在正则曲线 C_1 的任何小的邻域内,都有曲线 $V(P)=k$ 与正则曲线族 $\{\mathscr{F}\}$ 相交的点存在,因此在曲线 C_1 上必有一点 P_0 作为曲线 $V(P)=k$ 的极限点. 即 $\lim\limits_{t\to\infty}P(t)=P_0$ (见图 10). 不妨假定点 P_0 位于弧 $\widehat{OP_1}$ 的外侧,那末根据 V 的作法,知

$$V(\widehat{OP_1})<V(\widehat{OP_0})=k_0.$$

可是 $V(\widehat{OP_1})=V(P_1)=V(P)=k$, $k<k_0$, 但根据 $V(P)$ 的连续性,知

$$k=V(P_1)=\lim_{t\to\infty}V(P(t))=V(\lim_{t\to\infty}P(t))=V(P_0)=k_0$$

即

$$k=k_0.$$

因此导出矛盾. 这就说明曲线 $V(P)=k$ 必定要与 C_1 相交第二次. 不妨假定 $V(P)=k$ 除了与正则曲线 C_1 相交于点 P_1 外,再相交于 P_2 点. 我们现在就来证明 P_2 点与 P_1 点重合.

证: 假设 P_2 点与 P_1 点不重合,不妨假定 $\widehat{OP_1}\subset\widehat{OP_2}$ (反之亦可),则根据函数 $V(C)$ 之递增性知

$$V(\widehat{OP_1}) = V(P_1) < V(\widehat{OP_2}) = V(P_2).$$

可是 P_1 与 P_2 二点都位于曲线 $V(P)=k$ 上，因此就有 $V(P_1)=V(P_2)=k$，从而就导出矛盾. 所以点 P_2 与点 P_1 重合. 也就是说

$$V(P)=k$$

是一条绕 O 点的闭曲线.

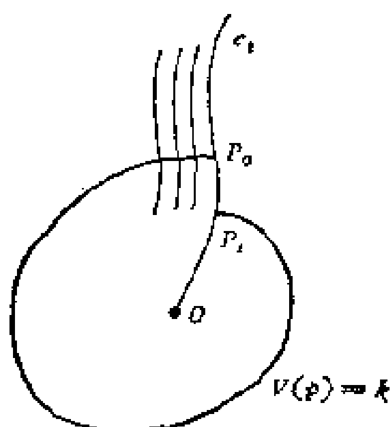


图 10

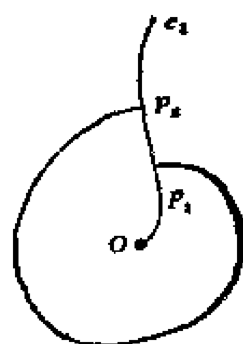


图 11

3）至于空间情形，我们只要证明 $V(P)=k$ 表示一张围绕原点 O 的闭曲面就可以了.

注意此时 k 取 $0<k<l$ 中的值，而 l 是函数 $V(P)$ 在有界方体的边界上所取的下确界.

证： 针对给定的 k 值，我们任取 $k_1>0$, $k_2>0$ 使 $0<k_1<k<k_2<l$. 根据 $V(0)=0$, $V(P)$ 是连续单增的函数，$V(P)<k$ 确定了一个以点 O 为中心的单连通开球域 G_1; 同理 $V(P)<k_2$ 亦是一个以点 O 为中心的单连通开球域 G_2, 且 $G_1 \subset G_2$; 因此由函数 V 的连续单增性，从域 G_1 过渡到域 G_2，必定存在单连通的闭集 A_1（它作为闭球域 $V(P) \leqslant k$ 的边界），使得函数 V 在此集合上取值 k，也就是说 $V(P)|_{P\in A}=k$，因此 $V(P)=k$ 表示了一张围绕原点 O 的闭曲面. 定理证毕.

下面仍旧回到平面情形来讨论，(空间情形完全类似).

由 $V(C)$ 的递增性知闭曲线 $V(P)=k>0$ 与每一条正则曲线 C 只交一次. 我们把此闭曲线 $V(P)=k$ 记为 A. 也就是说在

此闭曲线A我们定义了一个函数V，它的函数值就是常数k．即$V(A)=k$．此函数有下列性质：

1）从聚点O开始，沿着正则曲线C向外扩张时，函数$V(A)$是连续递增，亦即是说：如果$A_1\subset A_2$，A_1, A_2是两条绕聚点O的闭曲线，那末就有$V(A_1)<V(A_2)$．



图 12

2）特别当C蜕化到仅有一点O时，此时闭曲线A也就收缩到O点，那末$V(O)=0$．

所以由函数$V(A)=k$所确定的曲线是一族围绕聚点O的闭曲线，此族闭曲线即具有定理所要求的结论．

如果我们把闭曲线A与曲线C相交的一点的函数值$V(A)$．就定义为曲线C由此点到聚点O的距离，那末闭曲线$V(A)=k$交正交曲线族$\{\mathscr{F}\}$于"等距"．因此函数$V(A)$就具有李雅普诺夫渐近稳定性定理中所要求的定号函数的性质．虽然我们在这里并未证明函数$V(A)$具有可微的性质，也可能函数$V(A)$除了前面已指出的连续递增性外，再没有其它的性质，因此我们就把这样的函数$V(A)$称为广义的李雅普诺夫函数．

上面仅就李雅普诺夫意义下的渐近稳定性，也就是在局部小范围内的渐近稳定情况下，针对具有唯一的一个聚点O的正则曲线族，将广义李雅普诺夫函数作出．

如果我们考虑未被扰动运动是全局稳定，也就是对任意大的初始扰动，结果相空间的积分曲线当$t\to+\infty$时仍趋于原点．也就是说此时我们考虑的正则曲线族$\{\mathscr{F}\}$在全相空间只有一个聚点O，那末我们是否能作出上述同样性质的广义李雅普诺夫函数呢？回答是肯定的．

虽然此时正则曲线C在全空间都有定义，但我们前面引进的函数

$$f(a_i, P)=\frac{1}{1+\rho(a_i, P)}$$

在曲线 C 上仍是有界连续，这里 P 是正则曲线 C 上一点，C，$\{\mathscr{F}\}$，O，a_i，$\cdots$ 等记号的意义仍同上. 因此只要在 C 的任意大的一段闭弧上（从聚点 O 开始），函数 $f(a_i, P)$ 仍存在最大值和最小值，所以我们仍旧照样的定义函数

$$\mu_i(C) = \underset{P \in C}{\text{最小上界}} f(a_i, P) - \underset{P \in C}{\text{最大下界}} f(a_i, P)$$
$$= \underset{P \in C, Q \in C}{\text{上界}} |f(a_i, P) - f(a_i, Q)|.$$

同样我们作

$$V(C) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \mu_i(C),$$

根据 $f(a_i, P)$ 的定义知

$$f(a_i, P) - f(a_i, Q) = \frac{1}{1 + \rho(a_i, P)} - \frac{1}{1 + \rho(a_i, Q)}$$
$$= \frac{\rho(a_i, Q) - \rho(a_i, P)}{(1 + \rho(a_i, P))(1 + \rho(a_i, Q))}$$
$$\Longrightarrow |f(a_i, P) - f(a_i, Q)| \leqslant |\rho(a_i, Q) - \rho(a_i, P)| \leqslant \rho(P, Q),$$

故
$$\mu_i(C) = \underset{P, Q \in C}{\text{上界}} |f(a_i, P) - f(a_i, Q)|$$
$$\leqslant \underset{P, Q \in C}{\text{上界}} \rho(P, Q) \leqslant \delta(C).$$

这里 $\delta(C)$ 表示曲线 C 的直径，也就是 C 上的所有二点之间的欧氏距离中之最大者.

$$V(C) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \mu_i(C) \leqslant \delta(C) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \delta(C).$$

又因 $f(a_i, Q)$ 满足不等式

$$0 < f(a_i, Q) \leqq 1,$$

所以

$$\mu_i(C) \leqslant \underset{P \in C}{\text{上界}} f(a_i, P) \leqslant 1,$$

$$V(C) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \mu_i(C) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

因此我们仍可像前面一样的证明 $V(C)$ 是确定在 C 上的一个

连续递增函数．当曲线 C 蜕化到只有一聚点 O 时，$V(C)|_{C=0}=0$，且 $V(C)=k$ 常数时仍表示一条围绕聚点 O 的闭曲线．我们仍用 A 记此闭曲线，最终仍旧得到上述定理的结论．

因此，当我们看到微分方程所定义的积分曲线的拓扑本质是正则曲线时，如果未被扰动运动是广义的渐近稳定，也就是正则曲线族存在唯一的聚点 O 时，那末从拓扑的观点来看，李雅普诺夫渐近稳定性定理中所要求的李雅普诺夫函数的存在性问题，也就是闭曲面族（平面上的闭曲线族）的存在问题，从理论上就完全解决了．

（四）结束语

最后应指出：李雅普诺夫渐近稳定性定理的逆转问题，曾引起世界上不少常微分方程工作者的重视，先后开展了这方面的研究工作，获得了一定的成果．所有这些工作的实质就是针对不同的动力系统去确立一族控制积分曲线动向的、围绕原点的封闭曲面族（对平面而言是封闭曲线族）的存在性．因此从这个意义上来看，这些结果应该统一在本节所得到的定理的结论之下．也就是说从微分方程所定义的积分曲线族是正则曲线族这一拓扑观点来看，本节的定理概括了他们的结果．

§3. 李雅普诺夫稳定性概念的进一步发展

在工程实际问题的研究中，稳定性的直观概念是很复杂的．因此要给出实际稳定性概念的一个完全令人满意的定义还是比较困难的．例如图 13 中所示的平衡态从李雅普诺夫定义来看它是不稳定，但它实际上是稳定的；又如图 14 所示的平衡态看来稳定，但实际是不稳定的．

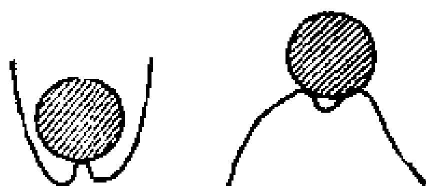


图 13

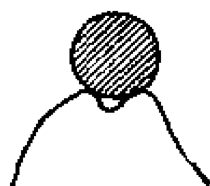


图 14

即使从李雅普诺夫稳定性定义（特别是关于渐近稳定性定义）来看，亦有其不足之处，指出这一点的首先是马塞尔[3,4]，后来

H. 安托西维茨 (Antosiewicz)[13] 以及 R. E. 卡尔曼 (Kalman)[14] 等人把马塞尔在 1955 年的一篇文章中总结的稳定性概念又进行了分类. 在这里我们就来介绍目前在常微分方程稳定性理论研究中所出现的各种稳定性的定义以及它们之间的相互关系. 应当说这些定义都是在李雅普诺夫稳定性概念的基础上发展起来的. 这里附带的说一句, 在近代工程实际工作者以及大量的文献中所提到的动力系统的平衡态,或微分方程的平凡解,以及在第一章中所说的未被扰动运动等都是指的同一件事. 为了方便起见,根据我们的情况,既采用向量矩阵来表示,必要时亦采用分量来表示.

考虑微分方程

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=f(t,\boldsymbol{x}), \tag{3.1}$$

这里 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}$ 都是向量函数;函数 $f(t,\boldsymbol{x})$ 是在某个集合

$$I\times S=\{(t,\boldsymbol{x})\in R\times R^n;\ t\geqslant\tau\geqslant 0,\ \|x\|<r\}$$

上有定义且连续, 向量 $f(t,\boldsymbol{x})$ 所取的函数值属于 n 维欧氏空间 R^n.

通常对向量 $f(t,\boldsymbol{x})$ 总假定在集合 $I\times S$ 上是充分地光滑,使得经过任一点 $(t_0,x_0)\in I\times S$, 方程 (3.1) 都存在唯一的解

$$\boldsymbol{x}=\varphi(t;\ x_0,\ t_0),$$

对所有 $t\geqslant t_0$ 此解连续地依赖 (t_0,x_0), 且

$$x|_{t=t_0}=\varphi(t_0;\ x_0,\ t_0)=x_0.$$

一般总假定 $f(0,t)=0$, $t\in I$, 即 $\boldsymbol{x}=0$ 是方程 (3.1) 的平凡解. 此解亦可称为动态系统 (3.1) 的平衡态, 记为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_e$; 或称为扰动运动方程 (3.1) 的未被扰动运动.

定义 3.1: 动态系统 (3.1) 的平衡态 x_e 是稳定的,如果对任意实数 $\varepsilon>0$, 存在实数 $\delta(\varepsilon,t_0)>0$, 使得当 $\|x_0-x_e\|\leqslant\delta$ 时,对所有 $t\geqslant t_0$ 都有

$$\|\varphi(t;\ x_0,\ t_0)-x_e\|\leqslant\varepsilon.$$

正像在前面对自治系统(即方程右端不显含参变量 t) 叙述李雅普诺夫稳定性定义时已指出的那样, 对非自治系统 (3.1) 的这

个李雅普诺夫稳定性概念，仍然是一个局部概念，它涉及到在平衡态附近的特性，因为我们事先并不知道如何选择小的 δ. 当然这里的 δ 与自治系统情况下的 δ 有一个明显不同之处，就是这里初始扰动范围的大小确定与初始时间 t_0 的大小有关，即 $\delta=\delta(\varepsilon, t_0)$.

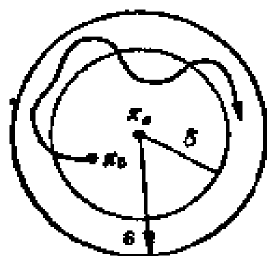


图 15. 稳定性定义

根据解对初值的连续依赖性，可以指出下列事实：如果在某一个初始时刻 t_0 存在着稳定性（也就是能找到如此小的 $\delta=\delta(\varepsilon, t_0)$)，那末只要所有的运动对初始状态都是连续的，就会在任何时刻 t_1 都存在着稳定性.

证： 就 $0<t_1<t_0$ 的情况来讨论（对 $t_1>t_0$ 的情形亦可类似的进行)，令

$$\Omega(x_1, t_1, t_0)=\max_{t_1\leqslant t\leqslant t_0}\|\varphi(t; x_1, t_1)-x_e\|.$$

当 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_e$, 即把初始值取在平衡态 $\boldsymbol{x}_e$ 上，因此有 $\Omega(\boldsymbol{x}_e; t_1, t_0)=0$. 由于假定动态系统 (3.1) 在 t_0 时刻存在着稳定性，所以，任给 $\varepsilon>0$, 都存在着 $\delta=\delta(\varepsilon, t_0)>0$, 使当 $\|x_0-x_e\|\leqslant\delta$ 时，对于所有 $t\geqslant t_0$ 就总有

$$\|\varphi(t; x_0, t_0)-x_e\|\leqslant\varepsilon_0.$$

可是根据解对初值的连续依赖性，知 $\Omega(x_1; t_1, t_0)$ 在 x_1 点是连续的，因此对给定的 $\delta=\delta(\varepsilon, t_0)>0$, 总存在着 $\nu=\nu(\delta(\varepsilon, t_0), t_1)$, 使当 $\|x_1-x_e\|\leqslant\nu(\delta, t_1)$ 时，则在 $t_1\leqslant t\leqslant t_0$ 时就会有

$$\|\varphi(t; x_1, t_1)-x_e\|\leqslant\delta(\varepsilon, t_0).$$

因此最终得到在所有 $t\geqslant t_1$ 时，有

$$\|\varphi(t; x_1, t_1)-x_e\|\leqslant\varepsilon\ (\text{见图 16}).$$

在许多实际问题的应用中，感兴趣的还是下述李雅普诺夫的渐近稳定性概念，也就是在受到任何小的初始扰动之后，由 (3.1) 确定的运动仍回到平衡状态.

定义 3.2： 动态系统 (3.1) 的平衡态 $\boldsymbol{x}_e$ 是渐近稳定的，如果

(i) 平衡态 $\boldsymbol{x}_e$ 是稳定的；

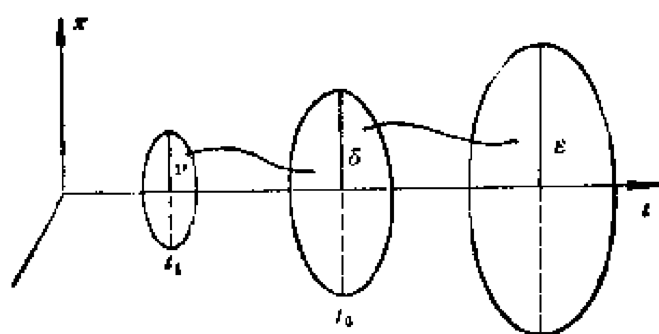


图 16

(ii) 充分接近 x_e 开始的每个运动，当 $t\to+\infty$ 时都收敛到 x_e. 换句话说，存在某个常数 $r(t_0)>0$，并且对每个实数 $\mu>0$，存在相应的实数 $T(\mu, x_0, t_0)$，使当 $\|x_0-x_e\|\leqslant r(t_0)$，对所有 $t\geqslant t_0+T$ 就有

$$\|\varphi(t; x_0, t_0)-x_e\|\leqslant\mu \text{ (见图 17)}.$$

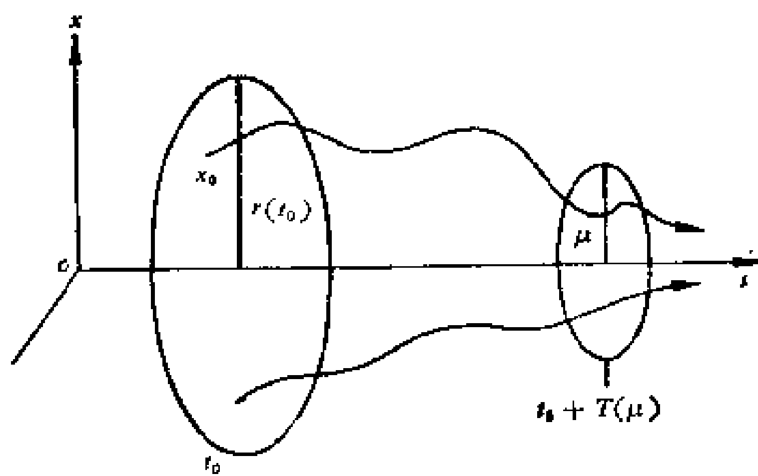


图 17

$r(t_0)$ 是确定渐近稳定性区域的范围大小，一般说来它比确定稳定性区域的范围 $\delta(\varepsilon, t_0)$ 要小. 由此定义看出渐近稳定性仍是一个局部概念，事先我们并不知道 $r(t_0)$ 有多小. 如果动态系统 (3.1) 的平衡态是渐近稳定，那末由 $\|x_1-x_e\|<\|x_0-x_e\|$ 就意味着对任何 μ 和 t_0 有 $T(\mu, x_1, t_0)<T(\mu, x_0, t_0)$. 这是因为初始状态 (x_1, t_0) 位于初始状态 (x_0, t_0) 的范围之内，既然平衡态是渐近稳定，那末从离 x_e 相同的距离开始的所有运动在任意长的时间里，这些运动与 x_e 的距离都不能比 μ 大. μ 是描绘运动 $\varphi(t; x_0, t_0)$

在随着 t 的逐渐增大时，它趋向平衡态 x_e 的演变过程. 因此 T 显见与 μ 有关，当 μ 取得愈小时，$T(\mu)$ 值就要取得大才能保证运动进入半径为 μ、以 t 轴为中心轴的圆筒内. 为了更好地把这一点说清，这就要引出马塞尔[1]的定义.

定义 3.3：动态系统 (3.1) 的平衡态是等度渐近稳定的，如果

(i) 平衡态 x_e 是稳定的；

(ii) 当 t 对 x_0 而一致地趋于无穷时，(3.1) 的每个运动都收敛到 x_e. 换句话说，就是在定义 3.2 中的 $T(\mu, x_0, t_0) = T(\mu, \tau(t_0), t_0)$，即 T 的大小只依赖 μ，t_0 而定；也就是说，只要初始值 x_0 位于 x_e 的充分小邻域内，经过时间 $T = T(\mu, t_0)$ 后，运动 $\varphi(t; x_0, t_0)$ 就进入半径为 μ、以 t 轴为中心轴的圆筒内，见图 18. “等度”性就体现在对一切充分小的初始值 x_0，由它们出发的积分曲线，经过同样长的时间 $\tau(t_0)$ 后，都会进入上述半径为 μ，以 t 轴为中心轴的圆筒内.

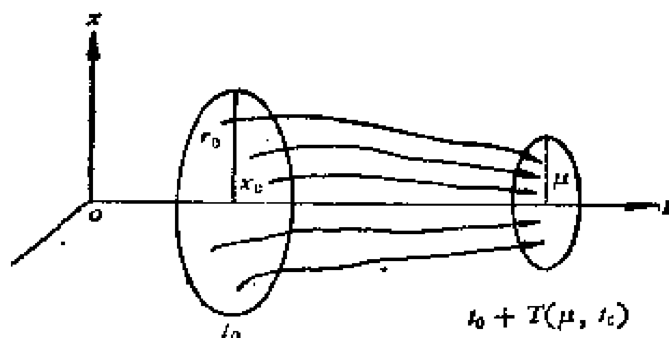


图 18

从上述定义 3.2 和 3.3 的完整性来看，二者都是有缺陷的，就是二者都首先假设定义 3.1 成立. 这一点从下列例题可清楚地看出. 此外我们从这两个定义比较的过程中亦可进一步看出定义 3.2 的不足之处是较显著的.

例题：考虑用极坐标 $x = (r, \theta)$，$0 \leqslant r < \infty$，$0 \leqslant \theta < 2\pi$ 表示二阶动态系统

$$\begin{cases} \dot{r} = \left(\dfrac{\dot{g}(\theta, t)}{g(\theta, t)}\right) r, \\ \dot{\theta} = 0. \end{cases}$$

其中

$$g(\theta, t) = -\frac{\sin^2\theta}{\sin^4\theta + (1 - t\sin^2\theta)^2} + \frac{1}{1 + t^2}.$$

考虑初值为 $r(t_0) = r_0$, $\theta(t_0) = \theta_0$ 的解,

$$\frac{dr}{r} = \frac{dg}{g} \Longrightarrow \frac{r}{r_0} = \frac{g(\theta, t)}{g(\theta_0, t_0)}, \theta = \theta_0,$$

$$r = \frac{g(\theta_0, t)}{g(\theta_0, t_0)} r_0, \theta = \theta_0.$$

显见此解是初值 (r_0, θ_0) 的连续函数. 由于 $\lim\limits_{t\to\infty} g(\theta, t) = 0$, 因此沿着 $\theta = \theta_0$ 的方向,我们有

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{r_0}{g(\theta_0, t_0)}\right) g(\theta, t) = 0.$$

这就说明解 $r = r(t)$ 满足定义 3.2 的第二个条件,那末是否由此就保证方程的平凡解 $r = 0$ 就是稳定的呢? 也就是说, 任给 $\varepsilon > 0$, 是否存在实数 $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, 使当 $|r_0| \leqslant \delta$ 时,对所有的 $t \geqslant t_0$ 就有 $|r(t; \theta_0, r_0, t_0)| \leqslant \varepsilon$ 呢? 回答是否定的.

因为当取 $t_1 = \frac{1}{\sin^2\theta_0}$ 时,

$$g(\theta_0, t_1) = \frac{\sin^2\theta_0}{\sin^4\theta_0 + (1 - t_1\sin^2\theta_0)^2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sin^4\theta_0}} > \frac{1}{\sin^2\theta_0}.$$

当 $\theta_0 \to \pm\pi$ 时, $g(\theta_0, t_1) \to \infty$. 这就是说, 沿着射线 $\theta_0 = \pm\pi$ 的方向, $r = \left(\frac{r_0}{g(\theta_0, t_0)}\right) g(\theta_0, t_1)$ 可以取到任意大的数值, 因此方程的平凡解 $r = 0$ 是不稳定的. 所以仅仅满足定义 2 的第二个条件,并不能保证平衡态一定稳定.

其次, 从这个例题可看出沿着射线 $\theta_0 = \pm\pi$ 的方向, 函数 $T(\varepsilon, r_0, \theta_0, t_0)[= T(\mu, x_0, t_0)]$ 在 r_0, θ_0 处不连续. 这就说明了由李雅普诺夫渐近稳定性定义中之第二个条件, 并不能推出马塞尔的等度渐近稳定性定义的第二个条件.

但是,在通常保证解对初值连续依赖的条件下,就可由等度渐

近稳定性定义（即定义 3.3）的第二个条件导出李雅普诺夫意义下的稳定性.

事实上，我们令 $t_1 = t_0 + T(\varepsilon, r(t_0), t_0)$，定义

$$\lambda(\boldsymbol{x}_0, t_0, T) = \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \|\varphi(t; x_0, t_0) - x_e\|.$$

因为等度渐近稳定性的概念中之“等度”性，就体现在 T 的选取不依赖于 $\boldsymbol{x}_0$. 由解对初值的连续依赖性，知 λ 在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ 时连续，任给 $\varepsilon > 0$，都可找到 $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$，使当 $\|x_0 - x_e\| \leqslant \delta$ 时，对所有

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T(\varepsilon, r(t_0), t_0), \text{就有}$$

$$\|\varphi(t; x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon.$$

因为等度渐近稳定性定义 3.3 的第二个条件说明了 T 的选取与 x_0 无关，因此对一切 $t \geqslant t_0$ 都有

$$\|\varphi(t; x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon,$$

这就是李雅普诺夫意义下的平衡态之稳定性.

而由等度渐近稳定性定义 3.3 可以推出李雅普诺夫意义下的渐近稳定，这一点是显然的.

定理：如果动态系统是线性的，也就是方程的右端是变元 x 的线性函数，其系数是 t 的连续函数，则在这种情况下李雅普诺夫意义下的渐近稳定性（即定义 3.2）和等度渐近稳定性（即定义 3.3）二者是等价的.

证：事实上，如果 $x_e < y < x$（纯量），则对于线性系统而言，根据解的存在唯一性知，对一切 t, t_0 都有 $\varphi(t; y, t_0) < \varphi(t; x, t_0)$. 所以当平衡态是渐近稳定时，总存在一个数 $r(t_0) > 0$，使当 $\|x_0\| \leqslant r(t_0)$ 时，就有 $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t; x_0, t_0) = 0$. 因此就有

$$T(\mu, x_0, t_0) \leqslant \max T(\mu, \pm r(t_0), t_0),$$

而当

$$t \geqslant t_0 + \max T(\mu, \pm r(t_0), t_0),$$

就总有

$$\|\varphi(t; x_0, t_0) - x_e\| < \mu.$$

这也就是说，平衡态 $\boldsymbol{x}_e$ 亦是"等度"渐近稳定的.

线性系统的另一个重要特性，即稳定性和初始状态与平衡态 $\boldsymbol{x}_e$ 之间的距离无关. 从而导致了大范围渐近稳定性的概念.

定义 3.4：动态系统 (3.1) 的平衡态 $\boldsymbol{x}_e$ 是大范围渐近稳定，如果

(i) 它是稳定的；

(ii) 当 $t \to \infty$ 时，每一个运动都收敛到 $\boldsymbol{x}_e$，即对 $\|x_0\| \leqslant r$ (r 是固定的，但可以充分大)的每一个运动都一致收敛到 $\boldsymbol{x}_e$.

而在定义 3.3 中所说的"等度"性是体现在 $T(\mu, r(t_0), t_0)$ 的选取与 $\boldsymbol{x}_0$ 无关上，所以大范围渐近稳定性就是大范围等度渐近稳定性.

对于线性动态系统而言，平衡态 $\boldsymbol{x}_e$ 的等度渐近稳定性和大范围的渐近稳定性二者是等价的.

如果存在某个常数 $B(\boldsymbol{x}_0, t_0)$，使得对一切 $t \geqslant t_0$，$\|\varphi(t; x_0, t_0)\| \leqslant B$，则对每个 $\boldsymbol{x}_0$，t_0，运动都是有界的. 如果对一切 $\|x_0\| \leqslant r$，$B(\boldsymbol{x}_0, t_0) \leqslant B(r, t_0)$，则运动是等度有界的. 正如前面已指出的那样，即上述的大范围渐近稳定性和大范围等度渐近稳定性都包含有这些性质.

如果考虑的动态系统是自治的，即方程 (3.1) 的右端不显含参变量 t，则上述定义中的 δ、r、T 都不依赖于 t_0，这就导致了平衡态的一致稳定性概念.

定义 3.5：动态系统 (3.1) 的平衡态 x_e 是一致稳定的，如果对任给一实数 $\varepsilon > 0$，都可找到一个只依赖于 ε 而与 t_0 无关的数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使当

$$\|x_0 - x_e\| \leqslant \delta(\varepsilon)$$

时，对所有 $t \geqslant t_0$ 都有

$$\|\varphi(t; x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon.$$

故可以说，一致稳定性是使 δ 不依赖于 t_0 的那种稳定性.

例如像前面考虑过的自治系统的稳定性，自然就是一致稳定性. 正如在第一章我们证明自治系统的平衡态的稳定性和渐近稳

定性的两个主要定理时所见到的那样，初始扰动范围 δ 的确定，只与给定的 ε 有关，而与初始时刻 t_0 的选取无关.

定义 3.6: 动态系统 (3.1) 的平衡态 $\boldsymbol{x}_e$ 是一致渐近稳定的，如果

(i) 平衡态 $\boldsymbol{x}_e$ 是一致稳定的;

(ii) 且存在一个 $r_0>0$, 对每个给定的 $\mu>0$, 都有一个实数 $T=T(\mu)$, 使当 $\|x_0\|\leqslant r_0$, $t_0\geqslant 0$ 时，就能推出对所有 $t\geqslant t_0+T(\mu)$, 有

$$\|\varphi(t; x_0, t_0)-x_e\|<\mu.$$

下面指出李雅普诺夫渐近稳定性定义和马塞尔的等度渐近稳定性定义之间的一个关系.

定理: 如果渐近稳定性和等度渐近稳定性对 t_0 都是一致的，那末它们是等价的.

证: 事实上，任取 $\mu>0$, 由于二者都是一致渐近稳定性，所以存在某个相应的 $\delta=\delta(\mu)>0$. 我们现在就来考虑渐近稳定性的初始扰动区域

$$\|x_0-x_e\|\leqslant r,$$

r 是某个正的常数. 问题就在于对这个初始扰动区域，是否能找到一个共同的 $T=T(\mu, r)$ (它只与 μ, r 有关，而与初始点 $\boldsymbol{x}_0$ 的选取无关), 使得从此区域内任何一点出发的积分曲线，在经过同一个时间 $T(\mu, r)$ 后，就进入以 t 轴为中心轴、μ 为半径的圆柱内? 如果能办到这一点，那末我们就从一致渐近稳定性导出了一致等度渐近稳定性.

下面就来找出这个共同的 $T(\mu, r)$.

由于假定平衡态 $\boldsymbol{x}_e$ 的渐近稳定性对 t_0 是一致的，所以任给 $\varepsilon=\dfrac{\delta}{2}>0$, 可以找到一个 $T=T\left(\dfrac{\delta}{2}, \boldsymbol{x}_0\right)$, 使得从初始点 $\boldsymbol{x}_0$ 出发的积分曲线在所有

$$t\geqslant t_0+T\left(\frac{\delta}{2}, \boldsymbol{x}_0\right)$$

时，都有

$$\|\varphi(t;\ x_0,\ t_0)-x_e\|\leqslant\frac{\delta}{2};$$

再根据解对初值的连续依赖性，故存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的某个邻域 $U(\boldsymbol{x}_0)$，使得当 $\boldsymbol{y}_0$ 在邻域 $U(\boldsymbol{x}_0)$ 中，则

$$\left\|\varphi\left(t_0+T\left(\frac{\delta}{2},\ x_0\right);\ y_0,\ t_0\right)-x_e\right\|\leqslant\delta.$$

这样一来，根据一致渐近稳定性的定义知，从初始点 $\boldsymbol{y}_0$ 出发的每一个运动，在经过 $t\geqslant t_0+T(\mu,\ \boldsymbol{x}_0)$ 的时间后，它始终保持在与 $\boldsymbol{x}_e$ 的距离至多为 μ 的范围内.

因为集合 $\|x_0-x_e\|\leqslant r$ 是紧致的，所以它能够被有限个确定的邻域 $U(\boldsymbol{x}_i)$，譬如说

$$U(\boldsymbol{x}_{10}),\ U(\boldsymbol{x}_{20}),\ \cdots,\ U(\boldsymbol{x}_{N0})$$

所覆盖，而对每一个 $U(\boldsymbol{x}_{i0})$，都存在一个相应的 $T\left(\frac{\delta}{2},\ \boldsymbol{x}_{i0}\right)$，因此我们规定

$$\max_{1\leqslant i\leqslant N}\left\{T\left(\frac{\delta}{2},\boldsymbol{x}_{i0}\right)\right\}=T(\mu,\ r)<\infty.$$

这样的 $T(\mu,\ r)$ 就与初始值 $\boldsymbol{x}_0$ 的选择无关. 因此任给 $\mu\geqslant0$，都可找到 $\delta=\delta(\mu)$，使得当 $\|x_0-x_e\|\leqslant\delta$ 时，对一切 $t\geqslant t_0+T(\mu,\ r)$ 就总有

$$\|\varphi(t;\ x_0,\ t_0)-x_e\|\leqslant\mu.$$

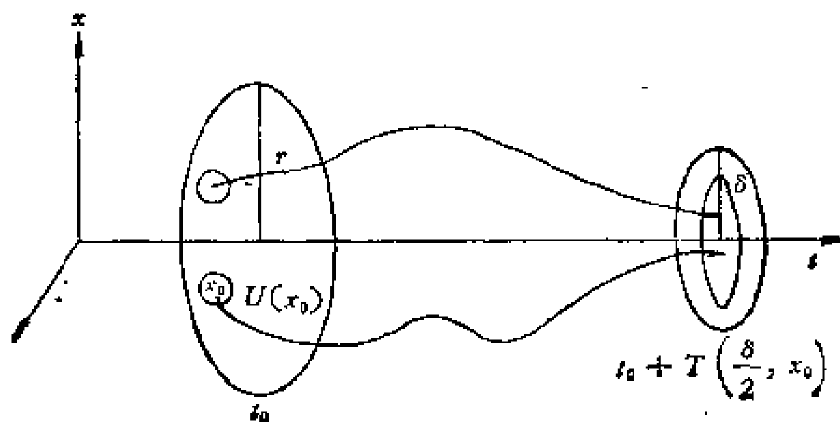


图 19

这就体现了平衡态 x_e 之稳定性的“等度”性. 所以最终我们可以说平衡态在一致渐近稳定的情况下，它也是一致等度渐近稳定的.

反过来由一致等度渐近稳定性推出一致渐近稳定性，这是显然的.

所以我们亦可定义平衡态的一致渐近稳定性,就是使 δ, r, T 不依赖 t_0 的等度渐近稳定性.

例题：考虑一个一阶线性系统

$$\dot{x} = (4t\sin t - 2t)x,$$

由分离变量法积分得

$$x = \varphi(t; x_0, t_0) = x_0\exp[4\sin t - 4t\cos t - t^2 - 4\sin t_0 + 4t_0\cos t_0 + t_0^2],$$

显见,当 $t \to \infty$ 时，$\|\varphi(t; x_0, t_0)\| \to 0$ 对固定的 t_0 和

$$|x_0| < r \ (r > 0 \text{ 是某个常数})$$

是一致地成立的.

但这并不能说明系统的平衡态 $x_e = 0$ 就是一致稳定的. 事实上,当取 $t = (2n+1)\pi$, $t_0 = 2n\pi$ 时,

$$x = \varphi[(2n+1)\pi, x_0, 2n\pi] = x_0\exp[\pi(4-\pi)(4n+1)].$$

因此,当 $t_0 \to \infty$ 时,此函数值 $\varphi[(2n+1)\pi, x_0, 2n\pi]$ 亦无限地增大,所以系统的平衡态不是一致稳定. 其所以不一致稳定,主要因方程的解不是一致有界的. 这就导致了下面大范围一致渐近稳定性的概念.

定义 3.7：动态系统 (3.1) 的平衡态 x_e 是大范围一致渐近稳定的,如果

(i) 它是一致稳定的;

(ii) 方程 (3.1) 的所有解都是一致有界. 即任给数 $r > 0$, 存在某个 $B(r) > 0$, 使当 $\|x_0 - x_e\| \leqslant r$ 时,则对一切 $t \geqslant t_0$ 就有

$$\|\varphi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leqslant B(r);$$

(iii) 方程 (3.1) 的每一运动 $\varphi(t; x_0, t_0)$ 随着 $t \to \infty$ 时，对 t_0 和任意固定的 $r(\|x_0 - x_e\| \leqslant r)$ 都一致地收敛到平衡态 x_e.

也即是说，任给 $r>0$ 和 $\mu>0$，存在某个 $T(\mu,r)$，使得当 $\|x_0-x_e\|\leqslant r$ 时，对所有 $t\geqslant t_0+T(\mu,r)$ 就有

$$\|\varphi(t;x_0,t_0)-x_e\|\leqslant\mu.$$

定义 3.8：动态系统(3.1)的平衡态 x_e 是按指数渐近稳定，如果存在一个 $\nu>0$，对任给 $\varepsilon>0$，都有一个 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $t_0\in I$，$\|x_0-x_e\|\leqslant\delta$ 时，对所有 $t\geqslant t_0$ 就总有

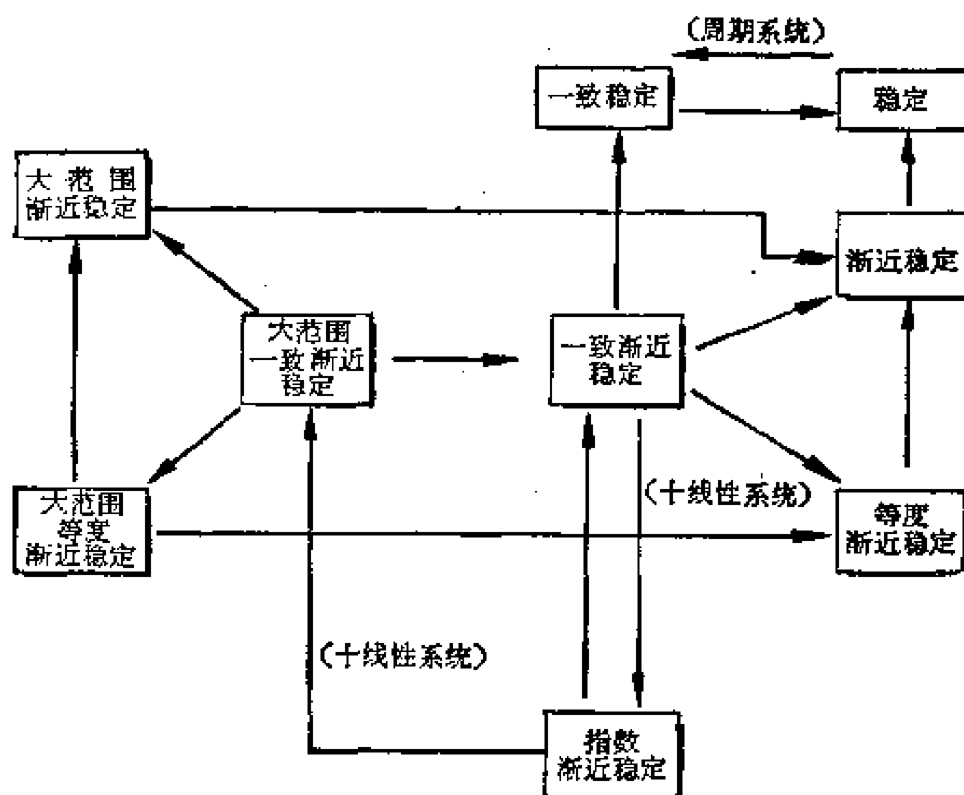
$$\|\varphi(t;x_0,t_0)-x_e\|\leqslant\varepsilon\exp[-\nu(t-t_0)].$$

例如，对于常系数线性方程组而言，如果它的零解是按指数渐近稳定，那末其零解就是大范围一致渐近稳定。

下面我们来谈谈各种稳定性定义之间的关系。首先应指出的，就是上述渐近稳定性概念中最重要的是一致渐近稳定性。其次我们立即看出下列结论显然成立。

(1) 指数渐近稳定⇒一致渐近稳定⇒一致稳定⇒李雅普诺夫意义下的稳定；

(2) 指数渐近稳定⇒一致渐近稳定⇒一致等度渐近稳定⇒等



度渐近稳定⇒李雅普诺夫意义下的渐近稳定⇒李雅普诺夫意义下的稳定；

(3) 大范围一致渐近稳定⇒大范围等度渐近稳定⇒大范围渐近稳定⇒李雅普诺夫意义下的渐近稳定；

(4) 大范围一致渐近稳定 ⇒大范围等度渐近稳定 ⇒ 等度渐近稳定⇒李雅普诺夫意义下的渐近稳定.

往下我们进一步的论证各种稳定性概念之间的关系.

定理 3.1: 如果 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ 在集合 $I \times S = \{(t, \boldsymbol{x}) \in R \times R^n, t \geqslant 0, \|x\| \leqslant r\}$ 上满足李浦希兹条件

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leqslant M \|x_1 - x_2\|.$$

其中M是唯一的一个李氏常数，则由平衡态 $\boldsymbol{x}_e$ 的一致等度渐近稳定性⇒一致渐近稳定性.

证: 任给 $\varepsilon > 0$，我们取 $\delta(\varepsilon) = \varepsilon \cdot e^{-MT(\varepsilon)}$，由 $\|x_0 - x_e\| < \delta(\varepsilon)$ 所确定的 (3.1) 之解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t; x_0, t_0)$ 满足下列估值:

$$\boldsymbol{\varphi}(t; x_0, t_0) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{\varphi}(\tau; x_0, t_0))d\tau,$$

$$\|\varphi(t; x_0, t_0)\| \leqslant \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, \varphi(\tau; x_0, t_0))$$

$$- f(\tau, 0)\|d\tau \leqslant \|x_0\| + M \int_{t_0}^{t} \|\varphi(\tau; x_0, t_0)\|d\tau.$$

由格劳沃尔-贝尔曼 (Gronwall-Bellman)[16] 引理知

$$\|\varphi(t; x_0, t_0)\| \leqslant \|x_0\| e^{M(t-t_0)}.$$

故当 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T(\varepsilon)$ 时,

$$\|\varphi(t; x_0, t_0)\| < \delta e^{MT(\varepsilon)} = \varepsilon e^{-MT(\varepsilon)} \cdot e^{MT(\varepsilon)} = \varepsilon.$$

因为假定了平衡态是一致等度渐近稳定，知存在一个 $\delta(\varepsilon)$，使当 $\|x_0\| < \delta$, $t_0 \geqslant 0$，就推出对所有 $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$ 有 $\|\varphi(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon$. 这里 $\delta(\varepsilon)$ 的选取显见与初始时刻 t_0 无关，平衡态是一致稳定，再加上平衡态的渐近稳定性，所以平衡态是一致渐近稳定.

定理 3.2: 如果 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ 是 t 的周期函数，或 $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$ 是不显含 t，则由平衡态 $\boldsymbol{x}_e$ 的稳定性⇒平衡态 $\boldsymbol{x}_e$ 的一致稳定性.

证：对于 $f(t, x)$ 不显含 t 的情形，定理显然成立。现就 $f(t, x)$ 是 t 的周期函数情形来讨论。不妨假定周期为 1，即 $f(t+1, x)=f(t, x)$。用反证法：如果平衡态 x_e 仅仅是稳定，不是一致稳定的话，那末就有 $\varepsilon>0$ 和序列 $x_{0n}\to 0$，t_{0n}，t_n，$t_{0n}<t_n$，使得

$$\|\varphi(t_n;\ x_{0n}, t_{0n})\|\geqslant\varepsilon.$$

考虑 $\tau_{0n}=t_{0n}-[t_{0n}]$（$[t_{0n}]$ 表示 t_{0n} 的最大整数部分），

$$\tau_n=t_n-[t_{0n}]\geqslant\tau_{0n}.$$

由于周期为 1，故

$$\begin{aligned}\varphi(\tau_n;\ x_{0n}, \tau_{0n}) &= \varphi(\tau_n+[t_{0n}];x_{0n}, \tau_{0n}\\ &\quad +[t_{0n}])=\varphi(t_n;\ x_{0n}, t_{0n}),\end{aligned}$$

$$\|\varphi(\tau_n;\ x_{0n}, \tau_{0n})\|=\|\varphi(t_n;\ x_{0n}, t_{0n})\|\geqslant\varepsilon.$$

根据解对初值的连续依赖性，注意到序列 $x_{0n}\to 0$，知解 $x_{1n}=\varphi(0, x_{0n}, \tau_{0n})$ 对充分大的 n 是存在，且趋于零；可是另一方面我们有

$$\|\varphi(\tau_n;\ x_{1n}, 0)\|=\|\varphi(\tau_n, x_{0n}, \tau_{0n})\|\geqslant\varepsilon.$$

这就与平衡态 x_e 是稳定的假设矛盾。故系统的平衡态是一致稳定的。

定理 3.3：如果 $f(t, x)$ 是 t 的周期函数，或 $f(t, x)$ 是不显含 t，则由平衡态的渐近稳定性⇒平衡态的一致渐近稳定性。

证：对于 (3.1) 是自治系统时，李雅普诺夫意义下的渐近稳定性就是一致渐近稳定性。因此仍旧针对周期系统来讨论。此时仍假定周期为 1。由于平衡态是在李雅普诺夫意义下的渐近稳定性，因此存在一个 $\delta_1>0$，使当 $\|x_0\|<\delta_1$ 时，就有

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t;\ x_0, 0)=0.$$

根据解对初值的连续依赖性知，对任给 $\delta_1>0$，都存在一个 $\delta_0>0$，使当 $\|x_0\|\leqslant\delta_0$，$0\leqslant t_0\leqslant 1$，就可推出：解 $x=\varphi(t;\ x_0, t_0)$ 在 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 上存在，且有

$$\|\varphi(0;\ x_0, t_0)\|<\delta_1.$$

如果平衡态不是一致渐近稳定，那末对每一个 $\delta_0>0$（前面所定义的），都存在 $\varepsilon>0$ 和序列 x_{0n}，t_{0n}，T_n，使当 $\|x_{0n}\|\leqslant\delta_0$，

$T_n \to \infty$ 时,就有

$$\|\varphi(t_{0n} + T_n;\ x_{0n},\ t_{0n})\| \geqslant \varepsilon.$$

点列 $\{x_{0n}\}$ 存在一个聚点 x_0, $\|x_0\| < \delta_0$; 数列 $\tau_{0n} = t_{0n} - [t_{0n}]$ 有一个聚点 τ_0, $0 \leqslant \tau_0 \leqslant 1$. 根据 δ_0 的定义知 $x_1 = \varphi(0;\ x_0,\ \tau_0)$ 存在且 $\|x_1\| < \delta_1$. 因为平衡态是渐近稳定,所以存在一个整数 N, 使得

$$\|\varphi\ (N,\ x_0,\ \tau_0)\| = \|\varphi\ (N,\ x_1,\ 0)\| < \frac{1}{2}\delta(\varepsilon).$$

这里 $\delta(\varepsilon)$ 是在上一个定理中刻画平衡态一致稳定的一个特征函数,因为由定理 3.2 知此时平衡态的稳定性就是一致稳定性. 根据解对初值的连续依赖性知,如果 N 足够大时,就有

$$\|\varphi(N;\ x_{0n},\ \tau_{0n})\| < \delta(\varepsilon),$$

再根据平衡态的一致稳定性知

$$\|\varphi(\tau;\ x_{0n},\ \tau_{0n})\| = \|\varphi(\tau + [t_{0n}];\ x_{0n},\ \tau_{0n} + [t_{0n}])$$
$$= \|\varphi(\tau + [t_{0n}];\ x_{0n},\ t_{0n})\| < \varepsilon,\ 当\ \tau \geqslant N.$$

而这一点与

$$\|\varphi(t_{0n} + T_n;\ x_{0n},\ t_{0n})\| \geqslant \varepsilon,\ 当\ T_n \to \infty\ 时$$

相矛盾,所以平衡态是一致渐近稳定的.

定理 3.4: 如果 f 是线性的,则由平衡态的一致渐近稳定性 $\Rightarrow$ 指数渐近稳定.

证: 由于假定 $f(t,\ x) = A(t)x$. 相应的我们考虑矩阵方程

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X,$$

此矩阵方程有解

$$X = \Phi(t;\ x_0,\ t_0) = R(t)R^{-1}(t_0),$$

其中 $R(t)$ 是上矩阵方程具有初始条件 $R(0) = I$ (I 是单位矩阵) 的一个解. 根据平衡态的一致稳定性知,对某一个固定 $\varepsilon_0 > 0$, 都存在 $\delta = \delta(\varepsilon_0) > 0$, 使当 $t \geqslant t_0$ 时就有

$$\|R(t)R^{-1}(t_0)\| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{\delta(\varepsilon_0)} = N \geqslant 1,$$

再根据平衡态的一致渐近稳定性，对给定的$\frac{1}{2}\delta(\varepsilon_0)$，都存在一个$T = T\left(\frac{1}{2}\delta(\varepsilon_0)\right)$，使当$t \geqslant t_0 + T\left(\frac{1}{2}\delta(\varepsilon_0)\right)$时有

$$\|R(t)R^{-1}(t_0)\| < \frac{1}{2},$$

所以当$t \geqslant t_0 + nT\left(\frac{1}{2}\delta(\varepsilon_0)\right)(n = 0, 1, 2, \cdots)$时，就有

$$\|R(t)R^{-1}(t_0)\| < \frac{1}{2^n}N.$$

如果我们取$\nu = \dfrac{\log 2}{T\left(\frac{1}{2}\delta(\varepsilon_0)\right)}$，那就有

$$\|R(t)R^{-1}(t_0)\| < \frac{2N}{2^{n+1}} = 2N\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$< 2N\frac{1}{2} = 2N\exp(-\nu t - t_0)$$

即

$$\|R(t)R^{-1}(t_0)\| < 2N\exp(-\nu(t - t_0)),\quad t \geqslant t_0 \geqslant 0.$$

这就说明了平衡态按指数渐近稳定。

下面举几个例题来说明：

例 3.1：平衡态的一致稳定性并不能由等度渐近稳定性推出，甚至在系数有界的一阶线性方程的情况下也不一定能做到这点。

$$\dot{x} = -[13 + 12\sin\log(t+1) + 12t(t+1)^{-1}\cos\log(t+1)]x,$$

这个方程的通积分是

$$x(t) = x(o)\exp\{-[13 + 12\sin\log(t+1)]t\},$$

即

$$|x(t)| \leqslant |x(o)|\exp(-t) = |x(o)|e^{-t}.$$

任给$\varepsilon > 0$，$\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使当$|x(o)| \leqslant \delta(\varepsilon)$时，则对所有$t \geqslant T = \log\frac{\delta}{\varepsilon}$，就有$|x(t)| \leqslant \delta(\varepsilon)e^{-T} = \delta(\varepsilon)\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} = \varepsilon$，

这里的 T 显见与初始点 x_0 的选取无关，故方程的平凡解 $x_t=0$ 是等度渐近稳定.

但如果我们选取

$$t_n=\exp\left[(4n+1)\frac{\pi}{2}\right]-1,$$

$$t_n'=\exp\left[(4n+3)\frac{\pi}{2}\right]-1,$$

我们有

$$\begin{aligned}x_n&=x(o)\exp\left\{-\left[13+12\sin(4n+1)\frac{\pi}{2}\right]t_n\right\}\\&=x(o)\exp(-25t_n),\\x_n'&=x(o)\exp\left\{-\left[13+12\sin(4n+3)\frac{\pi}{2}\right]t_n'\right\}\\&=x(o)\exp\{-t_n'\},\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}x_n'/x_n&=\exp\{-t_n'+25t_n\}=\exp\left\{1-\exp\left[(4n+3)\frac{\pi}{2}\right]\right.\\&\left.\quad+25\exp\left[(4n+1)\frac{\pi}{2}\right]-25\right\}\\&=\exp\left\{(25-e^{\pi})\exp\left[(4n+1)\frac{\pi}{2}\right]-24\right\}.\end{aligned}$$

注意

$$e^{\pi}=e^{3.14159},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n'}{x_n}=\infty.$$

此极限关系说明了：与初始时间 t_0 选取无关的初始扰动范围 $\delta=\delta(\varepsilon)$ 是不存在的．故平衡态不是一致稳定.

例 3.2：一致渐近稳定性也不能由一致等度渐近稳定性推出，甚至对一阶线性方程亦是如此．考虑

$$\dot{x}=(6t\sin t-2t)x,$$

此方程的通积分是

$$x = x(o)\exp(6\sin t - 6t\cos t - t^2).$$

当 $T > 6$, $t \geqslant t_0 + T$, $t_0 \geqslant 0$ 时,我们有

$$\frac{x}{x_0} = \exp(6\sin t - 6t\cos t - t^2 - 6\sin t_0 + 6t_0\cos t_0 + t_0^2)$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \exp[12 + 6(t + t_0) - t^2 + t_0^2] \\
&= \exp[12 + (t + t_0)(6 - t + t_0)] \\
&\leqslant \exp[12 + (T + 2t_0)(6 - T)] \\
&= \exp[12 + T(6 - T) - 2t_0(T - 6)] \\
&\leqslant \exp[12 + T(6 - T)].
\end{aligned}$$

如果 $T = T(\varepsilon)$ 取得充分大,就会使

$$\exp[12 + T(6 - T)] < \varepsilon,$$

即取 $T = T(\varepsilon) > 3 + (21 - \log\varepsilon)$, 就有 $x/x_0 < \varepsilon$. 这就说明了存在一个 $\delta_0 > 0$, 使得对于每一个 $\varepsilon > 0$, 总有一个只与 ε 有关的 $T = T(\varepsilon)$ 存在, 当 $\|x_0\| < \delta_0$, $t_0 \geqslant 0$, 对所有 $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$ 就总有

$$\|\varphi(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon,$$

所以系统的平衡态是一致等度渐近稳定.

可是,当我们取 $t_n = n\pi$ 时,就有

$$\begin{aligned}
\frac{x_{2n+1}}{x_{2n}} &= \exp[6\sin(2n + 1)\pi - 6(2n + 1)\pi\cos(2n + 1)\pi \\
&\quad - (2n + 1)^2\pi^2 - 6\sin 2n\pi + 6(2n\pi)\cos 2n\pi \\
&\quad + (2n\pi)^2] = \exp[6(2n + 1)\pi + 6(2n\pi) \\
&\quad + (2n\pi)^2 - (2n + 1)^2\pi^2] = \exp[24n\pi \\
&\quad + 6\pi + 4n^2\pi^2 - 4n^2\pi^2 - 4n\pi^2 - \pi^2] \\
&= \exp[(6 - \pi)(4n + 1)\pi],
\end{aligned}$$

故
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n+1}}{x_{2n}} = +\infty.$$

这就说明了系统的平衡态不是一致稳定, 当然也就不可能是一致渐近稳定.

例 3.3: 指数渐近稳定性不能由一致渐近稳定性推出,甚至对

右端是解析的一阶方程也不一定能做到这点。

考虑

$$\dot{x} = -x^3,$$

分离变量积分得 $x^{-2} - x_0^{-2} = 2(t - t_0)$，

$$x = x_0[1 + 2x_0^2(t - t_0)]^{-\frac{1}{2}},$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} x_0[1 + 2x_0^2(t - t_0)]^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

任给 $\varepsilon > 0$，取 $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1 - 2\varepsilon^2 T(\varepsilon)}} > 0$，使当 $|x_0| < \delta(\varepsilon)$，总存在 $T(\varepsilon)$，使对所有 $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$ 时，就有

$$|\varphi(t;\ x_0, t_0)| < \varepsilon.$$

所以系统的平衡态是一致渐近稳定的。可是解的表达式显然不是 t 的指数函数，因此平衡态当然就不是按指数渐近稳定的。

例 3.4： 等度渐近稳定性不能由渐近稳定性推出。

考虑用极坐标 (r, φ) 表示的二阶微分方程组

$$\dot{r} = r\frac{\dot{g}(t, \varphi)}{g(t, \varphi)},\ \dot{\varphi} = 0.$$

其中

$$g(t, \varphi) = \frac{\sin^4\varphi}{\sin^4\varphi + (1 - t\sin^2\varphi)^2} + \frac{1}{1 + \sin^4\varphi}\cdot\frac{1}{1 + t^2}.$$

方程的通解是

$$r = cg(t, \varphi_0),\ \varphi = \varphi_0;\ c > 0 \text{ 是任意常数.}$$

当取 $\varphi_0 = k\pi$，则解为

$$r = cg(t, k\pi) = c\cdot\frac{1}{1 + t^2},\ \varphi = k\pi.$$

如果 $\varphi_0 \neq k\pi$，此时取 $t_0 = \dfrac{1}{\sin^2\varphi_0}$，则解可以写成

$$g(t, \varphi_0) = \frac{\sin^4\varphi_0}{\sin^4\varphi + (1 - t\sin^2\varphi_0)^2} + \frac{1}{1 + \sin^4\varphi}\cdot\frac{1}{1 + t^2}$$

$$= \frac{1}{1 + (t - t_0)^2} + \frac{t_0^2}{1 + t_0^2}\cdot\frac{1}{1 + t^2},$$

$$r = c\left(\frac{1}{1 + (t - t_0)^2} + \frac{t_0^2}{1 + t_0^2}\cdot\frac{1}{1 + t^2}\right),\ \varphi = \varphi_0.$$

显见在 $\varphi_0 = k\pi$ 或 $\varphi_0 \neq k\pi$ 这两种情况下，我们都有

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = 0.$$

所以系统的平衡态是渐近稳定的.

可是，当我们把初始角 φ_0 取得充分接近 $k\pi$ 时，解在 $t = t_0$ 时为

$$r(t_0) = r_0\left(1 + \frac{t_0^2}{(1 + t_0^2)^2}\right) > r_0.$$

要注意，由于初始时刻 $t_0 = \frac{1}{\sin^2\varphi_0}$，当 φ_0 充分接近 $k\pi$ 时，t_0 要多大就有多大. 因此在这种情况下根本不存在 $T = T(\varepsilon)$，使当 $t \geqslant T(\varepsilon)$ 时，解 $r = r(t)$ 就进入事先给定的以 t 轴为中心轴、ε 为半径的圆筒内.

所以系统的平衡态不具有等度渐近稳定性.

§4. 稳定性与李雅普诺夫函数之间关系的若干主要结果

在这节我们就转入讨论上述各种不同类型的稳定性概念和满足一定条件的李雅普诺夫函数之间的关系. 为了系统、完整起见，我们仍简单扼要的介绍一些主要的结果.

假定 $V(t, \boldsymbol{x})$ 是一个实的纯量函数，它在集合

$$I_0 \times S_0 = \{(t, x) \in R \times R^n | t \geqslant t_0 \geqslant 0,\ \|x\| < r_0\}$$

上有定义；对任意 $\boldsymbol{x} \in S_0$，$V(t, \boldsymbol{x})$ 在 I_0 上连续，且 $V(t, 0) = 0$ 在 I_0 上成立；$V(t, x)$ 满足李浦希兹条件：即对集合的任意两点 $\boldsymbol{x}_1 \in S_0$，$\boldsymbol{x}_2 \in S_0$，都有

$$\|V(t, x_1) - V(t, x_2)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|,$$

L 是一个与定义区域有关的正常数，$0 \leqslant t_0 \leqslant t < \infty$ 此时我们就把函数 V 的这种性质记为 $V \in C_0$；如果 $V(t, \boldsymbol{x})$ 对所有的变元有一致有界的一阶连续偏导数，我们就记为 $V \in C_1$，其余依此类推.

为了使我们的讨论方便起见，我们把 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ 与 $V(t, \boldsymbol{x})$ 有定义的、包含原点 $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{o}$ 的共同邻域记为 $N = \{\boldsymbol{x} \in S_0 \cap S, \|\boldsymbol{x}\| < \rho\}$，

$\rho > 0$ 是一常数，$I_0 \cap I = I = [T_0, \infty)$，$T_0 \geqslant 0$。

虽然我们在前面对函数 $V(t, \boldsymbol{x})$ 的定号性已有了定义，但是为了我们在下面证明定理时的方便起见，我们把函数 V 的定号性定义换成另一种形式来叙述。

定义 4.1: 函数 $V(t, \boldsymbol{x})$ 在集合 $I \times N$ 上是正定的，如果任给 $\varepsilon > 0$，$0 < \varepsilon < \rho$，总存在一个 $\mu = \mu(\varepsilon) > 0$，使当 $t \in I$，$\varepsilon \leqslant \|x\| < \rho$ 时，就有 $V(t, \boldsymbol{x}) \geqslant \mu(\varepsilon)$。

同理我们可定义函数 $V(t, \boldsymbol{x})$ 在集合 $I \times N$ 上是负定的，如果 $-V(t, \boldsymbol{x})$ 在 $I \times N$ 上是正定的话。

定义 4.2: 实函数 $V(t, \boldsymbol{x})$ 被称为动态系统

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \tag{4.1}$$

在集合 $I \times N$ 上有定义的一个李雅普诺夫函数，如果它满足：

(i) 在集合 $I \times N$ 上 $V(t, \boldsymbol{x})$ 有定义，$V \in C_0$ 且是正定的；

(ii) 任给 $\boldsymbol{x} \in N$，$V(t, \boldsymbol{x})$ 在 I 上连续，$V(t, 0) = 0$；

(iii) $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \leqslant 0$ 在集合 $I \times N$ 上成立。

定理 4.1 (李雅普诺夫的稳定性定理):

如果在 $I \times N$ 上，对动态系统 (4.1)

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \qquad (f(t, x_e) = 0)$$

而言，存在一个李雅普诺夫函数，则平衡态 x_e 是稳定的。

证: 任给 $\varepsilon > 0$，$0 < \varepsilon < \rho$，根据 $V(t, \boldsymbol{x})$ 的正定性知，存在一个 $\mu(\varepsilon) > 0$，使当 $t \in I$，$\varepsilon \leqslant \|x\| < \rho$ 时，$V(t, \boldsymbol{x}) \geqslant \mu$。由 $V(t, 0) = 0$ 及 $V(t, \boldsymbol{x})$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 的连续性知，对任何 $t_0 \in I$，都有一个 $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$，使当 $\|x\| < \delta$ 时，就有

$$V(t_0, \boldsymbol{x}) < \mu.$$

由此即可断定：如果 $\|x_0\| < \delta$ 时，则对于所有 $t \geqslant t_0$ 都有

$$\|x(t)\| = \|\varphi(t;\, x_0, t_0)\| < \varepsilon.$$

用反证法：假定不然，则根据解 $\boldsymbol{\varphi}(t;\, \boldsymbol{x}_0, t_0)$ 关于 t 的连续性

知，必在某一个 $t = t_1 > t_0$ 时有 $\|\varphi(t_1; x_0, t_0)\| = \varepsilon$，因而有

$$\mu \leqslant V(t_0, \boldsymbol{\varphi}(t_1; \boldsymbol{x}_0, t_0)) \leqslant V(t_0, \boldsymbol{x}_0) < \mu,$$

这就导出矛盾. 因此平衡态 $\boldsymbol{x}_e$ 是稳定的.

定理 4.2 (佩尔西德斯基一致稳定性定理): 如果在集合 $I \times N$ 上，对动态系统 (4.1) 而言，存在一个李雅普诺夫函数，使当 $\boldsymbol{x} \to 0$，$V(t, \boldsymbol{x}) \to 0$ 在 $t \in I$ 上一致的成立，则平衡态 $\boldsymbol{x}_e$ 是一致稳定.

证: 由于当 $\boldsymbol{x} \to 0$，$V(t,\boldsymbol{x}) \to 0$ 在 $t \in I$ 上一致的成立，因此仍旧如定理 4.1，可以选取到一个与初始时刻 t_0 无关的初始扰动范围 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$. 故得平衡态的一致稳定性.

定理 4.3: 如果在集合 $I \times N$ 上，对动态系统 (4.1) 而言，存在一个李雅普诺夫函数 $V(t, \boldsymbol{x})$，使得 $\dot{V}(t, \boldsymbol{x})$ 是负定的，则平衡态 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 是稳定的.

证: 根据定理 4.1 知平衡态 $\boldsymbol{x}_e$ 是稳定的. 因此任给 ρ_1，$(0 < \rho_1 < \rho)$ 与任一 $t_0 \in I$，都有一个 $\delta = \delta(t_0, \rho_1) > 0$，使当 $\|x_0\| < \delta$，则对所有 $t \geqslant t_0$ 就有 $\|\varphi(t; x_0, t_0)\| < \rho_1$.

我们现任取 $\varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon < \rho_1)$，根据 $V(t, \boldsymbol{x})$，$-\dot{V}(t, \boldsymbol{x})$ 的正定性知，存在 $\mu(\varepsilon) > 0$，$\nu(\varepsilon) > 0$，使当 $t \in I$，$\varepsilon \leqslant \|x\| < \rho$ 时就有 $V(t, \boldsymbol{x}) \geqslant \mu(\varepsilon)$，$\dot{V}(t, \boldsymbol{x}) \leqslant -\nu(\varepsilon)$.

令

$$\lambda(t_0, \rho_1) = \sup\{V(t_0, \boldsymbol{x}) \mid \|x\| \leqslant \delta\},$$

取

$$\tau_0(t_0, \rho_1, \varepsilon) = \frac{\lambda}{\nu}.$$

下面我们就来证明，由初始扰动区域 $\|x_0\| < \delta$ 内任一点 $\boldsymbol{x}_0$ 出发的积分曲线 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$，在 $t \geqslant t_0$ 后就总有

$$\|\varphi(t; x_0, t_0\| < \varepsilon.$$

用反证法: 假定在 $t \geqslant t_0$ 后的时刻有 $\|\varphi(t; x_0, t_0\| \geqslant \varepsilon$，此时在 $[t_0, t_0 + \tau_0]$ 上就有 $\varepsilon \leqslant \|\varphi(t; x_0, t_0)\| < \rho_1$，因此在 $[t_0,$

$t_0+\tau_0]$ 上有

$$\dot{V}(t,\boldsymbol{x})\leqslant -\nu.$$

这样一来，

$$\begin{aligned}\mu &\leqslant V(t_0+\tau_0,\boldsymbol{\varphi}(t_0+\tau_0,x_0,t_0))\\ &\leqslant V(t_0,\boldsymbol{x}_0)-\nu\tau_0=V(t_0,x_0)-\lambda\\ &=V(t_0,x_0)-\sup\{V(t_0\boldsymbol{x})\mid \|x\|<\delta\}\leqslant 0,\end{aligned}$$

这就导出矛盾．所以在 $t\geqslant t_0$ 后总有 $\|\varphi(t;x_0,t_0)\|<\varepsilon$.

因此任给 $t_0\in I$ 与 ρ_1 $(0<\rho_1<\rho)$，就存在一个 $\delta=\delta(t_0,\rho_1)>0$.

当 $\|x_0\|<\delta$，那末对于任给 $\varepsilon>0$ $(0<\varepsilon<\rho_1)$，就存在一个 $\tau_0(t_0,\rho_1,\varepsilon)>0$ 和一个 $t_1(t_0,\boldsymbol{x}_0)\in[t_0,t_0+\tau_0)$，使得

$$\|\varphi(t_1;x_0,t_0)\|<\varepsilon.$$

利用这个性质可以证明下列推论．

推论： 如果定理 4.3 中假设成立，任给 $t_0\in I$ 与 ρ_1 $(0<\rho_1<\rho)$，则存在一个 $\delta=\delta(t_0,\rho_1)>0$，当 $\|x_0\|<\delta$ 时，对任给的测度为零的集 $\{\varepsilon_n\}$，$0<\varepsilon_n<\rho_1$，那末就存在一个发散的非减的序列 $\{t_n\}$，$t_n\geqslant t_0$，和一个发散的序列 $t'_n(t_0,\rho_1,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)>0$，使得

$$t_n<t_0+t'_n,\ \|\varphi(t_n;x_0,t_0)\|<\varepsilon_n,\ n=1,2,\cdots.$$

证： (1) 任给 $t_0\in I$，和 $\rho_1(0<\rho_1<\rho)$，就存在一个 $\delta=\delta(t_0,\rho_1)$，当 $\|x_0\|<\delta$ 时，对 $t\geqslant t_0$ 就有 $\|\varphi(t;x_0,t_0)\|<\rho_1$. 同样令

$$\lambda(t_0,\rho_1)=\sup\{V(t_0,\boldsymbol{x})\mid \|x\|\leqslant\delta\}.$$

(2) 再任给测度为零的集 $\{\varepsilon_n\}$，$0<\varepsilon_n<\rho_1$，根据函数 $V(t,\boldsymbol{x})$，$-\dot{V}(t,\boldsymbol{x})$ 的正定性知有两个序列

$$\{\mu_n;\ \mu_n(\varepsilon_n)>0\},\ \{\nu_n;\ \nu_n(\varepsilon_n)>0\},$$

使当 $t\in I$，$\varepsilon_n\leqslant\|x\|<\rho_1$，就有

$$V(t,\boldsymbol{x})\geqslant\mu_n,\ \dot{V}(t,\boldsymbol{x})\leqslant-\nu_n.$$

(3) 令 $\tau_{n-1}(t_0,\rho_1,\varepsilon_n)=\dfrac{\lambda}{\nu_n}$,

根据定理 4.3 的证明过程知存在一个序列 $\{t_n\}$，$t_n \geqslant t_{n-1}$，使得

$$\|\varphi(t_n;\ x_0,\ t_0)\| < \varepsilon_n,\ n = 1,\ 2,\ \cdots.$$

显然，此时

$$t_0 \leqslant t_n < t_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \tau_k;$$

令

$$t'_n(t_0,\ \rho_1,\ \varepsilon_1,\ \cdots,\ \varepsilon_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \tau_k,$$

下面我们来证明 $\{t_n\}$ 是一个发散序列.

因为 $\{t_n\}$ 是非减，如果 $\{t_n\}$ 收敛到 t_∞，$T < t_\infty < \infty$，那末就有 $\boldsymbol{\varphi}(t;\ \mathbf{0},\ t_\infty) = \mathbf{0}$. 这就破坏了零解的唯一性，从而导出矛盾. 因此 $\{t_n\}$ 必发散到∞. 同理很明显地看出 $\{t'_n\}$ 亦发散到∞.

定理 4.4: 如果 $\boldsymbol{f}(t,\ \boldsymbol{x})$ 在集合 $I\times N$ 上有界，且在集合 $I\times N$ 上存在一个正定的李雅普诺夫函数 $V(t,\ \boldsymbol{x})$，使得 $\dot{V}(t,\ \boldsymbol{x})$ 在 $I\times N$ 上是负定的，则平衡态 $\boldsymbol{x}_e$ 是渐近稳定的.

证: 由定理 4.3 知平衡态是稳定的，所以任给 ρ_1，$0 < \rho_1 < \rho$ 和 $t_0 \in I$，都存在一个 $\delta = \delta(t_0,\ \rho_1) > 0$，使当 $\|x_0\| < \delta$ 时，对所有 $t \geqslant t_0$ 就有 $\|\boldsymbol{\varphi}(t;\ x_0,\ t_0)\| < \rho_1$.

往下用反证法来证明平衡态 $\boldsymbol{x}_e$ 是渐近稳定的.

证: (1) 如果 $x_e = 0$ 不是渐近稳定，那末就存在一个 $\tau_0 \in I$ 和一个 ξ，$\|\xi\| < \delta(\tau_0)$，使得对某个 ε $(0 < \varepsilon < \rho_1)$ 和某一个发散序列 $\{\tau_n\}$ $(\tau_n \in I)$，我们有 $\|\varphi(\tau_n;\ \xi,\ \tau_0)\| = \varepsilon$.

(2) 令 $M > 0$ 是 $\boldsymbol{f}(t,\ \boldsymbol{x})$ 在集合 $I\times N$ 上的一个上界，那末当 $t \geqslant \tau_0$ 时，就有

$$\|\varphi(t;\ \xi,\ \tau_0) - \varphi(\tau_n;\ \xi,\ \tau_0)\| \leqslant M|t - \tau_n|,\quad n = 1,\ 2,\cdots.$$

因此在 $J_n = \left[\tau_n - \dfrac{\varepsilon}{2M},\ \tau_n + \dfrac{\varepsilon}{2M}\right]$上有

$$\|\varphi(t;\ \xi,\ \tau_0)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

我们可以假定，$J_{n+1} \cap J_n = 0$，且 $\tau_1 > \tau_0 + \dfrac{\varepsilon}{2M}$. 根据$V(t,\ \boldsymbol{x})$，

$-\dot{V}(t, \boldsymbol{x})$ 的正定性知，任给 ε $(0 < \varepsilon < \rho_1)$，存在常数 $\mu(\varepsilon) > 0$，$\nu(\varepsilon) > 0$，使得当 $t \geqslant T$，$\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \|x\| < \rho_1$ 时，

$$V(t, \boldsymbol{x}) \geqslant \mu(\varepsilon), \quad \dot{V}(t, \boldsymbol{x}) \leqslant -\nu(\varepsilon).$$

因此

$$\mu \leqslant V\left(\tau_n + \frac{\varepsilon}{2M}\right), \boldsymbol{\varphi}\left(\tau_n + \frac{\varepsilon}{2M}, \boldsymbol{\xi}, \tau_0\right)$$

$$\leqslant V(\tau_0, \xi) - \nu n \frac{\varepsilon}{M}$$

$$V\left(\tau_n + \frac{\varepsilon}{2M}, \boldsymbol{\varphi}\left(\tau_n + \frac{\varepsilon}{2M}; \xi, \tau_0\right)\right)$$

$$\leqslant V(\tau_0, \xi) + n \cdot \frac{\varepsilon}{M}(-\nu).$$

故当 n 充分大时，此不等式右端就小于零，这与 $V(t, \boldsymbol{x})$ 的正定性矛盾. 所以平衡态是渐近稳定.

推论： 如果在集合 $I \times N$ 上，$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ 是不显含 t 或者是关于 t 的周期函数，且假定存在一个在 $I \times N$ 上确定的李雅普诺夫函数，使得 $\dot{V}(t, \boldsymbol{x})$ 在集合 $I \times N$ 上是负定的，则平衡态是一致渐近稳定的.

定理 4.5： 如果在集合 $I \times N$ 上，对动态系统 (4.1) 而言，存在一个 $V(t, \boldsymbol{x}) \in C_0$，它是正定、且具有无穷小上界，$\dot{V}(t, \boldsymbol{x})$ 是负定，亦即

$$a(\|x\|) \leqslant V(t, \boldsymbol{x}) \leqslant b(\|x\|), \quad \dot{V}(t, \boldsymbol{x}) \leqslant -c(\|x\|),$$

$a(r)$，$b(r)$，$c(r)$ 是连续递增的正函数，仅当 $r = 0$ 时，

$$a(0) = b(0) = c(0) = 0,$$

则平衡态 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 一致渐近稳定.

证： 任给 $\varepsilon > 0$，可以取如此的 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得

$$a(\varepsilon) > b(\delta(\varepsilon))$$

（根据 $a(r)$，$b(r)$ 的性质完全可办到）. 如果 $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$，$t_0 \geqslant 0$，$t \geqslant t_0$. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$，由 $\dot{V}(t, \boldsymbol{x})$ 的负定性知

$$\left.\frac{dV(t, \boldsymbol{\varphi}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0))}{dt}\right|_{t=t_0} < 0,$$

故我们有

$$a(\|x\|) \leqslant V(t, \boldsymbol{x}) \leqslant V(t_0, \boldsymbol{x}_0) \leqslant b(\delta(\varepsilon)) < a(\varepsilon)$$

$\Rightarrow$当 $t \geqslant t_0$ 后(只要注意到 $a(r)$ 是连续递增之正函数),有

$$\|x\| = \|\varphi(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon.$$

平衡态 $\boldsymbol{x}_e$ 是一致稳定.

另一方面,如果 $\|x_0\| < \delta_0$, 当我们取 $T(\varepsilon) = \dfrac{b(\delta_0)}{c(\delta(\varepsilon))}$ 时, 就可以证明在 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T(\varepsilon)$ 中一定存在 t_1 使得 $\|x(t_1)\| < \delta(\varepsilon)$. 用反证法: 如果在 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T(\varepsilon)$, 有 $\|x(t)\| > \delta(\varepsilon)$, 则由 $\dot{V}(t, x)$ 的负定性知

$$\dot{V}(t, x) \leqslant -c[\delta(\varepsilon)],$$

所以

$$\begin{aligned} V(t, \boldsymbol{x}) &\leqslant V(t_0, \boldsymbol{x}_0) - c(\delta(\varepsilon)) \cdot (t - t_0) \\ &\leqslant b(\delta(\varepsilon)) - c(\delta(\varepsilon))(t - t_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(t, \boldsymbol{x})|_{t=t_0+T(\varepsilon)} &\leqslant V(t_0, \boldsymbol{x}_0) - c(\delta(\varepsilon))T(\varepsilon) \\ &\leqslant b(\delta_0) - b(\delta_0) = 0. \end{aligned}$$

这就与 $V(t, \boldsymbol{x})$ 的正定性矛盾. 故在 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T(\varepsilon)$ 中有一个 t_1, 使得 $\|x(t_1)\| = \|\varphi(t_1; x_0, t_0)\| < \delta(\varepsilon)$. 当 $t \geqslant t_1$ 时,

$$\|\varphi(t; x_0, t_0)\| = \|\varphi(t; x_1, t_1)\| < \varepsilon,$$

故在 $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$ 后就更加有

$$\|\varphi(t; x_0, t_0)\| = \|\varphi(t; x_1, t_1)\| < \varepsilon.$$

注意,这里 $T(\varepsilon)$ 是与初始时刻的选取无关, 故得平衡态的一致渐近稳定性:

定理 4.6: 如果在集合 $I \times N$ 上, 存在一个正定的 $V(t, \boldsymbol{x}) \in C_0$. (即 $V(t, \boldsymbol{x}) \geqslant a(\|x\|)$, 其中 $a(r)$ 是连续递增的正函数, $a(0) = 0$), 使得

$$\dot{V}(t, \boldsymbol{x}) \leqslant -c(V(t, \boldsymbol{x})),$$

其中 $c(V)$ 和 $a(r)$ 有同样的性质,则平衡态是渐近稳定.

证: 由于 $V(t, \boldsymbol{x}) \in C_0$, 且正定, 故任给 $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < \rho$, 就存在一个 $\mu(\varepsilon) > 0$, 使当 $t \in [0, \infty)$, $\varepsilon \leqslant \|x\| < \rho$ 时就有

$V(t, x) \geqslant \mu(\varepsilon)$. 又因 $V(t, 0) = 0$ $V(t, x) \in C_0$,即 $V(t, x)$ 是 x 的连续函数,对任何 $t_0 \in [0, \infty)$ 和 $\mu(\varepsilon) > 0$, 都存在一个 $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$, 使当 $\|x\| < \delta$ 时, 就有 $V(t_0, x) < \mu$, 由此即可推出:

当我们把初始值 x_0 取在半径为 δ 的球 $\|x\| = \delta$ 内, 即 $\|x_0\| < \delta$, 则对于所有 $t \geqslant t_0$, $\|\varphi(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon$.

用反证法: 假定不然, 则根据 $\varphi(t, x_0, t_0)$ 关于 t 的连续性知,存在 $t = t_1 > t_0$ 时刻使得 $\|\varphi(t_1; x_0, t_0)\| = \varepsilon$,因此由

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -c(V) \leqslant 0,$$

我们有

$$\mu \leqslant V(t_1, \varphi(t_1; x_0, t_0)) \leqslant V(x_0, t_0) < \mu,$$

这就导出矛盾. 平衡态 x_e 是稳定的.

下面我们再进一步证明 $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi(t; x_0, t_0) = 0$.

沿着过 (t_0, x_0) 的积分曲线我们有

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -c(V(t, x)),$$

$$\int_{V(x_0, t_0)}^{V(t, \varphi(t; x_0, t_0))} \frac{dV}{c(V)} \leqslant -(t - t_0).$$

当 $t \to +\infty$ 时,这个积分趋于 $-\infty$,这只有当 $V(t, \varphi(t; x_0, t_0)) \to 0$ 时才可能,这是因为 $V \in C_0$, 而平衡态稳定,故 $\lim\limits_{t \to \infty} V(t, \varphi(t; x_0, t_0))$ 是有限的, 再则 $c(V)$ 是正的连续递增函数, 仅当 $V = 0$ 时, $c(0) = 0$.

要使 $\int_{V(t_0, x_0)}^{V(t, \varphi(t; x_0, t_0))} \frac{dV}{c(V)}$ 发散, 仅当 $V = 0$ 是被积函数 $\frac{1}{c(V)}$ 的奇点;又因 $V(t, \varphi(t; x_0, t_0)) > a(\|\varphi(t; x_0, t_0)\|)$
由

$$\lim_{t \to \infty} V(t, \varphi(t; x_0, t_0)) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} a(\|\varphi(t; x_0, t_0)\|) = 0 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \varphi(t; x_0, t_0) = 0$$

故平衡态是渐近稳定的.

定理 4.7: 如果在集合 $I\times N$ 上存在一个有界正定的函数 $V(t,\boldsymbol{x})\in C_0$, 即 $V(t,\boldsymbol{x})\geqslant a(\|x\|)$, 且

$$\dot{V}(t,\boldsymbol{x})\leqslant -c(V(t,\boldsymbol{x})),$$

这里 $a(r)$ 与 $c(V)$ 都是正的连续的递增函数,仅当 $r=0$ 和 $V=0$ 时,才有 $a(0)=0$, $c(0)=0$; 又假定 (4.1) 的平衡态是一致稳定,则平衡态是一致渐近稳定.

证: 由于 $V(t,\boldsymbol{x})$ 在 $I\times N$ 上有界,故可令

$$B=\sup\{V(t,\boldsymbol{x})\,|\,t\geqslant 0,\ \|x\|\leqslant\rho\},$$

在球 $\|x\|=\varepsilon$ 上,有 $V(t,\boldsymbol{x})\geqslant a(\varepsilon)$, 取 $T(\varepsilon)=\int_{a(\varepsilon)}^{B}\frac{dV}{c(V)}$.

如果取初始值满足 $\|x_0\|<\delta_0=\delta(a(\varepsilon))$, $t_0\geqslant 0$, $t\geqslant t_0+T(\varepsilon)$ 我们有

$$\int_{V(t_0,x_0)}^{V(t,x)}\frac{dV}{c(V)}\leqslant -(t-t_0)=-T(\varepsilon)=\int_{B}^{a(\varepsilon)}\frac{dV}{c(V)}.$$

因为 $V(t_0,\boldsymbol{x}_0)<B$ 再注意 $\frac{1}{c(V)}>0$, $\Rightarrow V(t,\boldsymbol{x})\leqslant a(\varepsilon)$

$$\Rightarrow\|x(t)\|<\varepsilon.$$

再加上假定平衡态是一致稳定，所以最终得平衡态是一致渐近稳定.

注意这个定理提供了一个求过渡过程的时间 $T(\varepsilon)$ 的办法.

定理 4.8: 如果在集合 $I\times N$ 上存在一个有界、正定的函数 $V(t,\boldsymbol{x})\in C_0$ 即 $V(t,\boldsymbol{x})\geqslant a(\|x\|)$, 且有

$$\dot{V}(t,\boldsymbol{x})\leqslant -c(V(t,\boldsymbol{x})),$$

这里 $a(r)$、$c(V)$ 是正的、连续、递增的函数,仅当 $r=0$ 与 $V=0$ 时方才有 $a(0)=c(0)=0$; 又假定 $f\in C_0$, 则 (4.1) 的平衡态是一致渐近稳定.

根据定理 4.7,我们只要能够证明 (4.1) 的平衡态 x_e 是一致稳定,那末也就证明了定理的结论.

证: 任给 $\varepsilon>0$, 在球 $\|x\|=\varepsilon$ 上, $V(t,\boldsymbol{x})\geqslant a(\varepsilon)>0$, 这

里仍定义 $T(\varepsilon)=\int_{a(\varepsilon)}^{B}\frac{dV}{c(V)}$

令M是$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$的一个李浦希兹常数，即

$$\|f(t,x')-f(t,x'')\|\leqslant M\|x'-x''\|,$$

此外，我们再定义

$$\delta_1(\varepsilon)=\varepsilon\exp[-MT(\varepsilon)].$$

如果选取初始值满足 $\|x_0\|<\delta_1(\varepsilon)$, $t_0\geqslant 0$, $t_0\leqslant t\leqslant t_0+T(\varepsilon)$，我们就有

$$\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{x}_0,t_0)=x_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{\varphi}(\tau;\boldsymbol{x}_0,t_0))d\tau$$

$$\|\varphi(t;x_0,t_0)\|\leqslant\|x_0\|+\int_{t_0}^{t}\|f(\tau,\varphi(\tau;x_0,t_0))$$

$$-f(\tau,0)\|d\tau\leqslant\|x_0\|+M\int_{t_0}^{t}\|\varphi(\tau;x_0,t_0)\|d\tau.$$

由格劳沃尔-贝尔曼不等式知

$$\|\varphi(t;x_0,t_0)\|\leqslant\|x_0\|e^{M(t-t_0)}\leqslant\|x_0\|e^{MT(\varepsilon)}$$
$$<\delta_1(\varepsilon)e^{MT(\varepsilon)}=\varepsilon.$$

由于在球 $\|x\|=\varepsilon$ 上，$V(t,\boldsymbol{x})\geqslant a(\|x\|)=a(\varepsilon)>0$。对此 $a(\varepsilon)>0$，一定存在 $\delta_0=\delta_0(a(\varepsilon))>0$，使当 $\|x_0\|<\delta_0$, $t_0\geqslant 0$, $t\geqslant t_0+T(\varepsilon)$，有

$$\int_{V(t_0,x_0)}^{V(t,\varphi(t;\boldsymbol{x}_0,t_0))}\frac{dV}{c(V)}\leqslant-(t-t_0)=-T(\varepsilon)=\int_{B}^{a(\varepsilon)}\frac{dV}{c(V)}$$

$$V(t_0,x_0)<B,\ 注意\ \frac{1}{c(V)}>0,$$

$$\Rightarrow V(t,\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{x}_0,t_0))<a(\varepsilon),$$

则必定可以推出，当 $t\geqslant t_0+T(\varepsilon)$ 时有 $\|\varphi(t;x_0,t_0)\|<\varepsilon$.

我们现在就取 $\delta(\varepsilon)=\min(\delta_1(\varepsilon),\delta_0(\varepsilon))$，当 $\|x_0\|<\delta(\varepsilon)$ 时，对所有 $t\geqslant t_0$ 都有

$$\|\varphi(t;x_0,t_0)\|<\varepsilon,$$

所以平衡态是一致稳定. 定理证毕.

定理 4.9: (i) 如果空间是一个实的希尔伯特空间; (ii) 对方

程 (4.1) 存在一个函数 $V(t, \boldsymbol{x}) \in C_0$，且满足在定理 4.7 中对函数 V 所作的假定；(iii) 如果 $f(t, \boldsymbol{x})$ 满足条件，即使得二个向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{f}$ 的内积满足

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}) \leqslant \|x\| g(\|x\|),$$

其中 $g(r)$ 是定义在 $r > 0$ 上的一个正连续函数，且使得

$$\int_0^\infty \frac{dr}{g(r)} = +\infty;$$

那末系统 (4.1) 的平衡态是一致稳定.

像定理 4.7 的证明一样，只要能够证明 (4.1) 的平衡态是一致稳定也就可以了.

证：由于 $V(t, \boldsymbol{x})$ 在 $t \geqslant 0$ $\|x\| \leqslant \rho$ 有上确界 M. 所以任给 $\varepsilon > 0$，在球 $\|x\| = \varepsilon$ 上有 $V(t, \boldsymbol{x}) \geqslant a(\varepsilon) > 0$. 我们仍旧记

$$T(\varepsilon) = \int_{a(\varepsilon)}^{B} \frac{dV}{c(V)}.$$

根据 $c(r)$ 是正的连续递增的正函数，因此任给 $\varepsilon > 0$

$$a(\varepsilon) \leqslant V(t, \boldsymbol{x}) \leqslant B, \ T(\varepsilon) \text{ 是一个常数.}$$

又根据条件 $\int_0^{+\infty} \frac{dr}{g(r)} = +\infty$，因此针对上述给定的 $\varepsilon > 0$，总可找到 $\delta_0(\varepsilon) > 0$，使得

$$\int_{\delta_0(\varepsilon)}^{\varepsilon} \frac{dr}{g(r)} > T(\varepsilon).$$

因

$$\frac{d\|x\|^2}{dt} = 2\|x\| \frac{d\|x\|}{dt} = 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}) \leqslant 2\|x\| g(\|x\|),$$

故

$$\frac{d\|x\|}{dt} \leqslant g(\|x\|)$$

如果初始值满足

$$\|x_0\| < \delta_0(\varepsilon), \ t_0 \geqslant 0 \ \text{及} \ t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T(\varepsilon),$$

我们就有

$$\int_{\|x_0\|}^{\|x\|} \frac{d\|x\|}{g(\|x\|)} \leqslant t - t_0 \leqslant T(\varepsilon) < \int_{\delta_0(\varepsilon)}^{\varepsilon} \frac{dr}{g(r)}$$

$$\Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon.$$

下面我们只要能够进一步证明当 $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$ 时，

$$\|x(t)\| = \|\varphi(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon$$

永远成立即可。

用反证法：如果不然，则根据 $\varphi(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ 对 t 的连续性知，存在 t_1 使 $\|\varphi(t_1; x_0, t_0)\| = \varepsilon$。又由于

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -c(V) \leqslant 0,$$

因此

$$a(\varepsilon) \leqslant V(t_1, \varphi(t_1; \boldsymbol{x}_0, t_0)) \leqslant V(t_0, \boldsymbol{x}_0) < a(\varepsilon),$$

这就导出矛盾。

注意由于在 $\|x\| = \varepsilon$ 上 $V(t, \boldsymbol{x}) \geqslant a(\varepsilon) > 0$，$V(t, 0) = 0$，因此定可找到 $\delta_1(\varepsilon)$，使当 $\|x\| < \delta_1(\varepsilon)$ 时，$V(t, \boldsymbol{x}) < a(\varepsilon)$；

另一方面对任给的 $\varepsilon > 0$，可以找到 $\delta_0(\varepsilon)$ 使

$$\int_{\delta_0(\varepsilon)}^{\varepsilon} \frac{dr}{g(r)} > T(\varepsilon).$$

因此我们只要取

$$\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_0(\varepsilon)\},$$

只要初值满足 $\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta(\varepsilon)$，那就能保证

$$V(t_0, \boldsymbol{x}_0) < a(\varepsilon) \text{ 和 } \int_{\delta(\varepsilon)}^{\varepsilon} \frac{dr}{g(r)} > T(\varepsilon).$$

故平衡态 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 是一致稳定。根据定理 4.7 知平衡态是一致渐近稳定。定理证毕。

§5. 非定常的线性系统在渐近稳定情形中的李雅普诺夫函数的存在条件

考虑

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)x_1 + p_{s2}(t)x_2 + \cdots + p_{sn}(t)x_n$$

$$(s=1, 2, \cdots, n), \tag{5.1}$$

其中 $p_{sj}(t)$ 是在 $t \geqslant 0$ 半轴上连续的有界函数.

以 $x_{1j}(t, t_0), \cdots, x_{nj}(t, t_0)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 表示方程 (5.1) 的基本解组,假定它由以下初始条件决定:

$$x_{sj}(t_0, t_0)=0 (当 s \neq j), \quad x_{ss}(t_0, t_0)=1. \tag{5.2}$$

其中 $t_0 \geqslant 0$ 是一任意常数. 这些解我们认为是 t 及 t_0 的函数. 令 a 及 b 为任意正数. 那末 n^2 个函数 $x_{sj}(t, a)$ 及 n^2 个函数 $x_{sj}(t, b)$ 构成方程 (5.1) 的两个基本解组,故它们之间存在线性关系式

$$x_{sk}(t, a)=\sum_{\alpha=1}^{n} c_{\alpha k} x_{s\alpha}(t, b) \qquad (s, k=1, 2, \cdots, n),$$

其中 $c_{\alpha k}$ 为一些常数,在这个关系式中,设 $t=b$, 并注意到 (5.2), 就得

$$x_{sk}(b, a)=c_{sk}.$$

故有下面的恒等式

$$x_{sk}(t, a)=\sum_{\alpha=1}^{n} x_{s\alpha}(t, b) x_{\alpha k}(b, a). \tag{5.3}$$

现在来证明下面定理.

定理 5.1: 如果对于方程 (5.1) 存在正定函数 $V(t, x_1, \cdots, x_n)$, 它有无穷小上界, 而此函数 V 的由这些方程构成的全导数是负定函数,则对所有 $t \geqslant t_0$ 及 $t_0 \geqslant 0$ 满足不等式

$$|x_{sj}(t, t_0)|<B e^{-\alpha(t-t_0)}, \tag{5.4}$$

其中 B 及 α 是不依赖于 t_0 的正常数.

证: 根据定理的条件,存在一个充分小的正数 h, 使在区域

$$t \geqslant 0, \quad |x_s| \leqslant h \tag{5.5}$$

中有不等式

$$V(t; x_1, \cdots, x_n) \geqslant W_1(x_1, \cdots, x_n), \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}=\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}\left(p_{s1} x_1+\cdots+p_{sn} x_n\right) & \\ +\frac{\partial V}{\partial t} \leqslant-W_2(x_1, \cdots, x_n), & \end{aligned} \tag{5.7}$$

其中 W_1 及 W_2 是不依赖于 t 的正定函数.

根据第1章§3定理(3.4)知(5.1)的平凡解在任何情况下都是稳定的. 因此当 ρ 充分小时，方程(5.1)的任一解 $x_s(t, t_1)$，其初始值 $x_s^0 = x_s(t_1, t_1)$ 如果满足下面关系式

$$\sum_{s=1}^{n} x_s^{0^2} = \sum_{s=1}^{n} x_s^2(t_1, t_1) = \rho^2, \tag{5.8}$$

则在所有 $t > t_1$ 时满足不等式 $|x_s| < h$. 这里 t_1 是任意正数. 因此这个解在所有的时刻都满足条件(5.7)，由此推出，函数 $V(t; x_1(t, t_1), \cdots, x_n(t, t_1))$ 是递减的，故对所有 $t > t_1$，可写出不等式

$$W_1(x_1(t, t_1), \cdots, x_n(t, t_1)) \leqslant V(t; x_1(t, t_1), \cdots, x_n(t, t_1)) < V(t; x_1^0, \cdots, x_n^0) \leqslant l(\rho). \tag{5.9}$$

这里 l 是在条件(5.8)下 $V(t; x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 的上界，这个数不依赖于 t_1，因函数 V 既有无穷小上界，故在任何情形下都是有限的. 因为 W_1 是正定函数，故由(5.9)推出，对所有 $t > t_1$ 满足不等式

$$|x_s(t, t_1)| < c^*(\rho), \tag{5.10}$$

其中 c^* 为不依赖于 t_1 的常数.

令 L 是一个任意小的正常数. 考虑位于区域(5.5)中满足 $V(t; x_1, \cdots, x_n) \geqslant L$ 的 x_s 的集合. 因为 V 有无限小上界，则此时必有 $x = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\} > \lambda(L)$，其中 $\lambda(L)$ 为某一个充分小的正常数. 但在这个条件下我们也有 $W_2(x_1, \cdots, x_n) > l_1(L) > 0$. 其中 $l_1(L)$ 也是一个常数. 因此，我们可以写

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -W_2 \leqslant -l_1(L), \text{当 } V(t; x_1, \cdots, x_n) \geqslant L. \tag{5.11}$$

现在来证明，如取 $T = \dfrac{l}{l_1}$，则到了时刻 $t + T$，我们有

$$V(t; x_1(t, t_1), \cdots, x_n(t, t_1)) < L. \tag{5.12}$$

用反证法：假设这是不对的，那末在整个区间 $[t_1, t_1 + T]$ 将有不等式 $V \geqslant L$. 因如果在任一时刻 $t_1 < t < t_1 + T$ 不等式(5.12)满足，则在 $t = t_1 + T$ 时也满足，因为 $V(t; x_1(t, t_1), \cdots, x_n(t,$

t_1)) 是减函数. 但如果对所有 $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + T$, 满足 $V \geqslant L$, 则由 (5.11)

$$L \leqslant V(t_1 + T; x_1(t_1 + T, t_1), \cdots, x_n(t_1 + T, t_1))$$
$$= V(t_1; x_1^0, \cdots, x_n^0) + \int_{t_1}^{t+T} \frac{dV}{dt} dt < l - l_1 T = 0,$$

而这是不可能的. 因 L 是正常数, 因此当 $t = t_1 + T$ 时, 条件 (5.12) 是成立的.

现选 L 如此地小, 使得由 (5.12) 可得出

$$|x_s(t, t_1)| < \frac{M\rho}{n}. \tag{5.13}$$

其中M为小于 1 的正数. 这是可能的, 因V有无限小上界. 此时 L不依赖于 t_1. 因而 $T = \frac{l}{l_1(L)}$ 不依赖于 t_1. 因此我们得到下面的结论: 对方程 (5.1) 的任意解 $x_s(t, t_1)$ 如其初始值满足条件 (5.8), 则在所有 $t > t_1$ 时, 满足不等式 (5.10), 并当 $t = t_1 + T$ 时, 满足不等式 (5.13). 其中 T 是一个与 t_1 无关的数.

建立了这些后, 令 $x_s(t, t_1) = \rho \cdot x_{sj}(t, t_1)$, 这时条件 (5.8) 显然是满足的. 那末由 (5.10) 和 (5.13) 求得, 对于任意的 t_1 及 $t > t_1$,

$$|x_{sj}(t, t_1)| < \frac{c^*(\rho)}{\rho} = c \quad (s, j = 1, 2, \cdots, n). \tag{5.14}$$

其中 c 不依赖于 t_1, 且

$$|x_{sj}(t_1 + T_1, t_1)| < \frac{M}{n}. \tag{5.15}$$

今要证明如m是任意一整数, 则

$$|x_{sj}(t_1 + mT, t_1) < M^m. \tag{5.16}$$

因这些不等式在任何情形下, 当 $m = 1$ 时是满足的, 故我们只要证明, 如果设 $|x_{sj}(t_1 + (m-1)T, t_1)| < M^{m-1}$, 则(5.16)也是成立的即可.

在恒等式 (5.3) 中, 令 $t = mT + t_1$, $a = t_1$, $b = (m-1)T + t_1$, 有

$$x_{sj}(mT+t_1, t_1) = \left|\sum_{\alpha=1}^{n} x_{s\alpha}(mT+t_1,\right.$$

$$\left.\times (m-1)T+t_1)x_{\alpha j}((m-1)T+t_1, t_1)\right|$$

$$\leqslant \frac{M}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}|x_{\alpha j}(t_1+(m-1)T, t_1)|$$

$$< M\cdot M^{m-1} = M^m.$$

这就证明了我们的论断.

今考虑任意数 $t_0 > 0$ 及 $t > t_0$. 令 $mT \leqslant t - t_0 = mT + \tau < (m+1)T$, 其中 m 为整数. 在 (5.3) 中, 令 $a = t_0$, $b = t_0 + mT$, 得

$$x_{sj}(t, t_0) = \sum_{\alpha=1}^{n} x_{s\alpha}(t, t_0+mT)x_{\alpha j}(t_0+mT, t_0).$$

因为 $t \geqslant t_0 + mT$, 则由 (5.14) 及 (5.16) 求得

$$|x_{sj}(t, t_0)| < ncM^m = ncM^{\frac{t-t_0-\tau}{T}} \leqslant \frac{nc}{M}M^{\frac{t-t_0}{T}}.$$

由此, 令 $B = \frac{nc}{M}$, $M^{\frac{1}{T}} = e^{-\alpha}$, 其中 $\alpha > 0$. 由于 $M < 1$, 最后求得, 对所有 t_0 及 $t > t_0$ 满足不等式 (5.4), 这就证明了定理.

定理 5.2: 如果满足不等式 (5.4), 则存在正定函数 $V(t; x_1, \cdots, x_n)$, 它有无限小上界, 其由方程 (5.1) 构成的导数是负定的函数. 这时, 如果 $W(t; x_1, \cdots, x_n)$ 是任意的 m 次正定型, 其系数是时间 t 的有界连续函数, 则函数 V 可以选为与其同次的型, 对于它有

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1+\cdots+p_{sn}x_n)$$
$$+\frac{\partial V}{\partial t} = -W(t; x_1, \cdots, x_n). \qquad (5.17)$$

证: 以 $x_s(t) = \varphi_s(t; x_1^0, \cdots, x_n^0, t_0)$ 表示方程 (5.1) 的具有初始条件 $x_s(t_0) = x_s^0$ 的解. 显然有

$$x_s(t) = \varphi_s(t; x_1^0, \cdots, x_n^0, t_0) = \sum_{\alpha=1}^{n} x_{s\alpha}(t, t_0)x_\alpha^0. \quad (5.18)$$

设 $W(t; x_1, \cdots, x_n)$ 是变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的任意 m 次型，其系数为时间的有界连续函数。考察下列恒等式确定的一个 m 次型

$$V(t; x_1, \cdots, x_n) = \int_t^\infty W(\tau; \varphi_1(\tau; x_1, \cdots, x_n, t), \cdots, \varphi_n(\tau; x_1, \cdots, x_n, t))d\tau. \quad (5.19)$$

现证明这个 m 次型满足定理的一切条件。

实际上 m 次型 $V(t; x_1, \cdots, x_n)$ 的系数是下面形式的项的和

$$P(t) = \int_t^\infty f(\tau)x_{s_1j_1}^{m_1}(\tau, t), \cdots, x_{s_nj_n}^{m_n}(\tau, t)d\tau. \quad (5.20)$$

其中 $f(t)$ 为 t 的某些连续有界函数，是 m 次型 $W(t; x_1, \cdots, x_n)$ 的系数具有整系数的线性组合，$m_1, m_2, \cdots, m_n$ 是一组非负整数并满足

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n = m.$$

由条件 (5.4) 立刻可推出，所有的积分 (5.20) 都是收敛的。故 m 次型 V 的确存在。不仅如此，由这些不等式还可立刻得出，所有函数 (5.20) 对 $t \geqslant 0$ 都是有界的。实际上，有

$$|P(t)| < B^m \int_t^\infty |f(\tau)| e^{-m\alpha(\tau-t)}d\tau$$
$$< B^m M \int_t^\infty e^{-m\alpha(\tau-t)}d\tau = \frac{B^m M}{m\alpha}.$$

其中 M 是函数 $f(\tau)$ 的上界。因此 m 次型 V 具有有界的系数，故有无限小上界。

m 次型 V 由 (5.19) 直接看出，在任何情形下它都是正的。现在要进一步证明它是正定的。

为此目的以 $\Delta(\tau, t)$ 表示行列式 $|x_{sj}(\tau, t)|$，以 $\Delta_{sj}(\tau, t)$ 表示对应于 x_{sj} 的子行列式，考察变量 y_s 的 m 次型：

$$W(\tau; y_1, \cdots, y_n) - \lambda^2 \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \sum_{\beta=1}^{n} \Delta_{\beta\alpha}(\tau, t)y_\beta \right\}^m, \quad (5.21)$$

其中 λ 是实数。由 (5.4) 知，对于 $\Delta_{\beta\alpha}$ 当 $\tau \geqslant t$ 时可以给予某些既

不依赖于 τ 的也不依赖 t 的常数上界. 并因 W 是正定 m 次型，故由此得出，常数 λ 可以选得如此之小，使得 (5.21) 也是正定的。我们将假定 λ 确是选得符合条件，故如在式 (5.21) 中以任意量代替 y_s，它都取得正值. 特别是，如果设

$$y_s = \sum_{\alpha=1}^{n} x_{s\alpha}(\tau, t)x_\alpha = \varphi_s(\tau; x_1, \cdots, x_n, t),$$

则有

$$W(\tau; \varphi_1(\tau, x_1, \cdots, x_n, t), \cdots, \varphi_n(\tau, x_1, \cdots, x_n, t))$$
$$- \lambda^2 \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \sum_{\beta=1}^{n} \Delta_{\beta\alpha}(\tau, t)\varphi_\beta(\tau; x_1, \cdots, x_n, t) \right\}^m > 0,$$

但

$$\sum_{\beta=1}^{n} \Delta_{\beta\alpha}(\tau, t)\, \varphi_\beta = \sum_{\beta, \nu=1}^{n} \Delta_{\beta\alpha}(\tau, t)x_{\beta\nu}(\tau, t)x_\nu$$
$$= \Delta(\tau, t)x_\alpha.$$

这是因为

$$\sum_{\beta=1}^{n} \Delta_{\beta\alpha}x_{\beta\nu} = \delta_{\alpha\nu}\Delta.$$

其中 $\delta_{\alpha\nu} = \begin{cases} 1, & \alpha = \nu \\ 0, & \alpha \neq \nu \end{cases}$ 是克朗涅克符号，因此

$$W(\tau; \varphi_1(\tau, x_1, \cdots, x_n, t), \cdots, \varphi_n(\tau, x_1, \cdots, x_n, t))$$
$$- \lambda^2 \Delta^m(\tau, t) \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^m > 0,$$

从而由 (5.19) 求得

$$V(t; x_1, \cdots, x_n) > \lambda^2 Q(t) \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^m. \tag{5.22}$$

其中

$$Q(t) = \int_t^\infty \Delta^m(\tau, t)d\tau = \int_t^\infty e^{m \sum_{s=1}^{n} \int_t^\tau p_{ss}(t)dt} d\tau.$$

另外又有恒等式

$$\int_t^\infty \sum_{s=1}^n p_{ss}(\tau)e^{m\int_t^\tau \sum_{s=1}^n p_{ss}(t)dt} d\tau = -\frac{1}{m}.$$

用中值定理求得

$$\left(\sum_{s=1}^n p_{ss}\right)^* Q(t) = -\frac{1}{m}. \tag{5.23}$$

其中 $\left(\sum_{s=1}^n p_{ss}\right)^*$ 是函数 $\sum_{s=1}^n p_{ss}(\tau)$ 在区间 (t, ∞) 的中值.

因函数 $p_{ss}(t)$ 是有界的，函数 $Q(t)$ 是正的，故由 (5.23) 可推出，函数 $Q(t)$ 对于任何 $t \geqslant 0$ 要超过某一正数 a^2，因此由 (5.22) 求得:

$$V(t; x_1, \cdots, x_n) > \lambda^2 a^2 \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha^m,$$

这就证明了 m 次型 V 是正定的.

余下要证明函数 V 满足方程 (5.17). 为此，如本章 §1 的处理方法一样，以 $\bar{V}$ 表示函数 V 中以 (5.1) 的任意一解代入而得到的函数，即在 V 中以函数 (5.18) 代替 x_s 而得到的结果. 那末将有 $\frac{dV}{dt} = \frac{d\bar{V}}{dt}$，但由恒等式

$$\varphi_s(\tau; \varphi_1(t, x_1^0, \cdots, x_n^0, t_0), \cdots, \varphi_n(t_1, x_1^0, \cdots, x_n^0, t_0), t) = \varphi_s(\tau; x_1^0, \cdots, x_n^0, t_0),$$

$$\bar{V}(t) = \int_t^\infty W(\tau; \varphi_1(\tau; x_1^0, \cdots, x_n^0, t_0), \cdots, \varphi_n(\tau; x_1^0 \cdots, x_n^0, t_0))d\tau,$$

所以

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = -W(t; \varphi_1(t, x_1^0, \cdots, x_n^0, t_0), \cdots, \varphi_n(t, x_1^0 \cdots, x_n^0, t_0)) = -W(t; x_1, \cdots, x_n).$$

这就证明了我们的论断.

(5.17) 的正确性当然可以直接由微分证明. 为此用下面的恒等式很容易就得出

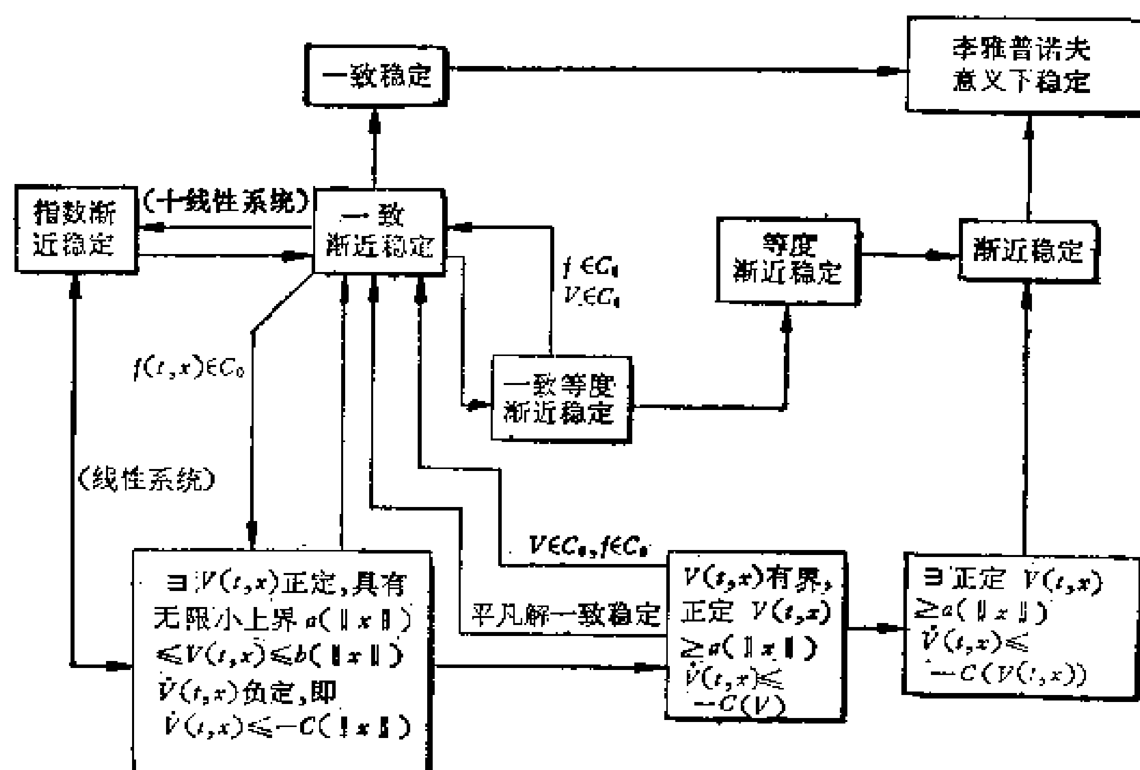
$$\frac{dx_{ij}(\tau,t)}{dt}+\sum_{\alpha=1}^{n}p_{\alpha j}(t)x_{i\alpha}(\tau,t)\equiv 0.$$

因此，定理完全被证明.

这两个定理说明，对于 (5.1) 的平凡解是指数渐近稳定的充分而必要的条件，就是存在一个正定的、具有无限小上界的函数 $V(t;x_1,\cdots,x_n)$，使得

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}\sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma}x_\sigma)\text{是负定的.}$$

总结上二节 (§4，§5)，即可概略的得到稳定性概念和李雅普诺夫函数之间的关系图如下：



其中 $a(r),b(r),c(r)$ 都是 r 的连续递增的正函数，仅当 $r=0$ 时，$a(0)=b(0)=c(0)=0$.

这里可立即看出，在渐近稳定性概念中，最重要的是一致渐近稳定性.

第三章　李雅普诺夫方法的推广

§ 1. 综　　述

众所周知，李雅普诺夫定理关于稳定性的结论，是从 $\dot{V}$ 的正负号来作出的．这里 V 是正定的函数．这就是说主要考虑了不等式

$$\frac{dV}{dt} \leqslant 0.$$

同样从这个不等式出发，针对我们所研究的带有强迫力的周期系统，引进一些讨论，亦可导致我们所要求的结论[1]．

考虑

$$\dot{x} = X(x, t), \quad t \geqslant 0. \tag{1.1}$$

令 $x = x(t; x_0, t_0)$ 是 (1.1) 满足初始条件 $x(t_0; x_0, t_0) = x_0$ 的一个解．在通常保证解的存在性、唯一性的假定下，我们要问：这个解在整个 $t \geqslant 0$ 的正半轴上是否存在？这里分三种情形来考虑：

1) 或者这个解可以延拓到所有 $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ 处，在这种情况下，我们就说 $x(t; x_0, t_0)$ 在整个 t 的正半轴上是有定义的；

2) 或者存在一时刻 $T \geqslant t_0$，使当 $t \to T$ 时，

$$|x(t; x_0, t_0)| \to +\infty$$

那末我们就说这个解有一个有限逸时；

3) 第三种可能性就是这个解 $x(t; x_0, t_0)$ 是有界的．显见这种情形与 1) 是一致的，但是在情况 1) 中还包含

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t; x_0, t_0)\| = \infty$$

的情形，这就是解的无界情形．而情形 2) 与 1) 是对立的．

方程的所有解的有界性，这是一种类型的稳定性．这种稳定

性的研究最初是由拉格朗日进行的，因此又称为拉格朗日意义下的稳定性，或简称拉格朗日稳定。

在下面的整个讨论中，我们都假定 $V(t, x)$ 是在某一个特定的域内的连续函数，且有连续的一阶偏导数；在这个域内

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} X = \frac{\partial V}{\partial t} + X \operatorname{grad} V.$$

下面就来考虑微分不等式

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} X \leqslant 0. \tag{1.2}$$

我们感兴趣的仅仅是满足 (1.2) 的正函数. 因此满足不等式(1.2)的正函数 V 显见有下列性质:

(i) $V(t)$ 对所有 $t \geqslant 0$ 都有确定的意义，也就是说满足不等式 (1.2) 的正函数 $V(t)$，在整个 t 的正半轴上都不会出现有限逸时的现象；

(ii) 且 $V(t)$ 是有界的，即 $\lim\limits_{t\to\infty} V(t) < \infty$. 在下面的讨论中，用 Ω 表示任一点集，就记 Ω^c 是它的补集.

定理: 令 Ω 是一个包含原点在内的有界集，如果对方程 (1.1) 存在正函数 $V(x, t)$，它在 Ω^c 和 $t \geqslant 0$ 有定义，且极限关系

$$\lim_{\|x\|\to\infty} V(x, t) = +\infty \tag{1.3}$$

在整个 t 的正半轴上一致成立；又假定在整个 Ω^c 和 $t \geqslant 0$ 上都满足 (1.2)，则方程 (1.1) 的每一个解对所有 $t \geqslant 0$ 不仅是有定义，且是有界的.

证: 定理的结论分两部分来证明，首先证明(1.1)的每一个解在 $t \geqslant 0$ 有定义.

用反证法，如果 (1.1) 的解 $x(t; x_0, t_0)$ 存在一个有限逸时 $t_1 < T$，即 $\lim\limits_{t\to t_1} x(t; x_0, t_0) = \infty$，那末此解将留在补集 Ω^c 内，根据条件 (1.3) 知 $V(t) = V(x(t; x_0, t_0), t)$ 是满足 (1.2) 的一个具有有限逸时的正函数，而这一点与函数 V 的性质 (i) 是矛盾的. 因此方程(1.1)的每一个解不具有有限逸时，也就是说 $x(t; x_0, t_0)$ 对

所有 $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ 都有定义.

其次我们来证明 (1.1) 的每一个解 $x(t; x_0, t_0)$ 是有界的. 用反证法: 如果 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t; x_0, t_0) = \infty$, 那末解 $x(t; x_0, t_0)$ 将最终停留在补集 Ω^c 上,因此由条件 (1.3) 知

$$\lim_{t\to\infty} V(x(t; x_0, t_0), t) = \lim_{\|x\|\to\infty} V(x(t), t) = \infty,$$

可是由于 $V(x, t)$ 满足 (1.2), 由性质(ii)知 $V(x(t), t)$ 在 $t \geqslant 0$ 上是有界的,这就导出矛盾. 即

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t; x_0, t_0\| < \infty.$$

从这个定理看出, 要保证系统 (1.1) 的解的有界性,只要能够找到一个满足定理所述的条件的正函数 $V(x, t)$, 就可达到我们的要求. 所以这种解决问题的思想方法, 仍旧是属于李雅普诺夫第二方法的范畴. 日本数学家吉泽太郎[2]大量而且全面地研究了这方面的问题. 在下面一节我们将介绍李雅普诺夫函数与解的有界性之间的关系,为在研究强迫振荡问题上的应用作准备(见第四篇第十三章).

§ 2. 解的有界性和李雅普诺夫函数

我们考虑

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x). \tag{2.1}$$

其中 x 表示一个 n 维向量, $X(t, x)$ 是一个给定的向量场,这个向量场是定义在乘积空间

$$\Delta = I(0 \leqslant t < +\infty) \times E_x^n(\|x\| < \infty)$$

上的连续函数,一般都假定它还满足关于 x 的李浦希兹条件,从而就保证了解的存在唯一性,以及解对初值的连续依赖性.

令 $x = x(t; x_0, t_0)$ 表示 (2.1) 过初始点 (t_0, x_0) 的一个解, 下面我们就给出解的各种类型的有界性的确切定义.

定义 i: 我们说过点 (t_0, x_0) (2.1) 的解 $x = x(t; x_0, t_0)$ 是

有界的，如果存在一个正数 β，使得当 $t \geqslant t_0$ 时

$$\|x(t;\ x_0,\ t_0)\| < \beta,$$

这个数 β 可以就每个解来确定其大小，不同的解有不同的 β。当方程 (2.1) 的所有解都是有界的，我们就说 (2.1) 的解是有界的.

定义 ii： 我们说由平面 $\pi(t_0)$ 上之任一点出发的解是等界的，如果当 $x_0 \in E_\alpha(\|x_0\| \leqslant \alpha)$，在 i 中之 β 仅仅由 α 来定，而与所考虑的特解无关.

定义 iii： 我们说 (2.1) 的解是等界的，如果对每个如此的 $t_0 \in I(0 \leqslant t < \infty)$，由平面 $\pi(t_0)$ 出发的 (2.1) 之解是等界的.

定义 iv： 我们说 (2.1) 的解是一致有界的，如果对每个 t_0，β 仅仅依赖于 α 来决定，而与 t_0 无关.

从上面定义 i—iv 可以看出：方程 (2.1) 之解的界限 β 一般说来与所选的初始点 (t_0, x_0) 有关，即 $\beta = \beta(t_0, x_0)$；对同一个 t_0，β 的大小仅仅由 x_0 的大小来决定，这就意味着等界性，对不同的 t_0 等界程度也不一样；如果 β 根本与 t_0 无关，这种有界性才叫做一致有界性.

定义 v： 如果针对由每一点 (t_0, x_0) 出发的解 $x = x(t;\ x_0,\ t_0)$ 来讲，都存在两个正数 B 和 T，使当 $t > t_0 + T$ 时，就有 $\|x(t;\ x_0,\ t_0)\| < B$，我们就说 (2.1) 的解是最终有界的，界限就是 B。这里 B 是与考虑之特解无关，而 T 是可以由这个解来确定其大小的.

定义 vi： 我们说由平面 $\pi(t_0)$ 出发的解，针对 $t \to t_0$ 时的界限 B 而言是拟等度最终有界的，如果 $x_0 \in E_\alpha(\|x_0\| \leqslant \alpha)$，而 T 仅仅依赖于 α 的大小来决定.

定义 vii： 我们说方程 (2.1) 的解就界限 B 而言是等度最终有界的，如果对所有 $t_0 \in I$，(2.1) 的解就界限 B 而言是拟等度最终有界.

定义 viii： 我们说 (2.1) 的解就界限 B 而言是一致最终有界的，如果在 vii 中的 T 仅仅由 α 的大小来定而与 t_0 无关.

从上面定义 v—viii 可以看出：解的最终有界性是针对给定的界限 B 而言，不同的解要经过不同的时刻 T 才能进入球

$\|x\| < B$，也就是说 $T = T(x_0, t_0)$；如果对某一特定的 t_0，T 的大小仅由初值 x_0 的范围来定，这就是拟等度最终有界性．对于不同的 t_0，T 的等度程度也不一样．如果 T 的大小根本与 t_0 无关，而仅仅由 x_0 的范围来定，这就是一致最终有界性．

下面我们就介绍几个主要定理，为了简化叙述，这里我们作一些规定：

1）我们说函数 $V(t, \boldsymbol{x})$ 具有性质 A：即存在一个正的连续增函数 $a(r)$，使得 $V(t, \boldsymbol{x}) \leqslant a(\|x\|)$；

2）我们说函数 $V(t, \boldsymbol{x})$ 具有性质 B，即存在一个非负的连续增函数 $b(r)$，使得

$$b(\|x\|) \leqslant V(t, \boldsymbol{x}),\ 且\ \lim_{r\to\infty} b(r) = \infty;$$

3）我们说函数 $V(t, \boldsymbol{x})$ 具有性质 C，即存在一个正的连续函数 $C(r)$，使得

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -C(\|x\|).$$

首先我们来略论上述解的有界性、解的等界性以及解的一致有界性之间的关系，以及它们同李雅普诺夫函数之间的关系．

命题 2.1：假定 (2.1) 中的 $\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{x})$ 是 t 的周期函数．如果从平面 $\pi(0)$ $(t = 0)$ 上任一点出发的解是等界的，且从平面 $\pi(t_0)$ 上任一点出发的解是有界的，则 (2.1) 的解是一致有界的．

证：不失一般性，我们可以假定 $\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{x})$ 的周期是 1，考虑从平面 $\pi(t_0)$ 出发的解，这里 $0 \leqslant t_0 < 1$，根据假定知，此时对于初值 $\boldsymbol{x}_0$ 取在集合 E_α ($\|x_0\| \leqslant \alpha$, $\alpha > 0$ 任给）上的所有解会达到平面 $\pi(1)$ $(t = 1)$ 上，因此根据等界性知存在一个与 t_0 无关的正数 α'，使得 $\|x(t; x_0, t_0)\| \leqslant \alpha'$ $(\boldsymbol{x}_0 \in E_\alpha)$．这样一来，只要考虑在平面 $\pi(1)$ $(t = 1)$ 上初值集 $\boldsymbol{x}_0 \in E_{\alpha'}$ ($\|x_0\| \leqslant \alpha'$) 所确定的解，这些解与在平面 $\pi(0)$ 上初值集 $x(0) = x_0 \in E_{\alpha'}$ 所确定的解有同样的性质，因为 $\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{x})$ 是 t 的周期为 1 的周期函数．

由于从平面 $\pi(0)$ 出发的解是等界的，因此对应于 α'，即存在一个正数 β，当 $x_0 \in E_{\alpha'}$，则

$$\|x(t;\ x_0,\ 1)\| < \beta.$$

所以对于满足 $0\leqslant t_0<1$，$x_0\in E_\alpha$ 的初始点$(t_0,\ x_0)$之解 $x=x(t;\ x_0,\ t_0)$ 我们就应有

$$\|x(t;\ x_0,\ t_0)\| < \beta.$$

至于由平面 $\pi(t_0)$ ($t_0\geqslant 1$) 出发的解之性质和由平面 $\pi(t_0)$ ($0\leqslant t_0<1$) 出发之解的性质一样，故只要有 $x_0\in E_{\alpha'}$，就会有 $\|x(t;\ x_0,\ t_0)\| < \beta$，这里的 $\beta=\beta(\alpha)$ 与 t_0 无关．这就是解的一致有界性．

推论：当 $X(t,\ x)$ 是 t 的周期函数，如果 (2.1) 的解是等界的，则 (2.1) 的解是一致有界的．

证：因为 (2.1) 的解的等界性即保证了由平面 $\pi(0)$ 和平面 $\pi(t_0)$ ($0\leqslant t_0<1$) 出发的解都是等界的．因此定理 2.1 的假设全部成立．

命题 2.2：如果 (2.1) 的解是等界的，就存在一个正数 $\beta(\eta)$，使得对任意一点 $(t_0,\ x_0)\in Q_\eta(I_\eta(0\leqslant t_0\leqslant\eta)\times E_\eta(\|x_0\|\leqslant\eta))$，我们都有 $\|x(t;\ x_0,\ t_0)\|\leqslant\beta(\eta)$.

命题意义较显然，故证明从略．

作为有界性的一个充分条件，我们用李雅普诺夫函数可得下列定理：

定理 2.1：如果存在一个正的函数 $V(t,\ x)$，它在乘积空间

$$\Delta: I(0\leqslant t<+\infty)\times E_{R_0}(\|x\|\leqslant R_0)$$

内有定义，且有性质 B；又假定在 Δ 内有

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.1)}=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}X(t,\ x)\leqslant 0,$$

则 (2.1) 的解是等界的．

证：由于函数 $V(t,\ x)$ 具有性质 B，即存在一个连续非负的增函数 $b(r)$，使得

$$b(\|x\|)\leqslant V(t,\ x),\ 且 \lim_{\|x\|\to\infty} b(\|x\|)=\infty,$$

所以对由任一点 $(t_0,\ x_0)\in\Delta$ 出发的解 $x=x(t;\ x_0,\ t_0)$ 而言，我们只要能指出函数 $V(t,\ x(t))$ 当 $t\to\infty$ 保持有界即可．事实上由

假定知

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.1)}=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}X(t,\ \boldsymbol{x})\leqslant 0,$$

$$V(t,\ \boldsymbol{x}(t;\ \boldsymbol{x}_0,\ t_0))\leqslant V(t_0,\ \boldsymbol{x}_0)=\text{常量}.$$

常量 $V(t_0,\ \boldsymbol{x}_0)$ 的大小由 $\|x_0\|\leqslant R_0$ 的大小来定. 这就证明 (2.1) 的解是等界的.

定理 2.2: 如果存在一个正函数 $V(t,\ \boldsymbol{x})$, 它在乘积空间

$$\Delta^*:\ I(0\leqslant t<\infty)\times E^*_{R_0}(\|x\|\geqslant R_0)$$

内定义,且具有性质 A 和 B, 又假定在 Δ^* 内满足

$$\left.\frac{\partial V}{dt}\right|_{(2.1)}=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}X\ (t,\ \boldsymbol{x})\leqslant 0,$$

则 (2.1) 的解是一致有界的.

证: 根据性质 A 知,任给一个 $\alpha>0\ (\alpha\geqslant R_0)$, 当 $\|\boldsymbol{x}\|=\alpha$ 时, 我们都有 $V(t,\ \boldsymbol{x})\leqslant a\ (\alpha)$. 由于函数 $V(t,\ \boldsymbol{x})$ 具有性质 A 和 B, 故存在两个正连续的增函数 $a(r),\ b(r)$, 使得

$$b(\|x\|)\leqslant V(t,\ \boldsymbol{x})\leqslant a(\|x\|),\ \text{且}\ \lim_{r\to\infty}b(r)=\infty.$$

因此根据性质 B, 我们可以选取 β, 使得当 $\|x\|=\beta$ 时,

$$b(\beta)>a(\alpha).$$

现在我们来证明方程 (2.1) 由点 $(t_0,\ \boldsymbol{x}_0)\in\Delta^*(t_0\in I,\ \|x_0\|\leqslant\alpha)$ 出发的解 $\boldsymbol{x}(t;\ \boldsymbol{x}_0,\ t_0)$, 当 $t\geqslant t_0$ 时,总有下列不等式成立.

$$\|x(t;\ x_0,\ t_0)\|<\beta.$$

用反证法: 如果存在某一时刻 $t=t'$, 使得

$$\|x(t;\ x_0,\ t_0)\|=\beta,$$

则根据解的连续性知存在 t_1 和 t_2, 使得

$$\|x(t_1;\ x_0,\ t_0)\|=\alpha,\ \ \|x(t_2;\ x_0,\ t_0)\|=\beta,$$

以及当 $t_1<t<t_2$ 时,

$$\alpha<\|x(t;\ x_0,\ t_0)\|<\beta.$$

此时我们考虑函数 $V(t,\ \boldsymbol{x}(t;\ \boldsymbol{x}_0,\ t_0))$, 我们有

$$V(t_1,\ \boldsymbol{x}(t_1;\ \boldsymbol{x}_0,\ t_0))\leqslant a(\alpha),$$

$$V(t_2,\ \boldsymbol{x}(t_2;\ \boldsymbol{x}_0,\ t_0))\geqslant b(\beta).$$

可是另一方面我们根据 $\dot{V}(t, x) \leqslant 0$. 就应有

$$V(t_2, x(t_2; x_0, t_0)) \leqslant V(t_1, x(t_1; x_0, t_0)).$$

即 $b(\beta) \leqslant a(\alpha)$, 这就导出矛盾. 矛盾说明了

$$\|x(t; x_0, t_0)\||_{t=t'} = \beta$$

成立的假定是不对的. 因此当 $t_0 \in I$, $x_0 \in E_\alpha$ 时,对所有 $t \geqslant t_0$ 都有 $\|x(t; x_0, t_0)\| < \beta$. 而 β 与 t_0 无关, 故 (2.1) 的解一致有界.

下面我们引进一些例题来阐明这两个定理的应用.

例 1: 考虑方程[3]

$$\ddot{x} + \varphi(x, \dot{x})\dot{x} + h(x) = e(t). \tag{1}$$

这里对函数 $\varphi(x, \dot{x})$, $h(x)$都假定足够光滑, $e(t)$ 对所有 $t \geqslant 0$ 连续,且足以保证解的存在唯一性.

如果对所有 x 及 $\dot{x}$ 都有 $\varphi(x, \dot{x}) \geqslant 0$; 又当 $x \neq 0$

$$H(x) = \int_0^x h(x)dx > 0,$$

且当 $|x| \to \infty$ 时,$H(x) \to \infty$; 又 $\int_0^\infty |e(t)| dt < \infty$; 则 (1) 的每一个解当 $t \to +\infty$ 时满足不等式

$$|x(t)| < c_1, \ |\dot{x}(t)| < c_2.$$

这里 $c_i = c_i(x_0, \dot{x}_0)$, $(i = 1, 2)$, x_0, $\dot{x}_0$ 是所给初值.

证: 作变换

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\varphi(x, y)y - h(x) + e(t). \end{cases} \tag{1)*$$

作函数

$$V(x, y) = \sqrt{y^2 + 2H(x)}.$$

显见当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, $V(x, y) > 0$. 且当 $|x| \to \infty$ 时, $H(x) \to \infty$, 故 $V(x, y)$ 具有无穷大性质. 所以由 $V(x, y) < c$ (常数)就可推出 $|x| < c_1$, $|y| < c_2$.

因此我们只要能指出, $V(x, y)$ 沿着 $(1)^*$ 的每条相轨线, 当 $t \to \infty$ 时,都保持有界即可.

由于

$$V(x, y)\frac{dV(x, y)}{dt} = \frac{1}{2}(2y\dot{y} + 2h(x)\dot{x})$$

$$= -y^2\varphi(x, y) + e(t)y$$

$$\leqslant |e(t)||y| \leqslant (|y| + \sqrt{2H(x)})|e(t)|$$

$$\leqslant \sqrt{2}V(x, y)|e(t)|,$$

所以

$$\frac{dV(x, y)}{dt} \leqslant \sqrt{2}\ |e(t)|.$$

积分后得

$$V(x, y) - V(x_0, y_0) \leqslant \sqrt{2}\int_{t_0}^{t}|e(s)|ds$$

$$\leqslant \sqrt{2}\int_0^t|e(s)|ds < \infty,$$

$$V(x(t), y(t)) \leqslant V(x_0, y_0) + \int_0^\infty \sqrt{2}\ |e(s)|ds = c \text{ 常数}.$$

这个例题的证明思想方法就是定理 2.1 的具体实现.

例 2: 考虑方程[3]

$$\ddot{x} + (f(x) + g(x)\dot{x})\dot{x} + h(x) = e(t) \qquad (2)$$

作变换

$$\dot{x} = \frac{y - b(x)}{a(x)},$$

这里

$$a(x) = \exp\left(\int_0^x g(u)du\right), \quad b(x) = \int_0^x a(u)f(u)du,$$

$$y = a(x)\dot{x} + b(x),$$

则

$$\frac{dy}{dt} = a'(x)\dot{x}^2 + a(x)\ddot{x} + b'(x)\dot{x}$$

$$= g(x)a(x)\dot{x}^2 + a(x)[-(f(x)$$

$$+ g(x)\dot{x})\dot{x} - h(x) + e(t)] + a(x)f(x)\dot{x}$$

$$= a(x)[-h(x) + e(t)].$$

最终得

$$\begin{cases}\dot{x} = \dfrac{1}{a(x)}[y - b(x)], \\ \dot{y} = a(x)[-h(x) + e(t)].\end{cases} \tag{2)*$$

注意当 $g(x) = 0$ 时，$a(x) = 1$，方程 (2) 就变成

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + h(x) = e(t).$$

此时代换 $\dot{x} = y - b(x) = y - \int_0^x f(u)\,du$ 就是列娜代换．下面我们就针对 $(2)^*$ 来讨论它的有界性．

如果 $a(x) \leqslant \alpha(\alpha \geqslant 1)$ 对所有 x 都成立，又 $b(x)h(x) \geqslant 0$，且对所有 $x \neq 0$，$H^*(x) = \int_0^x a^2(u)\,h(u)\,du > 0$；且当 $|x| \to \infty$ 时，$H^*(x) \to \infty$，并且 $\int_0^\infty |e(t)|\,dt < \infty$；则 (2) 的每个解当 $t \to \infty$ 时，满足

$$|x(t)| < c_1, \ |\dot{x}(t)| < c_2 \ \ (c_1, c_2 \text{ 是正常数}).$$

证：只要能够证明沿着 $(2)^*$ 的每条轨线，当 $t \to \infty$ 时，都有上不等式成立即可．

取函数

$$W(x, y) = \sqrt{y^2 + 2H^*(x)},$$

显见：

(i) 当 $(x, y) \neq (0, 0)$，$W(x, y) > 0$，

(ii) 当 $|x| \to \infty$ 时，$H^*(x) \to \infty$.

所以只要能够证明沿着 $(2)^*$ 的轨线 $W(x, y)$ 是有界的即可．事实上

$$\begin{aligned} W(x, y)\frac{dW}{dt} &= \frac{1}{2}(2y\dot{y} + 2a^2(x)h(x)\dot{x}) \\ &= a(x)ye(t) - a(x)h(x)b(x) \\ &\leqslant a(x)|y||e(t)| \\ &\leqslant \alpha(|y| + \sqrt{2H^*(x)})\,|e(t)| \\ &\leqslant \alpha\sqrt{2}\,W(x, y)|e(t)|, \end{aligned}$$

$$\frac{dW}{dt} \leqslant \alpha\sqrt{2}\,|e(t)|,$$

故

$$W(x, y) \leqslant W(x_0, y_0) + \int_0^{\infty} |e(s)| ds = c.$$

例 3: 考虑

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + h(x) = e(t), \tag{3}$$

如果

(i) $f(x) \geqslant 0$, 对所有 x 成立;

(ii) $H(x) = \int_0^x h(u) du > 0$, $x \neq 0$;

(iii) 当 $|x| \to \infty$ 时, $H(x) \to \infty$;

(iv) $\int_0^{\infty} |e(s)| ds < \infty$,

则 (3) 的每一个解当 $t \to \infty$ 时都满足 $|x| < c_1$, $|\dot{x}(t)| < c_2$.

证: 仍取 $V(x, y) = \sqrt{y^2 + 2H(x)}$. 用列娜代换把 (3) 化成等价的

$$\begin{cases} \dot{x} = y - b(x), \\ \dot{y} = -h(x) + e(t). \end{cases} \tag{3)*}$$

计算

$$V(x, y) \frac{dV(x, y)}{dt} = y e(t) - b(x) h(x) \leqslant |y| |e(t)|$$

$$\leqslant [|y| + \sqrt{2H(x)}] |e(t)|$$

$$\leqslant \sqrt{2} [|y|^2 + 2H(x)]^{\frac{1}{2}} |e(t)| = \sqrt{2} \sqrt{(x, y)} |e(t)|,$$

故

$$\frac{dV}{dt} \leqslant \sqrt{2} e(t),$$

$$V(x(t), y(t)) \leqslant V(x_0, y_0) + \int_0^{\infty} |e(s)| ds = c.$$

从上面三个例题可看出, 定理 2.1 中要求

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} X(t, x) \leqslant 0,$$

实质上就是保证正定函数 $V(t, x)$ 沿着方程的解当 $t \to \infty$ 时是有

界的，即可保证解是有界的．而这种有界性都是等度有界的．这一点从 $V(x, y)$ 沿着轨线的界限可看出．因为对沿着由不同的初始时刻 t_0 和初始位置所确定的轨线

$$V(x(t), y(t)) \leqslant V(x(t_0), y(t_0)) + \int_{t_0}^{\infty} |e(s)| ds = C(t_0, x_0, y_0).$$

故对同一个 t_0，C 的大小就由初始点 (x_0, y_0) 的范围来定．这就是解的等度有界性意义．下面引进用定理 2.2 来解决的关于解的一致有界性问题的几个例题．

例 4：温托 (Winter)[4] 考虑

$$\dot{x} = F(t, x), \tag{4}$$

其中 $F(t, x)$ 满足不等式

$$F(t, x) \leqslant \lambda(t)\varphi(\|x\|).$$

这里 $\lambda(t)$、$\varphi(\|x\|)$ 分别是确定在 $0 \leqslant t < +\infty$ 及 $0 \leqslant \|x\| < +\infty$ 上的正连续函数，且满足下列不等式

$$\int_0^{\infty} \lambda(t) dt < +\infty, \quad \int_{R_0}^{\infty} \frac{dr}{\varphi(r)} = +\infty,$$

则 (4) 的解是一致有界．

证：此时我们作

$$V(t, x) = \exp\left[\int_{R_0}^{r} \frac{dr}{\varphi(r)} - n\int_0^t \lambda(s) ds\right].$$

此函数是定义在乘积空间

$$\Delta^*: I(0 \leqslant t < +\infty) \times E_{R_0}^*(\|x\| \geqslant R_0)$$

上的正函数．显见

$$V(t, x) \leqslant \exp\int_{R_0}^{r} \frac{dr}{\varphi(r)} = a(r) = a(\|x\|).$$

$a(r)$ 是连续的正的增函数，故 $V(t, x)$ 具有性质 A．又

$$V(t, x) = \exp\left[\int_{R_0}^{r} \frac{dr}{\varphi(r)} - n\int_0^t \lambda(s) ds\right]$$

$$\geqslant \exp\left[\int_{R_0}^{r} \frac{dr}{\varphi(r)} - n\int_0^{\infty} \lambda(s) ds\right] = b(r).$$

$b(r)$ 是连续的、增长的正函数. 又根据条件知

$$\lim_{r\to\infty} b(r) = +\infty,\ V(t, x) \text{ 具有性质 } B.$$

$$\frac{dV}{dt} = \left\{\exp\left[\int_{R_0}^{r} \frac{dr}{\varphi(r)} - n\int_0^t \lambda(s)ds\right]\right\} \times \left(-n\lambda(t) + \frac{1}{\varphi(r)}\frac{dr}{dt}\right),$$

由

$$r^2 = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

得

$$2r\frac{dr}{dt} = 2\|x\|\frac{d\|x\|}{dt} = \sum_{i=1}^{n} 2x_i\frac{dx_i}{dt},$$

$$\|x\|\frac{d\|x\|}{dt} = x^T\frac{dx}{dt} = x^T F(t, x) \leqslant \|x\|\lambda(t)\varphi(\|x\|),$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\|x\|}{dt} \leqslant \frac{\|x\|}{\|x\|}\lambda(t)\varphi(\|x\|) < n\lambda(t)\varphi(\|x\|) = n\lambda(t)\varphi(r),$$

$$\frac{dV}{dt} \leqslant \left\{\exp\left[\int_{R_0}^{r} \frac{dr}{\varphi(r)} - n\int_0^t \lambda(s)ds\right]\right\} \times \left[-n\lambda(t) + \frac{1}{\varphi(r)}\frac{dr}{dt}\right]$$
$$\leqslant \left\{\exp\left[\int_{R_0}^{r} \frac{dr}{\varphi(r)} - n\int_0^t \lambda(s)\, ds\right]\right\} \times \left[-n\lambda(t) + \frac{1}{\varphi(r)}n\lambda(t)\varphi(r)\right] \leqslant 0.$$

由定理 2.2 知 (4) 的解是一致有界.

附带指出一点，就是这里所作的李雅普诺夫函数自然也就解决了方程(4)之解，在 t 的正半轴的存在区间之极右点是 $b=+\infty$ 的问题. 从而给出了[5]之第一章定理 2 的另一个证明.

例 5: 福原满洲雄[2]考虑

$$\ddot{x} + (1 + f(t))x = 0, \tag{5}$$

假定 $f(t)$ 在 $I\ (0 \leqslant t < +\infty)$ 上连续及 $\int_0^t |f(s)|ds < +\infty$. 此时作变换把 (5) 化成等价的方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -(1 + f(t))x. \end{cases} \tag{5)*}$$

我们取函数

$$V(t, x, y) = e^{-\int_0^t |f(s)|ds}(x^2 + y^2),$$

显见 $V(t, x, y) \leqslant x^2 + y^2 = a(x, y)$, $V(t, x, y)$ 具有性质 A,

$$V(t, x, y) \geqslant e^{-\int_0^\infty |f(s)|ds}(x^2 + y^2) = b(x, y),\ V(t, x, y)$$

具有性质 B.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (x^2 + y^2)e^{-\int_0^t |f(s)|ds}(-|f(t)|) \\ &\quad + e^{-\int_0^t |f(s)|ds}(2x\dot{x} + 2y\dot{y}) \\ &= e^{-\int_0^t |f(s)|ds}[-|f(t)|(x^2 + y^2) - 2f(t)xy] \\ &= -e^{-\int_0^t |f(s)|ds}[|f(t)|(x^2 + y^2) + 2f(t)xy]. \end{aligned}$$

又

$$x^2 + y^2 \geqslant 2xy,\quad |f(t)|(x^2 + y^2) \geqslant 2xy|f(t)| \geqslant 2f(t)xy,$$

故

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(5)^*} \leqslant 0.$$

根据定理 2.2 知方程组 (5)* 也即 (5) 的解是一致有界.

例 6: 安托西维茨 (Antosiewicz)[3] 考虑

$$\ddot{x} + \varphi(x, \dot{x})\dot{x} + h(x) = e(t). \tag{6}$$

这里 $\varphi(x, \dot{x})$, $h(x)$ 和 $e(t)$ 仍旧如在例 1 中所作的同样假定，在那里我们证明了解是等度有界的；现在我们进一步证明 (6) 的解是一致有界. 为此将 (6) 化成等价的方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\varphi(x, y)y - h(x) + e(t). \end{cases} \tag{6)*}$$

此时我们考虑

$$V(t, x, y) = [y^2 + 2H(x)]^{\frac{1}{2}} - \int_0^t |e(t)| dt.$$

(i) 根据假定 $\int_0^{\infty} |e(s)| ds < +\infty$ 知

$$V(t, x, y) \leqslant [y^2 + 2H(x)]^{\frac{1}{2}} = a(x, y),$$

则 $a(x, y)$ 是连续增长的正函数. 不妨记 $R_0 = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$. 当 $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \geqslant R_0$ 时, $a(x, y)$ 在乘积空间

$$\Delta^*:\ I(0 \leqslant t < \infty) \times E^*_{R_0}(r \geqslant R_0)$$

上为连续递增的正函数,则 $V(t, x, y)$ 有性质 A.

(ii) $$V(t, x, y) = [y^2 + 2H(x)]^{\frac{1}{2}} - \int_0^t |e(s)| ds$$

$$\geqslant [y^2 + 2H(x)]^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\infty} |e(s)| ds,$$

$$b(x, y) = [y^2 + 2H(x)]^{\frac{1}{2}} - R_0.$$

当 $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = r \geqslant R_0$, $b(x, y)$ 在乘积空间 Δ^* 上为连续递增的非负函数,且当 $r \to \infty$ 时, $b(x, y) \to +\infty$. $V(t, x, y)$ 具有性质 B.

(iii) $$\frac{dV}{dt} = -|e(t)| + \frac{1}{2}(y^2 + 2H(x))^{-\frac{1}{2}}(2y\dot{y} + 2h(x)\dot{x})$$

$$= -|e(t)| + [y^2 + 2H(x)]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times (-\varphi(x, y)y^2 + e(t)y).$$

根据假定可适当选取 $|y|$ 足够大,使得

$$-\varphi(x, y)y^2 + e(t)y \leqslant 0.$$

不妨假定当 $|y| \geqslant R_1$ 时, 上不等式成立. 那末就取 $r \geqslant R = \max(R_0, R_1)$, 就有 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(6)^*} \leqslant 0$, 由定理 2.2 知 $(6)^*$ 的解是一致有界的.

下面就平面的情形来阐明一个有界性定理, 这个定理对于研究非自治系统的周期解的存在性是有用的.

考虑

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = g(t, x, y). \end{cases} \tag{7}$$

这里 $f(t, x, y)$, $g(t, x, y)$ 在乘积空间

Δ^*: $I(0 \leqslant t < \infty) \times E_x^1(|x| \geqslant k_1) \times E_y^1(|y| \geqslant k_2)$

上连续 ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$, 可以充分大). 我们用下列方式来定义一个域,

D: $|x| < k_1$, $|y| < k_2$,

D^c: $|x| \geqslant k_1$ $|y| \geqslant k_2$,

D^*: $I(0 \leqslant t < +\infty) \times D^c$ ($|x| \geqslant k_1$, $|y| \geqslant k_2$).

定理 2.3: 假定存在一个连续的正函数 $V(t, x, y)$ 在 D^* 内满足下列条件:

1°. 当 $|y| \to \infty$, $V(t, x, y) \to \infty$ 关于 (t, x) 是一致地成立;

2°. 对每一对正常数 N_1 和 N_2 ($N_i \geqslant k_i$, $i = 1, 2$), 都存在一个正数 $G(N_1, N_2)$, 使得当 $t \in I$, $|x| = N_1$, $|y| = N_2$ 时

$$V(t, x, y) \leqslant G(N_1, N_2);$$

3°. $V(t, x, y)$ 在 D^* 内有

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{\partial V}{\partial y} g \leqslant 0.$$

此外,对每个 $M > 0$ (M 可以充分大),作区域

$D_1(M)$: $t \in I(0 \leqslant t < \infty)$, $x \geqslant L$, $|y| \leqslant M$,

$D_2(M)$: $t \in I(0 \leqslant t < \infty)$, $x \leqslant -L$, $|y| \leqslant M$.

这里 $L > 0$ 可以充分大,且依赖于 M.

假定存在两个连续的正函数 $W_i(t, x, y)$ ($i = 1, 2$). 它们分别在区域 $D_i(M)$ ($i = 1, 2$) 里定义,且满足下列条件;

4°. 对每个 $L'(>L)$, 存在一个正数 $H(L')$,使当 $x = +L'$ 和 $x = -L'$ 时, $W_1(t, x, y) \leqslant H(L')$, $W_2(t, x, y) \leqslant H(L')$;

5°. 当 $x \to \infty$ 时, $W_1(t, x, y) \to \infty$ 对 (t, y) 一致地成立; 当 $x \to -\infty$ 时, $W_2(t, x, y) \to \infty$ 对 (t, y) 一致地成立;

6°. $W_i(t, x, y)\ (i=1, 2)$ 在它们所定义的域内有

$$\frac{dW_i}{dt} \leqslant 0\ (i=1, 2),$$

则对方程组 (7) 由平面 $\pi(t_0)$ $(t_0 \in I)$ 出发的任何一解而言，都存在两个正数 $\alpha=\alpha(t_0, x_0, y_0)$，$\beta=\beta(t_0, x_0, y_0)$，使当 $t>t_0$ 时，$|x(t;t_0,x_0,y_0)|<\alpha$，$|y(t;t_0,x_0,y_0)|<\beta$。

这个定理的几何意义很明显，从下面图中立即可看出定理所阐述的结论正确。

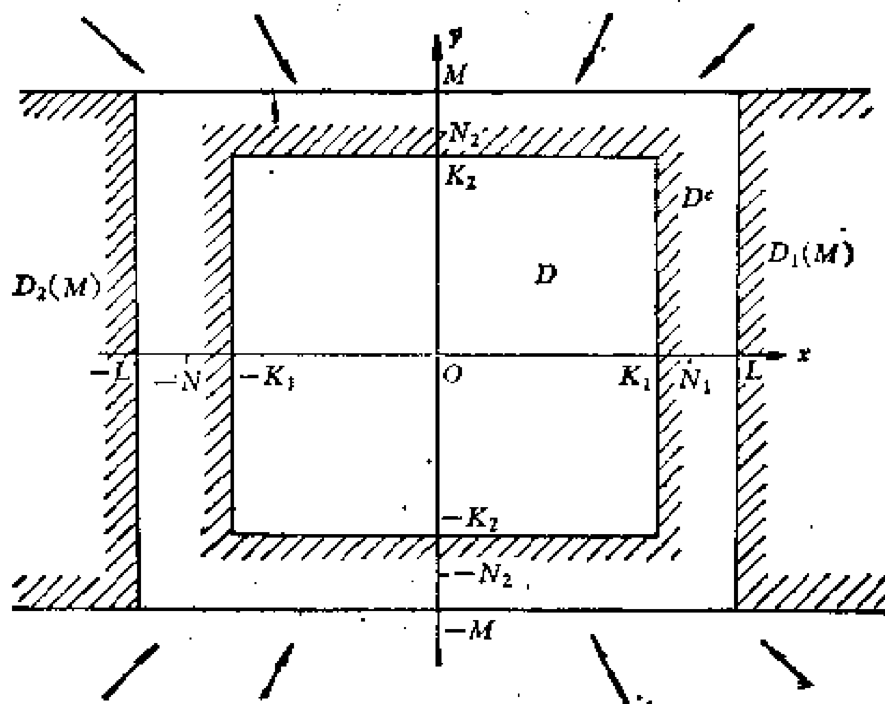


图 1

例 7：沸畑茂一山口昌哉[6] 应用这个定理研究带有周期强迫力的二阶系统

$$\ddot{x}+a(x)\dot{x}+\varphi(x)=p(t), \tag{7.1}$$

满足下列条件

(1) $A(x)=\int_0^x a(\xi)d\xi$，当 $x\to+\infty$ 时，$A(x)\to+\infty$，

当 $x\to-\infty$ 时，$A(x)\to-\infty$，

(2) $\operatorname{sgn}x\cdot\varphi(x)\geqslant 0$，当 $|x|>q$，

这里 $a(x)$, $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ 及 $p(t)$ 是连续的，$p(t)$ 是周期为 ω 的周期函数，且 $\int_0^\omega p(t)dt = 0$，q 是一个正数．为了研究方便起见，我们考虑下列等价方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y - A(x) + P(t), \\ \dot{y} = -\varphi(x). \end{cases} \tag{7.2}$$

这里 $P(t) = \int_0^t p(\tau)d\tau$.

在选取适当大的正数 a 与 b 的前提下，按下列方式来作出定理中所要求的函数 $V(t, x, y)$,

$$V(t, x, y) = \begin{cases} e^{u(x,y)}, & \text{I}: (x \geqslant a, |y| < \infty), \\ e^{u(x,y)-x+a}, & \text{II}: (|x| \leqslant a, y \geqslant b), \\ e^{u(x,y)+2a}, & \text{III}: (x \leqslant -a, y \geqslant b), \\ e^{u(x,y)+\frac{2a}{b}y}, & \text{IV}: (x \leqslant -a, |y| \leqslant b), \\ e^{u(x,y)-2a}, & \text{V}: (x \leqslant -a, y \leqslant -b), \\ e^{u(x,y)+x-a}, & \text{VI}: (|x| \leqslant a, y \leqslant -b). \end{cases}$$

这里 $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(x)dx$，$u(x, y) = \Phi(x) + \frac{1}{2}y^2$.

至于 $W_i(t, x, y)$ $(i = 1, 2)$，我们可以这样的选取，即选取一个适当的 $c > 0$，使当

$$x \geqslant c \text{ 时}, W_1(t, x, y) = x,$$
$$x \leqslant -c \text{ 时}, W_2(t, x, y) = -x.$$

下面证明如此选取的 V, W_i $(i = 1, 2)$，满足定理中所说的条件．

证：根据假定，当 $|x| \geqslant q$ 时，$\varphi(x)$ 与 x 同号，因此

$$\lim_{|x|\to\infty} \Phi(x) = \infty. \quad u(x, y) = \Phi(x) + \frac{1}{2}y^2,$$

当 $|y| \to \infty$ 时，$u(x, y) \to \infty$ 对于 x 是一致地成立．$V(t, x, y)$ 定义在乘积空间 $\Delta^*: I(0 \leqslant t < +\infty) \times E^*_{ab}(|x| \geqslant a, |y| \geqslant b)$ 上的一个正连续函数，且

1°. 当 $|y| \to \infty$ 时，$V(t, x, y) \to \infty$ 对于 (t, x) 是一致地成立；

2°. 对于每一对正常数 N_1, N_2 $(N_1 \geqslant a, N_2 \geqslant b)$,

$$V(t, x, y)\Big|_{\substack{|x|=N_1\\|y|=N_2}} = e^{u(N_1,N_2)} = \exp\left(\Phi(N_1) + \frac{1}{2}N_2^2\right);$$

3°. $$\frac{dV}{dt} = e^{u(x,y)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial u}{\partial y}\dot{y}\right)$$

$$= e^{u(x,y)}[\varphi(x)(y - A(x) + P(t)) + y(-\varphi(x))]$$
$$= e^{u(x,y)}[-\varphi(x)(A(x) - P(t))].$$

(1) 在区域 I 中来考虑，当 $|x| \geqslant q$ 时，$\varphi(x)\operatorname{sgn} x \geqslant 0$，把 a 取得适当大，使 $a>q$，则当 $|x| \geqslant a > q$ 时，即可保证 $\varphi(x)\operatorname{sgn} x \geqslant 0$；$P(t)$ 有界，当 $x \to \infty$ 时，$A(x) \to \infty$. 亦可把 a 选得适当大，使得 $x \geqslant a$ 时，$A(x) - P(t) > 0$. 故在如此选取适当大的 a 值情况下，我们即有在区域

$$\text{I}: x \geqslant a, |y| < \infty \text{ 内有 } \frac{dV}{dt} \leqslant 0.$$

(2) 在区域 II：$|x| \leqslant a$, $y \geqslant b$, 此时有

$$\frac{dV}{dt} = e^{u(x,y)-x+a}[(\varphi(x) - 1)\dot{x} + y\dot{y}]$$

$$= e^{u(x,y)-x+a}[-y - (A(x) - P(t))(\varphi(x) - 1)].$$

当 a 值选定后，则当 $|x| \leqslant a$ 时，$|(A(x) - P(t))|(\varphi(x) - 1)$ 是一个有界量，因此我们可以把 b 选得足够大，使得 $y \geqslant b$ 时，

$$-y + (-A(x) + P(t))(\varphi(x) - 1) \leqslant 0.$$

这样一来在区域 II ($|x| \leqslant a$, $y \geqslant b$) 中我们就有

$$\frac{dV}{dt} \leqslant 0.$$

(3) 在区域 III：$x \leqslant -a$, $y \geqslant b$, 此时

$$\frac{dV}{dt} = e^{u(x,y)+2a}[-\varphi(x)(A(x) - P(t))].$$

根据在 I 中选出的 a 知，当 $|x| \geqslant a$ 时，$\varphi(x)\operatorname{sgn} x \geqslant 0$，可是现在考虑 $x \leqslant -a$，所以 $\varphi(x) \leqslant 0$ 即 $-\varphi(x) \geqslant 0$. 再根据 $A(x)$ 的性质知当 $x \to -\infty$ 时，$A(x) \to -\infty$，当 $x \leqslant -a$ 时，$A(x) - P(t) \leqslant 0$. 因此在区域 III ($x \leqslant -a$, $y \geqslant b$)中有

$$\frac{dV}{dt} \leqslant 0.$$

(4) 在区域 IV: $x \leqslant -a$, $|y| \leqslant b$ 中,

$$\frac{dV}{dt} = e^{u(x,y)+\frac{2a}{b}y}\left[(\varphi(x)(y - A(x) + P(t)) + \left(y + \frac{2a}{b}\right)(-\varphi(x))\right] = e^{u(x,y)+\frac{2a}{b}y} \times \left[-\varphi(x)\left(\frac{2a}{b} + A(x) - P(t)\right)\right].$$

由这里看出前面在 I 中选的 a 还不够大,应当把 a 再选得大一些,使得当 $x \leqslant -a$ 时,

$$A(x) - P(t) + \frac{2a}{b} < 0.$$

这样就保证在区域 IV ($x \leqslant -a$, $|y| \leqslant b$) 有

$$\frac{dV}{dt} \leqslant 0,$$

当然如此选取的 a, 所有前面讨论过的$\frac{dV}{dt}$之性质仍成立。

(5) 在区域 V: $x \leqslant -a$, $y \leqslant -b$, 有

$$\frac{dV}{dt} = e^{u(x,y)-2a}[\varphi(x)(y - A(x) + P(t)) + y(-\varphi(x))] = e^{u(x,y)-2a}[-\varphi(x)(A(x) - P(t))].$$

显见在 (1) 中选取的 a 就足以保证当 $x \leqslant -a$ 时,

$$A(x) - P(t) \leqslant 0,$$

则在 (4) 中选取的 a 值就更满足 $|A(x) - P(t)| \geqslant 0$, 此时有

$$\frac{dV}{dt} \leqslant 0.$$

(6) 在区域 VI: $|x| \leqslant a$, $y \leqslant -b$, 有

$$\frac{dV}{dt} = e^{u(x,y)+x-a}[(\varphi(x) + 1)(y - A(x) + P(t)) + y(-\varphi(x))] = e^{u(x,y)+x-a}[y - (\varphi(x) + 1)(A(x) - P(t))].$$

在上述 (4) 中选取之 a 值的基础上,此时当 $|x| \leqslant a$ 时

$$|(\varphi(x)+1)(A(x)-P(t))| \leqslant M_0\ (\text{常量}).$$

此时把 b 再选得大一些,使当 $y \leqslant -b$ 时,就有

$$y-(\varphi(x)+1)(A(x)-P(t)) \leqslant 0.$$

因此在这样选取的 b 值情况下,我们有

$$\frac{dV}{dt} \leqslant 0.$$

通过上述分析知在乘积空间

$$\Delta^*: I(0 \leqslant t < \infty) \times E_{ab}(|x| \geqslant a,\ |y| \geqslant b)$$

中,我们有

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}(y - A(x) + P(t)) + \frac{\partial V}{\partial y}(-\varphi(x)) \leqslant 0.$$

此外我们在

$$D_1(M):\ t \in I(0 \leqslant t < \infty),\ x \geqslant L,\ |y| \leqslant M$$

上定义函数 $W_1(t, x, y) = x$. 在

$$D_2(M):\ t \in I(0 \leqslant t < \infty),\ x \leqslant -L,\ |y| \leqslant M$$

上定义函数 $W_2(t, x, y) = -x$. 显见 $W_i(t, x, y), (i=1, 2)$ 有下列性质即

当 $x \to \infty$ 时,$W_1(t, x, y)$ 对 (t, y) 一致地趋于 ∞,当 $x \to +\infty$ 时, $W_2(t, x, y)$ 对 (t, y) 一致地趋于$-\infty$. 又在 $D_1(M)$ 内,

$$\frac{dW_1}{dt} = \frac{dx}{dt} = y - A(x) + P(t).$$

根据 $A(x)$ 的性质当 $x \to \infty$, $A(x) \to \infty$, 可以把 L 选得适当大,使在 $D(M)\ (x \geqslant L,\ |y| \leqslant M)$ 内,有

$$y - A(x) + P(t) \leqslant 0.$$

从而保证了在 $D_1(M)$ 内有 $\frac{dW_1}{dt} \leqslant 0$, 在上述选取的 L 值之情况下,在区域 $D_2(M)\ (x \leqslant -L,\ |y| \leqslant M)$ 内亦有

$$\frac{dW_2}{dt} = -\frac{dx}{dt} = -y + A(x) - P(t) \leqslant 0.$$

因此根据定理 2.3 知针对方程组 (7.2)，由平面 $\pi(t_0)$ 出发的任一解 $x = x(t;\ x_0,\ y_0,\ t_0)$，$y = y(t;\ x_0,\ y_0,\ t_0)$ 而言，都存在两个正数 α 和 β，使当 $t > t_0$ 时，

$$|x(t;\ x_0,\ y_0,\ t_0)| < \alpha,\ |y(t;\ x_0,\ y_0,\ t_0)| < \beta.$$

即方程的解是有界的.

现在我们就来讨论李雅普诺夫函数和解的最终有界性之间的关系.

定理 2.4: 如果存在一个正的李雅普诺夫函数 $V(t,\ x)$，在乘积空间

$$\Delta^*:\ I(0 \leqslant t < \infty) \times E^*_{R_0}(\|x\| \geqslant R_0)$$

内定义，具有性质 A，B 和 C，则方程 (2.1) 的解是一致最终有界.

证: 由于 $V(t,\ x)$ 在 Δ^* 内具有性质 B，所以存在一个非负连续的增函数 $b(\|x\|)$，使得在 Δ^* 内有

$$b(\|x\|) \leqslant V(t,\ x),\ \lim_{\|x\| \to \infty} b(\|x\|) = +\infty.$$

故我们可以适当地选取 R_0，使当 $x \in E^*_{R_0}(\|x\| \geqslant R_0)$，就存在一个正数 c，

$$0 < c \leqslant V(t,\ x).$$

再则根据定理 2.2 知方程之解是一致有界，故存在一个正数 B，使得当 $x \in E_{R_0}(\|x\| \leqslant R_0)$ 时，就有

$$\|x(t;\ x_0,\ t_0)\| < B.$$

现在我们就考虑 $x = x\ (t;\ x_0,\ t_0)$，$x_0 \in E_\alpha\ (\alpha > R_0)$ α 是一任意正数. 此时就存在一个正数 β，它仅仅依赖于 α，且当 $t \geqslant t_0$ 时，我们有 $\|x(t;\ x_0,\ t_0)\| < \beta$. 在域 II: $t \in I(0 \leqslant t < \infty) \times \bar{E}_{R_0}(R_0 \leqslant \|x\| \leqslant \beta)$ 中来考虑函数 $V(t, x)$，则根据 $V(t,\ x)$ 具有性质 C，即存在一个正的连续函数 $C(\|x\|)$，使当 $t \in I$，$R_0 \leqslant \|x\| \leqslant \beta$ 时，

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -C(\|x\|).$$

又因 $C(\|x\|)$ 在 $R_0 \leqslant \|x\| \leqslant \beta$ 上连续，故存在一个仅仅依赖于 β

的正数 $\lambda(\beta)$，使当 $(t, x) \in H$ 时，

$$\frac{dV(t, x)}{dt} \leqslant -\lambda(\beta).$$

如果我们假定初始值取在 $t_0 \in I$, $x_0 \in E_\alpha - E_{R_0}(R_0 < \|x\| < \alpha)$ 上所确定的解 $x(t; x_0, t_0)$ 总是满足

$$R_0 < \|x(t; x_0, t_0)\| \leqslant \beta,$$

那我们有

$$V(t, x(t; x_0, t_0)) - V(t_0, x_0) \leqslant -\lambda(t - t_0).$$

从这个不等式我们看出，在某一个时刻 $t = t'$，有

$$\|x(t'; x_0, t_0)\| = R_0.$$

这里 $t_0 \leqslant t' \leqslant t_0 + T$，且 $T = \frac{1}{\lambda}(a(\alpha) - c)$. 这是根据 $V(t, x)$ 具有性质 A 而定出来的. 因为在乘积空间

$$\Delta^*: t \in I(0 \leqslant t < \infty) \times \bar{E}_{R_0}(R_0 \leqslant \|x\| \leqslant \beta)$$

内有 $0 < c < V(t, x) \leqslant a(\|x\|)$，故根据 $\dot{V}(t, x) \leqslant -\lambda(\beta)$ 知函数 $V(t, x(t; x_0, t_0))$ 从集 $E_\alpha(\|x\| \leqslant \alpha)$ 衰减到 $E_{R_0}(\|x\| \leqslant R_i)$ 所需的时间不会超过 $T = \frac{1}{\lambda}(a(\alpha) - c)$，即

$$V(t, x(t; x_0, t_0) - V(t_0, x_0) \leqslant a(\alpha) - c = \lambda T.$$

因此当 $t > t_0 + T$ 时，我们就有 $\|x(t; x_0, t_0)\| < B$. 注意这里的 T 仅仅依赖于 α. 因此方程 (2.1) 的解是一致最终有界.

例 8: 勒塔 (Reuter)[6] 曾考虑

$$\ddot{x} + kf(x)\dot{x} + g(x) = kp(t) \quad (k > 0),$$

这里 $f(x)$, $g(x)$ 是 x 的连续函数. 我们作

$$P(t) = \int_0^t p(\tau)d\tau, \quad F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi,$$

$$G(x) = \int_0^x g(\xi)d\xi.$$

假定 (i) $P(t)$ 是有界的，

(ii) 当 $x \to \pm\infty$ 时，$F(x) \to \pm\infty$，

(iii) 当 $|x| \geqslant x_0 > 0$, $xg(x) > 0$，且当 $|x| \to \infty$ 时，

$$G(x) = \int_0^x g(\xi)d\xi \to \infty,$$

则方程之解是一致最终有界.

证: 首先我们作等价的方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y + kP(t) - kF(x), \\ \dot{y} = -g(x). \end{cases}$$

在适当选取常数 $p > 0, q > 0$ 的情况下，按下列方式来定义函数 $V(t, x, y)$

$$V(t,x,y) = \begin{cases} G(x) + \dfrac{y^2}{2}, & \text{I}: (x \geqslant q, |y| < \infty), \\ G(x) + \dfrac{y^2}{2} - x + q, & \text{II}: (|x| \leqslant q, y \geqslant p), \\ G(x) + \dfrac{y^2}{2} + 2q, & \text{III}: (x \leqslant -q, y \geqslant p), \\ G(x) + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{2q}{p}y, & \text{IV}: (x \leqslant -q, |y| \leqslant p), \\ G(x) + \dfrac{y^2}{2} - 2q, & \text{V}: (x \leqslant -q, y \leqslant -p), \\ G(x) + \dfrac{y^2}{2} + x - q, & \text{VI}: (|x| \leqslant q, y \leqslant -p). \end{cases}$$

显见在区域 $I(0 \leqslant t < +\infty) \times E^*(|x| \geqslant q, |y| \geqslant p)$ 上定义的函数 $V(t, x, y)$ 是连续的. 当 $p > 0, q > 0$ 取得适当大时，就足以保证 $V(t, x, y)$ 在

$$\Delta^*: I(0 \leqslant t < +\infty) \times E^*(|x| \geqslant q, |y| \geqslant p)$$

上是正函数，且是正定的. 这说明函数 $V(t, x, y)$ 在 Δ^* 上具有性质 A. 同理可以看出函数 $V(t, x, y)$ 在 Δ^* 上具有性质 B. 又

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}(y + kP(t) - kF(x)) + \frac{\partial V}{\partial y}(-g(x)),$$

(1) 在区域 I: $x \geqslant q, |y| < \infty$, 有

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= g(x)(y + kP(t) - kF(x)) + y(-g(x)) \\ &= kg(x)(P(t) - F(x)). \end{aligned}$$

因 $xg(x) > 0$, 此时 $x \geqslant q > 0$, $g(x) > 0$; 再则 $P(t)$ 有界，当 q

适当大时，$F(x) > |P(t)|$，此时就有

$$\frac{dV}{dt} < 0;$$

（2）在区域 II：$|x| \leqslant q, y \geqslant p$，有

$$\frac{dV}{dt} = (g(x) - 1)(y + kP(t) - kF(x)) + y(-g(x))$$

$$= -y + (g(x) - 1)k(P(t) - F(x)).$$

因为在 $|x| \leqslant q$ 时，$(g(x) - 1)k(P(t) - F(x))$ 有界，所以当把常数 p 选得适当大时，就足以保证

$$\dot{V}(t, x, y) = -y + (g(x) - 1)k(P(t) - F(x)) < 0;$$

（3）在区域 III：$x \leqslant -q, y \geqslant p$，有

$$\frac{dV}{dt} = g(x)(y + kP(t) - kF(x)) + y(-g(x))$$

$$= kg(x)(P(t) - F(x)),$$

根据假定当 q 适当大时，$-F(x) > 0$，故 $-F(x) > |P(t)|$，故 $F(x) < P(t) < -F(x)$，即 $P(t) - F(x) > 0$；此时 $g(x) < 0$，因此有

$$\frac{dV}{dt} < 0;$$

（4）在区域 IV：$x \leqslant -q, |y| \leqslant p$，有

$$\frac{dV}{dt} = g(x)[y + k(P(t) - F(x))] + \left(y + \frac{2q}{p}\right)(-g(x)),$$

$$= g(x)\left[k(P(t) - F(x)) - \frac{2q}{p}\right],$$

同理，当把 q 取得适当大时仍旧可保证

$$k(P(t) - F(x)) - \frac{2q}{p} > 0,$$

而此时 $g(x) < 0$，因此有 $\frac{dV}{dt} < 0$；

（5）在区域 V：$x \leqslant -q, y \leqslant -p$，有

$$\frac{dV}{dt} = g(x)[y + k(P(t) - F(x))] + y(-g(x))$$

$$= kg(x)(P(t) - F(x)),$$

当 q 取得适当大时，$P(t) - F(x) > 0$，而此时 $g(x) < 0$，故

$$\frac{dV}{dt} < 0;$$

(6) 在区域 VI: $|x| \leqslant q$, $y \leqslant -p$, 有

$$\frac{dV}{dt} = (g(x) + 1)[y + k(P(t) - F(x))] + y(-g(x))$$

$$= y + (g(x) + 1)k(P(t) - F(x)).$$

由于在 $|x| \leqslant q$ 时，$k(P(t) - F(x))(g(x) + 1)$ 有界，因此把 p 选取得适当大就可以保证

$$\frac{dV}{dt} = y + (g(x) + 1)k(P(t) - F(x)) < 0.$$

这样一来，我们所作之函数 $V(t, x, y)$ 完全满足定理 2.4 之全部条件，因此方程之解是一致最终有界的。

第二篇 线性系统

第四章 常系数系统

众所周知,常系数线性系统是最容易研究的,因为常系数线性微分方程组是可以通过初等函数解到底的最重要的一类常微分方程.

几乎可以这样说:只要加以足够精密的分析,任何一个物理系统都是非线性的. 我们说某一个实际的物理系统是线性系统,其意思只是说,它可以充分精确地用一个线性系统加以近似地代表而已. 并且,所谓"充分精确"的意思是:实际系统与理想化了的线性系统的差别,对于具体研究的问题来说已经小到无关紧要的程度.

然而,在实践中,我们得到了这样的结论:为数很多的工程系统经过工程近似的手续之后,在一定的条件下,都可以看作常系数系统,这也就是为什么在控制和调节的理论中,关于稳定性的这一部分理论特别发达的缘故. 目前伺服系统理论所处理的基本上也就是这一类系统(当然,近年来也对非线性调节系统和非线性伺服系统进行了大量的研究).

事实上,线性系统理论是自动控制理论中历史最悠久,内容最完善和应用最广泛的一个分支,这是因为从数学的角度来看,它和线性微分方程理论,电气和机械系统的振动理论,电路理论等十分接近,可以利用这些学科已有的丰富成果;另一方面,大量的工程实际问题就可以近似地用线性系统理论来研究和设计.

§1. 一般理论[1]

线性系统中最重要的一类可以用常系数线性微分方程来近似

描述，它可以很成功地用拉普拉斯(Laplace)变换方法来研究，因此系统的运动状态的判别就决定于微分方程的(即其传递函数的分母的)特征根的分布情况．例如系统的稳定性就归结为要求"特征根均在左半平面"，相应的判别方法有古典的劳思-赫维茨(Routh-Hurwitz)准则等．

上述方法不仅用来判别稳定性，而且还可以由所用的种种曲线的性状和特征根的分布情况来分析系统的动态品质，计算过渡过程曲线等等．相应地还有一整套的工程设计(分析和综合)方法，这些基于传递函数或频率特性的理论和方法往往称为"频域"的方法．这是常系数线性系统古典理论的主要内容．

由于常系数线性系统有许多技术上的应用，所以对以前那种认为解常系数线性方程组在原理上并不太困难，因此认为它在理论上没有多大兴趣的看法，已有所改变．反映在现代文献中，这就是应用技术方面对常系数线性系统理论提出了一系列新的带理论性的问题．解决这些理论性问题需要做大量的带有应用方向性的工作．这里我们先简述关于常系数线性微分方程的一般理论．

考虑常系数线性微分方程组

$$\frac{dx_s}{dt}=a_{s1}x_1+\cdots+a_{sn}x_n \qquad (s=1,2,\cdots,n), \tag{1.1}$$

这里 $a_{s\sigma}(s,\sigma=1,\cdots,n)$ 是常量．积分这类方程的理论是众所周知的．我们先叙述这理论的基本原理．

考察 n 次方程

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{1.2}$$

这个方程称为系统(1.1)的特征方程，行列式 $D(\lambda)$ 称为特征行列式．设 λ_l 是这个方程的任一根，则对应于这个根，方程(1.1)有一特解，其形式为

$$x_s=A_s e^{\lambda_l t} \qquad (s=1,2,\cdots,n). \tag{1.3}$$

其中 A_s 是常数，它们由下面齐次代数方程来决定

$$a_{s1}A_1 + \cdots + (a_{ss} - \lambda_i)A_s + \cdots + a_{sn}A_n = 0. \quad (1.4)$$

因为 $D(\lambda_i) = 0$，故它有非零解.

如果方程 (1.2) 只有单根，则在 (1.3) 中令 $i = 1, 2, \cdots, n$，即得到方程 (1.1) 的 n 个特解，这些解是独立的.

如果 λ_i 是重根，且其重次等于 l，与前面一样，这个根对应于解 (1.3)，其中 A_s 与前面一样也适合方程 (1.4)，但在这种情形中，根 λ_i 还对应于与 (1.3) 不同的其它解，这些解具有形式

$$x_s = f_s(t)e^{\lambda_i t} \quad (s = 1, 2, \cdots, n). \quad (1.5)$$

其中 $f_s(t)$ 为 t 的一个多项式. 这些多项式的次数不超过 $l-1$ 而可小于这个数. 这里需要根据 $D(\lambda_i)$ 的秩是等于还是小于 $n-1$ 而分成两种不同的情形.

首先假设 $D(\lambda_i)$ 的秩等于 $n-1$，即这个行列式的 $n-1$ 阶子行列式[1]中至少有一个不等于零，在这种情形中 (1.1) 总有 (1.5) 形式的解，而且至少有一个多项式的次数是 $l-1$. 如果用 $f_s(t)$ 的任意阶导数来代替这个解中的 $f_s(t)$，我们仍然得到方程 (1.1) 的解. 用此方法可得到方程 (1.1) 的 l 组解，具有下面的形式

$$\left.\begin{aligned} x_s^{(1)} &= f_s(t)e^{\lambda_i t}, \\ x_s^{(2)} &= \frac{df_s(t)}{dt}e^{\lambda_i t}, \\ &\cdots\cdots \\ x_s^{(l)} &= \frac{d^{(l-1)}f_s(t)}{dt^{l-1}}e^{\lambda_i t}. \end{aligned}\right\} \quad (1.6)$$

所有这些解都互相独立. 最后一个解与 (1.3) 是一样的. 我们把所考虑的这种情形称为重根 λ_i 对应的一组解.

设 $D(\lambda_i)$ 的秩小于 $n-1$，例如设此行列式的秩等于 $n-2$，则所有 $n-1$ 阶子行列式都等于零，但至少有一个 $n-2$ 阶的子行列式不等于零，这时方程 (1.1) 有两个形如 (1.5) 的解，其中多

1) 我们把去掉原行列式中 k 行 k 列的一个行列式称为 $(n-k)$ 阶子行列式.

项式 $f_s(t)$ 的最高次数分别等于 p 及 q，而$p+q=l-2$，在这些解中可把其中每一个的 $f_s(t)$ 换为它的任何阶导数而作出新的解，所有如此得到的解是互相独立的.

设

$$\left.\begin{aligned} x_s &= f'_s e^{\lambda_j t}, \\ x_s &= f''_s e^{\lambda_j t} \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

是所指的特解，多项式 $f'_s(t)$ 的次数不超过 p，而其中至少有一项方次取得该数. 多项式 $f''_s(t)$ 的最高方次等于 q. 如上所指，这时 $p+q=l-2$.

在解 (1.7) 中，依次以多项式的各阶导数去代替，我们得到方程 (1.1) 的两组解，分别由 $p+1$ 及 $q+1$ 个解组成，每一个都具有下面的形式

$$\left.\begin{aligned} x_s^{(\alpha)} &= \frac{d^{\alpha-1}f'_s}{dt^{\alpha-1}} e^{\lambda_j t} \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, p+1), \\ x_s^{(\beta)} &= \frac{d^{\beta-1}f''_s}{dt^{\beta-1}} e^{\lambda_j t} \quad (\beta = 1, 2, \cdots, q+1). \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

因此，在所考虑的情形中，根 λ_j 对应于 $p+q+2=l$ 个特解，其中两个具有 (1.3) 的形式(每一组中有一个). 这些解对应于适合代数方程 (1.4) 而互相独立的两组数 A_s，因为行列式 $D(\lambda_j)$ 的秩等于 $n-2$，方程 (1.4) 的确有两组互相独立的解.

在一般情形中，当 $D(\lambda_j)$ 的秩等于 $n-k$ 时，与前面相同，l 重次的根对应于 l 个互相独立的解，但这些解分散在 k 个组中. 如 (1.8).

$D(\lambda_j)$ 的秩不可能比 $n-l$ 小，否则很容易证明 λ_j 的重次将较 l 为大. 因此对应于所考虑的根，解的组数不可能超过 l，即根的重次. 如果组数等于 l，则每一组是由一个解组成，且每一个解都是形如 (1.3) 的形式.

由此可知，在所有的场合中，方程 (1.1) 对应于某重根的特解数等于该重根的重次. 实际计算这些解需要解线性代数方程组. 作出这些方程最简单的方法已由 H. Г. 切达耶夫[2]指出.

考虑方程 (1.2) 所有的根，我们得到方程 (1.1) n 个独立的特解. 以 $x_{s1}, x_{s2}, \cdots, x_{sn}$ 表示这些特解(第一个指数表函数的号码，第二个指数表解的号码)，我们得到方程 (1.1) 的普遍解

$$x_s = c_1 x_{s1} + c_2 x_{s2} + \cdots + c_n x_{sn}. \tag{1.9}$$

其中 $c_1, \cdots, c_n$ 为任意常数. 这些常数决定于初始条件，而且如果在任何解中量 x_s 的初始值很小时，则相应的常数 c_j 的值也很小.

如果 λ_i 是复数，则如 (1.3) 或 (1.5) 形式的解也都是复数的. 因我们只对实数解有兴趣，故有必要将它们变为实数的形式. 为此注意到因 a_{ij} 是实数，如有满足方程 (1.1) 的任何一组复函数解，则这些函数的实部与虚部也满足它. 令 $\lambda_i = \mu + i\nu$，则解 (1.3) 或 (1.5) 中的量 A_s 及 $f_s(t)$ 也是复数的. 设 $A_s = P_s + iQ_s$，$f_s = \varphi_s + i\psi_s$. 其中常量 P_s, Q_s 及函数 φ_s 及 ψ_s 是实的，将 (1.3) 及 (1.5) 中的实部及虚部分开，我们就得到所考虑的根 $\mu + i\nu$ 给出的两个解，或者是

$$x_s = (P_s \cos \nu t - Q_s \sin \nu t) e^{\mu t},$$
$$x_s = (P_s \sin \nu t + Q_s \cos \nu t) e^{\mu t}. \tag{1.10}$$

或者是

$$x_s = (\varphi_s \cos \nu t - \psi_s \sin \nu t) e^{\mu t},$$
$$x_s = (\varphi_s \sin \nu t + \psi_s \cos \nu t) e^{\mu t}. \tag{1.11}$$

它们也是根 $\mu - i\nu$ 所对应的解.

以上所讲的使得当受干扰运动的微分方程具有 (1.1) 的形式时，稳定性问题可以很容易的解决. 实际上干扰运动的特性，稳定或不稳定可以由特征方程 (1.2) 的根完全决定.

首先假设特征方程所有的根的实部都是负的，在这种情形，以上所考虑的特解无论是形如 (1.3) 或 (1.5)，(1.10) 或 (1.11) 当 t 无限增大时，都趋于零. 同样无论 c_j 是怎样的常数对于普遍解 (1.9) 也是这样. 由此可知干扰运动在任何初始条件下都是稳定的并且是渐近稳定的.

假设在特征方程中至少有一个根的实部是正的. 相应于这个

根的特解，当 $t\to\infty$ 时就无限增大．如果这些解中的函数都乘以常数 c，我们仍然得到一个解，对它而言 c 选得足够的小，则 x_s 的初始值可以任意地小．因此在所讨论的情形，方程 (1.1) 具有任意小的初始值的解，当 $t\to\infty$ 时是无限增大的，因而未被干扰运动是不稳定的．

假如特征方程不具有正实部的根，但有实部为零的根，这可能是零或是纯虚数．相应于每一个零根，如果这个根是单根，或者虽然是重根，但解的组数等于根的重次时，则有下列形式的解

$$x_s = A_s. \tag{1.12}$$

否则方程 (1.1) 有下面形式的解

$$x_s = f_s(t). \tag{1.13}$$

其中 $f_s(t)$ 是 t 的多项式．对于每一对纯虚根 $\pm\nu\sqrt{-1}$，如果是单根或虽是重根但其对应的解的组数等于重次，则得到下列形式的解：

$$\begin{aligned} x_s &= P_s\cos\nu t - Q_s\sin\nu t, \\ x_s &= P_s\sin\nu t + Q_s\cos\nu t. \end{aligned} \tag{1.14}$$

如果 $+\nu\sqrt{-1}$ 是重根，而且相应解的组数小于根的重次．则方程 (1.1) 有下面形式的解，

$$\begin{aligned} x_s &= \varphi_s\cos\nu t - \psi_s\sin\nu t, \\ x_s &= \varphi_s\sin\nu t + \psi_s\cos\nu t. \end{aligned} \tag{1.15}$$

其中 φ_s 及 ψ_s 是 t 的多项式．

出现 (1.12) 或 (1.14) 形式的解并不破坏稳定性，因为所有的解中的函数都是有界的．但这时稳定显然不是渐近稳定的．出现 (1.13) 或 (1.15) 形式的解显然引起不稳定．

因此当扰动运动的微分方程具有 (1.1) 的形式时，我们有下面的结论：

1. 如果方程 (1.2) 的所有根都具有负的实部，那末，系统 (1.1) 的零解是渐近稳定的．

2. 如果方程 (1.2) 的根之间至少有一个具有正实部，那末系统

(1.1) 的零解是不稳定的.

3. 如果方程 (1.2) 没有具有正实部的根，但有具有零实部的根，那末，可以有稳定性(不是渐近稳定的)也可以有不稳定性.

这样一来，关于系统 (1.1) 零解的稳定性问题，可以归结于方程 (1.2) 根的性质的研究. 当展开行列式 (1.2) 时，我们得到方程

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \tag{1.16}$$

由多项式 $f(\lambda)$ 的系数组成矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots \\ \cdots\cdots & & & & & & \end{pmatrix}.$$

在这个矩阵的写法中，如果 $m > n$，我们假设 $a_m = 0$，研究行列式

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},\ \cdots,\ \Delta_n = a_n\Delta_{n-1},$$

为了使得方程 (1.16) 的所有根都具有负实部，其充要条件为不等式

$$\Delta_k > 0,\ 当\ k = 1, 2, \cdots, n\ 时 \tag{1.17}$$

满足.

这个论断叫做赫维茨定理；在文献 [2] 中，就有赫维茨定理的证明. 条件 (1.17) 通常称为劳思-赫维茨条件.

对于二阶方程

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

的劳思-赫维茨条件为 $a_1 > 0$，$\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$，或者，同样的，$a_1 > 0$，$a_2 > 0$.

对于三阶方程

$$\lambda^3 + a_1\lambda + a_2\lambda + a_3 = 0$$

的劳思-赫维茨条件写成：

$$a_1 > 0, \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \ a_3(a_1a_2 - a_3) > 0.$$

显然，这些条件等价于条件：

$$a_1 > 0, \ a_3 > 0, \ a_1a_2 > a_3.$$

李森林[3]给出了使

$$|a_{sj} - \lambda\delta_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

之根均具有负实部的一个充分条件.

以 $|a_{sj}|$ 表实数 a_{sj} 的绝对值，作行列式

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & |a_{21}| & \cdots & |a_{n1}| \\ |a_{12}| & a_{22} & \cdots & |a_{n2}| \\ & \cdots\cdots & & \\ |a_{1n}| & |a_{2n}| & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (*)$$

令 A_{sj} 表在 A 中 (s, j) 元的余因子. 例如 A_{13} 为 A 中 (1,3) 元即 $|a_{31}|$ 的余因子.

定理：设在(*)中之 A，A_{1j} 满足条件 $AA_{1j} < 0$ $(j=1, \cdots, n)$，则方程 $|a_{sj} - \lambda\delta_{sj}| = 0$ 的根均具有负实部.

证明参考[3]

例：$n = 3$，设 $a_{11} < 0$，$a_{22} < 0$，$a_{33} < 0$ 及

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & |a_{21}| & |a_{31}| \\ |a_{12}| & a_{22} & |a_{32}| \\ |a_{13}| & |a_{23}| & a_{33} \end{vmatrix} < 0,$$

则

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

的根均具有负实部.

这是因为 $A = a_{11}a_{22}a_{33} + |a_{12}a_{23}a_{31}| + |a_{21}a_{32}a_{13}| - a_{11}|a_{32}a_{23}| - a_{22}|a_{13}a_{31}| - a_{33}|a_{12}a_{21}| < 0$，而上式中除第一项为负以外，其余

各项均为正，因此有 $A_{11}>0$，$A_{12}>0$，$A_{13}>0$. 故 $AA_{1i}<0$，$i=1, 2, 3$，由上面定理，即知 $f(\lambda)=0$ 之根均具有负实部.

上面条件虽属充分条件，但比起用其它方法来判定要简单得多（尤其当 n 很大时），所以在实际工作中可以先试用上述方法. 尤其在设计中，设法使上述定理的条件得到满足，这时再设计就方便多了.

由上看出，常系数线性微分方程组的稳定性问题很简单地解决了，而并不需要用第二方法. 但是我们仍然要作出 (1.1) 的合适的李雅普诺夫函数，因为对这个函数经过一些变动以后，可以得到很大一类非线性方程的合适的李雅普诺夫函数.

§2. 二次型的李雅普诺夫函数的存在性

1. 现在我们将系统 (1.1) 写为矩阵形式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=A\mathbf{x}, \tag{2.1}$$

这里 $\mathbf{x}=\mathrm{col}\,(x_1, \cdots, x_n)$ 即为 n 维列向量，A 是 $n\times n$ 阶的常量矩阵，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

并且寻求二次型 $V=\mathbf{x}'B\mathbf{x}$ (这里 $\mathbf{x}'$ 表示 $\mathbf{x}$ 的转置)，

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \cdots & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

且 $b_{ij}=b_{ji}$，实际上 $V=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j$ 的对于 t 的由于这个系统构成的导数，我们得到

$$\dot{V}=\dot{\mathbf{x}}'B\mathbf{x}+\mathbf{x}'B\dot{\mathbf{x}}.$$

当利用关系式 $\dot{\mathbf{x}}'=\mathbf{x}'A'$ 之时，我们得到

$$\dot{V}=x'(A'B+BA)x. \tag{2.2}$$

现在要求型 V 满足方程

$$\dot{V}=w. \tag{2.3}$$

这里 $w=-x'Cx$ 是给定的二次型.

当比较 (2.2) 及 (2.3) 之时,我们得到了确定矩阵 B 的矩阵方程

$$A'B+BA=-C. \tag{2.4}$$

这样一来，按照给定的 w 的矩阵，方程 (2.4) 允许找出 v 的矩阵，注意到在方程 (2.4) 中,矩阵 B、C 都是对称矩阵.

现在我们来证明下面的定理.

定理 2.1：如果系统 (2.1) 的特征方程的根，使得 $\lambda_i+\lambda_k$ 不取零值(在任意 i, k 的情况下),那末对任何预先给定的二次型 w,存在唯一的满足方程 (2.3) 的二次型 V.

写出矩阵 B 对称性的条件, 并且比较等式 (2.4) 两边相应的项,我们不难得出借助于 C_{ij} 来决定 b_{hk} 的下面的线性方程组

$$\left.\begin{aligned}&b_{ik}=b_{ki},\\&\sum_h(a_{hi}b_{hk}+a_{hk}b_{hi})=-c_{ik},\quad i\geqslant k.\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

我们要指出的是，经过坐标变换 $x=Py$ (P 是非奇异的)，方程 (2.5) 变成

$$\left.\begin{aligned}&b^*_{ik}=b^*_{ki},\\&\sum_h(a^*_{hi}b^*_{hk}+a^*_{hk}b^*_{hi})=-c^*_{ik},\quad i\geqslant k.\end{aligned}\right\} \tag{2.5*}$$

其中 a^*_{ij}, b^*_{ij}, c^*_{ij} 分别为矩阵 A^*, B^*, C^* 中的元素,而

$$A^*=P^{-1}AP,\quad B^*=P'BP,\quad C^*=P'CP. \tag{2.6}$$

因为 $x=Py$, 故 $x'=y'P'$, 方程 (2.1) 经过变换后为

$$\dot{y}=P^{-1}APy=A^*y,$$

这时函数 $V(x)=V(Py)=V^*(y)=y'P'BPy=y'B^*y$, 而

$$w(x)=w(Py)=w^*(y)=-y'P'CPy=-y'C^*y,$$

故

$$\frac{dV^*}{dt} = \dot{y}'B^*y + y'B^*\dot{y}$$
$$= y'A^{*\prime}B^*y + y'B^*A^*y$$
$$= y'(A^{*\prime}B^* + B^*A^*)y.$$

要求

$$\frac{dV^*}{dt} = w^*,$$

即得

$$A^{*\prime}B^* + B^*A^* = -C^*. \tag{2.7}$$

其中 A^*, B^*, C^* 由(2.6)式表示，注意到方程(2.7)与(2.4)不同之处仅在(2.4)的字母上都加上 *，故经过坐标变换以后，(2.5)式变为(2.5)* 式.

现在我们可以选取一个特殊坐标变换(也许是复的)，使得

$$A^* = \begin{pmatrix} G_1 & & & 0 \\ & G_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & G_r \end{pmatrix},$$

这里G_i是形如

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & & & 0 \\ \varepsilon, & \lambda_k & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon, & \lambda_k \end{pmatrix}$$

的方块. 在两个矩阵中没有写出的项均为零. 更进一步指出，ε 是一个固定的(但是是任意的)不等于零的常量，而且 A^*的特征根不依赖于 ε. 令 $\Delta(\varepsilon)$ 表示未知量 b^*_{ik} 的线性方程(2.5)* 的系数行列式，不难看出 $\Delta(\varepsilon)$ 是 ε 的一个多项式，当 $\varepsilon = 0$ 时，(2.5)* 有简单的形式

$$\left.\begin{aligned} b^*_{ik} &= b^*_{ki}, \\ (\lambda_i + \lambda_k)b^*_{ik} &= -c^*_{ik}, \end{aligned} \quad i \geqslant k. \right\} \tag{2.8}$$

因此它的系数行列式 $\Delta(o)$ 是所有 $(\lambda_i+\lambda_k)$ $(i \geqslant k)$ 的乘积，由假设得 $\Delta(o) \neq 0$.

因为 $\Delta(o) \neq 0$,故 $\Delta(\varepsilon)$ 不恒等于零,并且 $\Delta(\varepsilon)$ 是 ε 的多项式,故 $\Delta(\varepsilon)=0$ 只有有限数目个根。我们取 ε 异于这些根中的任一个。因此我们有 $\Delta(\varepsilon) \neq 0$，这样一来,由 $(2.5)^*$ 得出，b_{hk}^* 唯一地由 c_{hk}^* 决定,故 B^* 唯一地由C^*决定,因为由(2.6)式得到，B^*, C^* 唯一地由 B, C 决定(反之亦然),因此我们得到这样的结论,从方程 (2.5) 可以由C唯一地决定B. 定理证毕.

如果A是一个稳定矩阵 (其特征方程的所有特征根都具有负实部)，那末对于任意给定的对称矩阵C，利用上面定理 2.1 (因为 $\lambda_i+\lambda_j \neq 0$)，存在满足

$$A'B+BA=-C$$

的对称矩阵 B. 显然矩阵B由解包含B的 $\frac{n}{2}(n+1)$ 个元素的 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个线性代数方程组得到，在 S. 彼涅特及 C. 斯托利的工作[4]中指出：矩阵B的计算可以缩减到解 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个方程组,即比原来可减掉 n 个方程.

因为B及C是对称的,所以我们可将方程 (2.4) 写成

$$\left(BA+\frac{1}{2}C\right)'+\left(BA+\frac{1}{2}C\right)=0, \qquad (2.9)$$

所以

$$S=BA+\frac{1}{2}C \qquad (2.10)$$

是反对称矩阵. 如果A是非奇异的(稳定矩阵显然是非奇异的)，从方程 (2.10) 得出

$$B=\left(S-\frac{1}{2}C\right)A^{-1}, \qquad (2.11)$$

并且由于B是对称的,故

$$B'=\left(\left(S-\frac{1}{2}C\right)A^{-1}\right)'=B=\left(S-\frac{1}{2}C\right)A^{-1},$$

$$A^{-1\prime}\left(S-\frac{1}{2}C\right)'=\left(S-\frac{1}{2}C\right)A^{-1},$$

$$\left(S-\frac{1}{2}C\right)'A=A'\left(S-\frac{1}{2}C\right),$$

$$\left(-S-\frac{1}{2}C\right)A=A'\left(S-\frac{1}{2}C\right),$$

$$-SA-\frac{1}{2}CA=A'S-\frac{1}{2}A'C,$$

$$A'S+SA=\frac{1}{2}(A'C-CA)=\frac{1}{2}[(CA)'-CA],$$

即

$$A'S+SA=\frac{1}{2}[(CA)'-CA].\qquad(2.12)$$

因为 S 及方程(2.12)的右端是反对称的,方程(2.12)表示了决定 S 的 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个元素的 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个方程.将方程(2.12)的解 S 代入方程(2.11)中,就给出了矩阵 B.

例: $y^{(3)}+a_1y^{(2)}+a_2y^{(1)}+a_3y=0$,

有

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_3&-a_2&-a_1\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-a_2/a_3&-a_1/a_3&-1/a_3\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

取 C 为对角矩阵

$$C=\begin{pmatrix}c_{11}&0&0\\0&c_{22}&0\\0&0&c_{33}\end{pmatrix},$$

$$S=\begin{pmatrix}0&s_{12}&s_{13}\\-s_{12}&0&s_{23}\\-s_{13}&-s_{23}&0\end{pmatrix},$$

$$A'S=\begin{pmatrix}0&0&-a_3\\1&0&-a_2\\0&1&-a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&s_{12}&s_{13}\\-s_{12}&0&s_{23}\\-s_{13}&-s_{23}&0\end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} a_3 s_{13} & a_3 s_{23} & 0 \\ a_2 s_{13} & s_{12} + a_2 s_{23} & s_{13} \\ -s_{12} + a_1 s_{13} & a_1 s_{23} & s_{23} \end{pmatrix},
$$

$$
SA = \begin{pmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} \\ -s_{12} & 0 & s_{23} \\ -s_{13} & -s_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -a_3 s_{13} & -a_2 s_{13} & s_{12} - a_1 s_{13} \\ -a_3 s_{23} & -s_{12} - a_2 s_{23} & -a_1 s_{23} \\ 0 & -s_{13} & -s_{23} \end{pmatrix},
$$

故

$$
AS' + SA = \begin{pmatrix} 0 & -a_2 s_{13} + a_3 s_{23} & s_{12} - a_1 s_{13} \\ a_2 s_{13} - a_3 s_{23} & 0 & s_{13} - a_1 s_{23} \\ -s_{12} + a_1 s_{13} & -s_{13} + a_1 s_{23} & 0 \end{pmatrix},
$$

容易算出

$$
CA = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & c_{22} \\ -a_3 c_{33} & -a_2 c_{33} & -a_1 c_{33} \end{pmatrix},
$$

$$
(CA)' - CA = \begin{pmatrix} 0 & -c_{11} & -a_3 c_{33} \\ c_{11} & 0 & -a_2 c_{33} - c_{22} \\ a_3 c_{33} & a_2 c_{33} + c_{22} & 0 \end{pmatrix},
$$

得出

$$
\left.\begin{aligned}
-a_2 s_{13} + a_3 s_{23} &= -\frac{1}{2} c_{11}, \\
s_{12} - a_1 s_{13} &= -\frac{1}{2} a_3 c_{33}, \\
s_{13} - a_1 s_{23} &= -\frac{1}{2} (c_{22} + a_2 c_{33}).
\end{aligned}\right\}
$$

不难解出这个方程组，得出 S，再从 (2.11) 得出 B。

2. 对于线性系统，我们来证明几个关于李雅普诺夫函数存在性的定理. 下面的结果是由李雅普诺夫本人得到. 他作出了形为 m 次齐次型的函数. 在这里为了简单起见，我们只限于讨论二次型，取消了加在 w 上的定号性的要求.

定理 2.2: 如果方程 (2.1) 的特征方程的所有根都具有负的实部，则对于任何预先给定的常负二次型 w(除原点以外它不在包含 (2.1)的整条轨线的集合 M 上取零值)，存在一个并且仅一个满足方程 (2.3) 的二次型 V，并且这二次型 V 必定是正定的.

事实上，因为量 $\lambda_i+\lambda_k$ 不取零值，则按照定理 2.1，存在满足方程 (2.3) 的二次型 V，剩下只要证明 V 是正定的. 用反证法，假设在某个点 $x_0(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 有不等式 $V(x_1^0,\cdots,x_n^0)<0$，由于函数 V 的齐次性，对任何正数 k 将有 $V(kx_1^0,\cdots,kx_n^0)<0$；这就是说，在点 O 的任何邻域内总有 V 取负值的点. 这里 $w=0$ 的集合 M 不包含整条轨线. 由第一篇第一章定理 4.4 (在变 V 为 $-V$，变 w 为 $-w$ 的情况下)得出平衡位置的不稳定性. 这与假设矛盾. 因为在定理条件满足的情况下保证了零解的渐近稳定性. 现在我们假设，在某个点 x_0 有 $V(\boldsymbol{x}_0)=0$. 因为 $\dot{V}\leqslant 0$，并且沿着轨线 $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0)$ 不可能满足恒等式 $\dot{V}=0$. 那末可以找到点 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0)$，在这个点上有 $V(y)<0$，又得到上面所讲情形，我们又可引出矛盾，这样一来，除点 O 以外，处处有 $V(\boldsymbol{x}_0)>0$，定理证毕.

定理 2.3: 如果系统(2.1)的特征方程根之间至少有一个具有正的实部，并且在任意 i，k 的情况下，量 $\lambda_i+\lambda_k$ 不取零值，则对任何的常正二次型 w(除原点以外，不在包含 (2.1) 的整条轨线的集合 M 上取零值)，存在一个且仅一个满足方程 (2.3) 的二次型 V，而且这个二次型 V 不是常负的.

显然，按照定理 2.1，二次型 V 是存在的，现在只要证明，二次型 V 可以取到正的值，我们也用反证法来证明，如果假设，除原点以外，处处有不等式 $V<0$. 但在这种情形，我们可以利用第一篇第一章定理 3.3 (重新变 V 为 $-V$，变 w 为 $-w$) 得出系统 (2.1) 的零解的渐近稳定性. 然而由定理的假设，特征方程至少有一个具

有正的实部的根，我们得到系统(2.1)零解的不稳定性。由此得出矛盾，所以以上处处有 $\dot{V}<0$ 情形不可能存在。如果在任何点有 $V(x_0)=0$，那末因为 $\dot{V}$ 不能沿着通过点 x_0 的整个轨道取零值，所以就导致这样的结论。在这轨道上有点 y，有 $V(y)>0$，这与定理的结论相符合。定理证毕。

注：如果条件 $\lambda_i+\lambda_j\neq 0$ 不满足，则定理 2.3 变成不正确，我们研究当方程(2.1)的特征方程之根中有零根的情形，此时由系统(2.1)的系数组成的行列式 $|A|$ 等于零，并且方程组

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k=0,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

有非零解 $Q(x_1^0,\cdots,x_n^0)$。对无论怎样的函数 V，在点 Q 我们有

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k^0=0.$$

因此 $\dot{V}$ 不是定号的。不但如此，这里 $\dot{V}=0$ 的集合包含了整条轨线，因为点 Q 是奇点。

定理 2.4：如果在系统(2.1)的特征方程根之间至少有一个根具有正的实部，那末对任何常正二次型 w（它在不包含(2.1)的整条轨线的集合 M 上取零值），总可以找到这样的二次型 V 及正数 α，使得满足关系式

$$\frac{dV}{dt}=\alpha V+w,\tag{2.13}$$

并且函数 V 不是常负的。

为了证明起见，与系统(2.1)同时，我们研究系统

$$\frac{dx}{dt}=\left(A-\frac{\alpha}{2}E\right)x,\tag{2.14}$$

这个系统的特征方程为

$$\left|A-\left(\frac{\alpha}{2}+\zeta\right)E\right|=0.\tag{2.15}$$

显然，系统(2.1)及系统(2.14)的特征方程的根之间的联系由关系式

$$\lambda_i=\zeta_i+\frac{\alpha}{2}$$

确定．我们取 α 如此小，使满足下面条件：

1. 从 $\mathrm{Re}\lambda_i > 0$ 得到 $\zeta_i > 0$．

2. $\zeta_i + \zeta_k \neq 0$，对任何整数 i 及 k．

显然，当取 α 足够小时，第一个条件容易满足．当注意到

$$\zeta_i + \zeta_k = \lambda_i + \lambda_k - \alpha$$

时，可以选取 α，使其不与有限数集 $\lambda_i + \lambda_k$ 中之一重合，这样，第二个条件也可以满足．

按照定理 2.3，存在这样的取正值的函数 V，使得由于系统 (2.14) 的 $\frac{dV}{dt} = w$．因为

$$\frac{dV}{dt} = \left[\left(A - \frac{\alpha}{2}E\right)\boldsymbol{x}\right]' \mathrm{grad}V$$

$$= [A\boldsymbol{x}]'\mathrm{grad}V - \frac{\alpha}{2}\boldsymbol{x}'\mathrm{grad}V,$$

并且按照欧拉关于齐次函数

$$\boldsymbol{x}'\mathrm{grad}V = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} x_i = 2V$$

的定理，则

$$w = \left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.14)} = \left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.1)} - \alpha V.$$

这里令 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.1)}$ 表示函数 V 的由于系统 (2.1) 所取的导数． 这样一来，关系式 (2.13) 得证．

3. 关于李雅普诺夫定理的一个注解

李雅普诺夫曾给出了下面的定理：

定理 A：设 A 是一个实 $n \times n$ 阶矩阵，满足

$$AG + GA' = -I \tag{2.16}$$

的实、对称和正定矩阵 G 存在的充分必要条件是 A 是稳定的（即 A 的特征值的实部是负的)．

O. 陶斯基 (Taussky[5]) 给出了它的等价定理如下：

定理 B：X 是一个实 $n \times n$ 矩阵，它是一个负纯量矩阵和一

个反对称矩阵的和，令D是一个实对角矩阵，则XD是稳定的充分必要条件是D的所有对角元素是正的.

以下利用矩阵的反对称性，给出了由定理B导致定理A的证明，要指出的是，我们这里的证明比O.陶斯基的证明要简单一些.

证： 在(2.16)的两边用正交相似变换[见注]，使(2.16)成为

$$A_1G_1 + G_1A_1' = -I, \tag{2.17}$$

这里 $G_1 = \begin{pmatrix} g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_n \end{pmatrix}$，且矩阵$A_1$与矩阵$A$的稳定性是相同的.

由(2.17)，

$$\left(A_1G_1 + \frac{1}{2}\right) + \left(A_1G_1 + \frac{1}{2}\right)' = 0. \tag{2.18}$$

令 $S = A_1G_1 + \frac{1}{2}$，由(2.18)可以看出，S为反对称矩阵.

取 $X = S - \frac{1}{2} = A_1G_1$，

$$D = G_1^{-1}.$$

现在要证明：

(1) 如果A是稳定的(即A_1是稳定的)$\Longrightarrow G$为正定(前面已指出，G是存在的，现在只要证明其正定性即可).

$$XD = XG_1^{-1} = A_1G_1G_1^{-1} = A_1.$$

所以XD是稳定的，由定理B得出D的所有对角元素 >0，因此G_1的所有对角元素>0，故G为正定的.

(2) G正定$\Longrightarrow A$是稳定的.

因为G正定，所以G_1的所有对角元素>0，故D的所有对角元素>0，由定理B得出$XD = A_1$是稳定的，故A是稳定的.

注意到上面用到一个简单的事实：正定矩阵的逆也是正定的.

注：一定可以找到一个正交相似变换，使

$$G \Longrightarrow G_1 = \begin{pmatrix} g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_n \end{pmatrix},$$

而保持单位矩阵不变.

令 $F(x)=\sum q_{ij}x_ix_j\ (q_{ij}=q_{ji})$ 表示一个二次型. 如果我们习惯地用 $\boldsymbol{x}$ 表示列向量 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, 则我们有 $F(x)=\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x}$. 这在二次型 $F(\boldsymbol{x})$ 与矩阵 Q 之间建立了一一对应关系, 这样 $Q=(q_{ij})$ 就称为二次型 $F(\boldsymbol{x})=\sum q_{ij}x_ix_j(q_{ij}=q_{ji})$ 的矩阵.

如果在二次型 $F(x)$ 上用坐标变换 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ (P 是非奇异矩阵) 则 $G(\boldsymbol{y})=F(P\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}'(P'QP)\boldsymbol{y}$, 故 $G(\boldsymbol{y})$ 也是一个二次型, 它的矩阵是 $P'QP$. 也就是说, 坐标变换使 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y})$, 则相应的二次型的矩阵 $Q\to P'QP=Q_1$. 同样, 逆变换 $\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}=P^{-1}\boldsymbol{x})$, 使 $Q_1\to P'^{-1}Q_1P^{-1}$.

正交变换是特别有趣的,如果变换 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ 中的 P 有这样的特性: $PP'=E$, 则这样的变换就称为正交变换. 正交变换最重要的性质是使单位矩阵 E 不改变,也就是说,它不改变二次型

$$H(\boldsymbol{x})=x_1^2+\cdots+x_n^2.$$

这里 $H(\boldsymbol{x})$ 的矩阵是 E. 并且 $P'EP=P^{-1}EP=E$, 因此

$$H(x)=H(Py)=y_1^2+\cdots+y_n^2.$$

即正交变换不改变距离. 在一般代数学中论述了一定可以找到一个正交相似变换,使

$$G\to G_1=\begin{pmatrix}g_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & g_n\end{pmatrix}.$$

因为它是一个正交变换,故保持单位矩阵不变.

同样的, 可以由定理 A 的成立推出定理 B 的成立. 其证明过程这里从略.

§3. 蔡燧林公式

早在 1959 年, 蔡燧林[6]就给出了常系数线性微分方程组的李

雅普诺夫函数的公式.

(一) 考虑实常系数线性微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i=1,2,\cdots,n. \tag{3.1}$$

李雅普诺夫[1]证明：如果(3.1)的特征方程

$$|a_{ij}-\lambda\delta_{ij}|\equiv(-1)^n(\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_n)=0 \tag{3.2}$$

的所有根皆具负实部，那末对于任意给定的负定(正定)m次齐次多项式$U(x_1,\cdots,x_n)$，恒存在唯一正定(负定)m次齐次多项式$V(x_1,\cdots,x_n)$满足方程

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3.1)}\equiv\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\frac{\partial V}{\partial x_i}=U. \tag{3.3}$$

这里在于给定了负定二次(即$m=2$)齐次多项式

$$U=-A\sum_{j=1}^{n}x_j^2,$$

A是正常数，根据(3.3)具体算出李雅普诺夫函数V的明显表达式，以表示成一些平方的和，而其系数是劳思-赫维茨行列式

$$\Delta_1\equiv p_1\ \Delta_2\equiv\begin{vmatrix}p_1 & p_3\\ p_0 & p_2\end{vmatrix},\ \cdots,\ \Delta_n\equiv\begin{vmatrix}p_1 & p_3 & \cdots & p_{2n-1}\\ p_0 & p_2 & \cdots & p_{2n-2}\\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & & p_n\end{vmatrix} \tag{3.4}$$

($p_0\equiv1$, $p_k=0$ 当 $k>n$)的函数.

(二) 记号和基本定理：为书写简单起见，我们引入一些记号：

1° 在n阶系数行列式$|a_{s\sigma}|$中，第j列的元素换以$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$之后，取它的$\nu_1,\cdots,\nu_k$行及$\nu_1,\cdots,\nu_k$列的元素($\nu_1<\cdots<\nu_k$)作出的$k$阶子行列式，以$M^{(j)}_{\nu_1,\cdots,\nu_k}(x_1,\cdots,x_n)$表示之；

2° 记号$\sum M^{(j)}_{\nu_1,\cdots,\nu_k}(x_1,\cdots,x_n)$，或有时为方便起见简写成$\sum_k$，表示诸$M^{(j)}_{\nu_1,\cdots,\nu_k}(x_1,\cdots,x_n)$对$\nu_1,\cdots,\nu_k$的和，其中$\nu_1$,

$\cdots, \nu_k$ 是集 $(1, 2, \cdots, n)$ 中的各种可能组合，但必须取到 j；

3° 行列式 Δ_s 的第 s 行中的所有元素 p_{k-1} 易以 $\sum M^{(j)}_{\nu_1,\cdots,\nu_k} \times (x_1, \cdots, x_n)$ 所得到的新行列式，以 $\Delta_{s,j}(x_1, \cdots, x_n)$ 表示.

基本定理：给定实常系数线性微分方程组 (3.1)，则函数

$$V = \Delta_2 \cdots \Delta_n \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq \sigma \pm 1}}^{n} \times \Delta_s \Delta_{\sigma,j}^2(x_1, \cdots, x_n) \tag{3.5}$$

$(\Delta_0 \equiv 1)$ 沿方程组 (3.1) 的积分曲线的导数是

$$\frac{dV}{dt} = -2\Delta_1\Delta_2 \cdots \Delta_n \sum_{j=1}^{n} x_j^2. \tag{3.6}$$

这个公式当 $n = 2$ 时，是马尔金首先得到的．作为例子，我们给出此公式当 $n = 3$ 时的形状：

$$\begin{aligned} V = {} & p_3(p_1p_2 - p_3)^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ & + p_1p_3\left[\left(\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} \\ x_2 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & a_{13} \\ x_3 & a_{33} \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & x_1 \\ a_{21} & x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & a_{23} \\ x_3 & a_{33} \end{vmatrix}\right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & x_1 \\ a_{31} & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & x_2 \\ a_{32} & x_3 \end{vmatrix}\right)^2\right] \\ & + \left[\left(p_3x_1 - p_1\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} \\ x_2 & a_{22} & a_{23} \\ x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right)^2 + \left(p_3x_2 - p_1\begin{vmatrix} a_{11} & x_1 & a_{13} \\ a_{21} & x_2 & a_{23} \\ a_{31} & x_3 & a_{33} \end{vmatrix}\right)^2 \right. \\ & \left. + \left(p_3x_3 - p_1\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & x_3 \end{vmatrix}\right)^2\right], \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\frac{dV}{dt} = -2p_1(p_1p_2 - p_3)p_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2). \tag{3.8}$$

这样的函数 (3.5)，不仅在 (3.4) 均大于零时是李雅普诺夫函数，而当 (3.4) 中没有一个为零，或者虽然有的 Δ_i 为零，但若此时的 V 仍为正定时，也是李雅普诺夫函数．

（三）为了证明定理，我们先证下述引理．

引理 1：下列诸式 (3.9)—(3.14) 是恒等的(沿 (3.1) 的积分

曲线求导数):

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = -\Delta_1 x_j^2 - \sum M_{\nu_1}^{(j)}$$

$$\times (x_1, \cdots, x_n)\Delta_{1,j}(x_1, \cdots, x_n), \qquad (3.9)$$

$$\frac{d}{dt}\sum M_{\nu_1,\cdots,\nu_k}^{(j)}(x_1, \cdots, x_n) = (-1)^k p_k x_j$$

$$-\sum M_{\nu_1,\cdots,\nu_{k+1}}^{(j)}(x_1, \cdots, x_n), \qquad (3.10)$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n-1),$$

$$\frac{d}{dt}\sum M_{\nu_1,\cdots,\nu_n}^{j}(x_1, \cdots, x_n) = (-1)^n p_n x_j, \qquad (3.11)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n) = -\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{2\sigma-3} & p_{2\sigma-1} \\ p_0 & \cdots & p_{2\sigma-4} & p_{2\sigma-2} \\ & \cdots\cdots & & \\ 0 & \cdots & p_{\sigma-1} & p_{\sigma+1} \\ 0 & \cdots & \sum_{\sigma} & \sum_{\sigma+2} \end{vmatrix} \qquad (3.12)$$

$$(\sigma = 2, \cdots, n-2).$$

$$\frac{d}{dt}\Delta_{n-1,j}(x_1, \cdots, x_n) = -\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{2n-5} & p_{2n-3} \\ p_0 & \cdots & p_{2n-6} & p_{2n-4} \\ & \cdots\cdots & & \\ 0 & \cdots & p_{n-2} & p_n \\ 0 & \cdots & \sum_{n} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= p_n\Delta_{n-2,j}(x_1, \cdots, x_n), \qquad (3.13)$$

$$\Delta_\sigma \frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n) + \Delta_{\sigma-1}\Delta_{\sigma+1,j}(x_1, \cdots, x_n)$$

$$= \Delta_{\sigma+1}\Delta_{\sigma-1,j}(x_1, \cdots, x_n),$$

$$\sigma = 2, \cdots, n-2;\ j = 1, 2, \cdots, n. \qquad (3.14)$$

证: 上述诸恒等式中, (3.9) 可直接由定义推得; (3.11) 可仿

照 (3.10) 来证明; (3.13) 可仿照 (3.12), 只须注意到 (3.11) 与 (3.10) 的不同之点就可以了.所以在此我们只证明 (3.10), (3.12) 和 (3.14).

对于等式(3.10), 可以只限于讨论 $j=1$ 的情形,因为变换原方程 (3.1) 中 j 与 1 的位置, 并不改变组 (3.1) 的本质,而可以使之变成 $j=1$.

(3.10) 的左边是

$$\frac{d}{dt}\sum M^{(1)}_{1,\nu_2,\cdots,\nu_k}(x_1,\cdots,x_n)=\frac{d}{dt}\sum\begin{vmatrix} x_1 & a_{1\nu_2} & \cdots & a_{1\nu_k} \\ x_{\nu_2} & a_{\nu_2\nu_2} & \cdots & a_{\nu_2\nu_k} \\ \cdots\cdots & & & \\ x_{\nu_k} & a_{\nu_k\nu_2} & \cdots & a_{\nu_k\nu_k} \end{vmatrix}$$

$$=\sum\sum_{s=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{1s} & a_{1\nu_2} & \cdots & a_{1\nu_k} \\ a_{\nu_2 s} & a_{\nu_2\nu_2} & \cdots & a_{\nu_2\nu_k} \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{\nu_k s} & a_{\nu_k\nu_2} & \cdots & a_{\nu_k\nu_k} \end{vmatrix}x_s$$

$$=\sum\sum_{s\neq 1}^{n}\begin{vmatrix} a_{1s} & a_{1\nu_2} & \cdots & a_{1\nu_k} \\ a_{\nu_2 s} & a_{\nu_2\nu_2} & \cdots & a_{\nu_2\nu_k} \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{\nu_k s} & a_{\nu_k\nu_2} & \cdots & a_{\nu_k\nu_k} \end{vmatrix}x_s$$

$$+\sum\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1\nu_2} & \cdots & a_{1\nu_k} \\ a_{\nu_2 1} & a_{\nu_2\nu_2} & \cdots & a_{\nu_2\nu_k} \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{\nu_k 1} & a_{\nu_k\nu_2} & \cdots & a_{\nu_k\nu_k} \end{vmatrix}x_1, \qquad (*)$$

其中 $\sum$ 为对 $\nu_2,\cdots,\nu_k(1<\nu_2<\cdots<\nu_k\leqslant n)$ 的各种可能组合求和.

(3.10) 之右边是

$$(-1)^k p_k x_1-\sum M^{(1)}_{1,\nu_2\cdots\nu_{k+1}}(x_1,\cdots,x_n)$$
$$=(-1)^k p_k x_1-\sum M^{(1)}_{1,\mu_2\cdots\mu_k}(x_1,\cdots,x_n)$$

$$=(-1)^k p_k x_1-\sum\begin{vmatrix} x_1 & a_{1\mu_1} & \cdots & a_{1\mu_k}\\ x_{\mu_1} & a_{\mu_1\mu_1} & \cdots & a_{\mu_1\mu_k}\\ & \cdots\cdots & & \\ x_{\mu_k} & a_{\mu_k\mu_1} & \cdots & a_{\mu_k\mu_k}\end{vmatrix}$$

$$=\left[(-1)^k p_k-\sum\begin{vmatrix} a_{\mu_1\mu_1} & \cdots & a_{\mu_1\mu_k}\\ & \cdots\cdots & \\ a_{\mu_k\mu_1} & \cdots & a_{\mu_k\mu_k}\end{vmatrix}\right]x_1$$

$$-\sum\begin{vmatrix} 0 & a_{1\mu_1} & \cdots & a_{1\mu_k}\\ x_{\mu_1} & a_{\mu_1\mu_1} & \cdots & a_{\mu_1\mu_k}\\ & \cdots\cdots & & \\ x_{\mu_k} & a_{\mu_1\mu_k} & \cdots & a_{\mu_k\mu_k}\end{vmatrix}. \qquad (**)$$

其中 $\sum$ 为对 $\mu_1,\cdots,\mu_k(1<\mu_1<\cdots<\mu_k\leqslant n)$ 的各种可能组合求和. 我们来证明(*)=(**).

含 x_1 的项: 在(**)中,注意到 $(-1)^k p_k$ 是系数行列式 $|a_{s\sigma}|$ 的所有 k 阶主子行列式的和,

而 $\sum\begin{vmatrix} a_{\mu_1\mu_1} & \cdots & a_{\mu_1\mu_k}\\ & \cdots\cdots & \\ a_{\mu_k\mu_1} & \cdots & a_{\mu_k\mu_k}\end{vmatrix}$ 是不含 a_{11} 的所有 k 阶主子行列式的和,

因而(**)中 x_1 的系数是含 a_{11} 的 k 阶主子行列式的和, 即(*)中 x_1 的系数, 即(**)中含 x_1 的项等于(*)中含 x_1的项.

其它的 $x_i(i\neq 1)$: 先证(**)中有的项, 在(*)中必有. 事实上, 对任一组合 $\mu_1,\cdots,\mu_k(1<\mu_1<\cdots<\mu_k\leqslant n)$, 考虑其中任一个 $\mu_i(1\leqslant i\leqslant k)$, 对应地, 含 x_{μ_i} 的项是

$$-(-1)^{1+(i+1)}\begin{vmatrix} a_{1\mu_1} & \cdots & a_{1\mu_k}\\ & \cdots\cdots & \\ a_{\mu_{i-1}\mu_1} & \cdots & a_{\mu_{i-1}\mu_k}\\ a_{\mu_{i+1}\mu_1} & \cdots & a_{\mu_{i+1}\mu_k}\\ & \cdots\cdots & \\ a_{\mu_k\mu_1} & \cdots & a_{\mu_k\mu_k}\end{vmatrix}x_{\mu_i},$$

而在(*)中，我们可取 $s=\mu_i$, $\nu_2=\mu_1$, $\cdots$, $\nu_i=\mu_{i-1}$, $\nu_{i+1}=\mu_{i+1}$, $\cdots$, $\nu_k=\mu_k$, $\nu_2\cdots\nu_k$ 构成一种组合,得到(*)中含 x_{μ_i} 的同样的一项:

$$\begin{vmatrix} a_{1\mu_i} a_{1\mu_1} & \cdots & a_{1\mu_{i-1}} a_{1\mu_{i+1}} & \cdots & a_{1\mu_k} \\ a_{\mu_1\mu_i} & \cdots & & \cdots & \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \\ a_{\mu_{i-1}\mu_i} & \cdots & & \cdots & \\ a_{\mu_{i+1}\mu_i} & \cdots & & \cdots & \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \\ a_{\mu_k\mu_i} & \cdots & & \cdots & a_{\mu_k\mu_k} \end{vmatrix} x_{\mu_i}$$

$$=(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{1\mu_1} & \cdots & a_{1\mu_k} \\ \cdots & \cdots & \\ a_{\mu_{i-1}\mu_1} & \cdots & a_{\mu_{i-1}\mu_k} \\ a_{\mu_{i+1}\mu_1} & \cdots & a_{\mu_{i+1}\mu_k} \\ \cdots & \cdots & \\ a_{\mu_k\mu_1} & \cdots & a_{\mu_k\mu_k} \end{vmatrix} x_{\mu_i},$$

即证明了(**)有的项(*)必有.

其次证(*)中有的项,在(**)中必有. 事实上,对(*)中任取一组合 $\nu_2,\cdots,\nu_k$ 及 s, 若 $s=$某一个 ν_σ, 则

$$\begin{vmatrix} a_{1s} & a_{1\nu_2} & \cdots & a_{1\nu_k} \\ \cdots & & \cdots & \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{\nu_ks} & a_{\nu_k\nu_2} & \cdots & a_{\nu_k\nu_k} \end{vmatrix}=0,$$

故只考虑 $s\neq\nu_\sigma(\sigma=2,\cdots,k)$, 设 $\nu_i<s<\nu_{i+1}$, 则(*)中含 x_s 的项是

$$\begin{vmatrix} a_{1s} & a_{1\nu_2} & \cdots & a_{1\nu_k} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{\nu_ks} & a_{\nu_k\nu_2} & \cdots & a_{\nu_k\nu_k} \end{vmatrix} x_s$$

$$= (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{1\nu_2} & \cdots & a_{1\nu_i} & a_{1s} & a_{1\nu_{i+1}} & \cdots & a_{1\nu_k} \\ & \cdots & & & & \cdots & \\ a_{\nu_k\nu_2} & \cdots & a_{\nu_k\nu_i} & a_{\nu_k s} & a_{\nu_k\nu_{i+1}} & \cdots & a_{\nu_k\nu_k} \end{vmatrix} x_s,$$

在(* *)中，取 $\mu_1 = \nu_2, \cdots, \mu_{i-1} = \nu_i, \mu_{i+1} = \nu_{i+1}, \cdots, \nu_k = \nu_k, \mu_i = s$，得到同样含 x_s 的一项:

$$-(-1)^{i+(i+1)} \begin{vmatrix} a_{1\nu_2} & \cdots & a_{1\nu_i} & a_{1s} & a_{1\nu_{i+1}} & \cdots & a_{1\nu_k} \\ & \cdots & & & & \cdots & \\ a_{\nu_k\nu_2} & \cdots & a_{\nu_k\nu_i} & a_{\nu_k s} & a_{\nu_k\nu_{i+1}} & \cdots & a_{\nu_k\nu_k} \end{vmatrix} x_s,$$

即证明了(*)中有的,(* *)中亦必有．最后,注意到(*)中没有两个行列式是一样的;(* *)中亦是如此,这样就证明了(*) = (* *)．等式(3.10)证毕．

对于(3.12)，我们分两种情形来证明．设 σ 为奇数，由 $\Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n)$ 的定义及(3.10)，有

$$\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{\sigma-2} & p_\sigma & \cdots & p_{2\sigma-1} \\ & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & \cdots & p_0 & p_2 & \cdots & p_{\sigma+1} \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_2 & \cdots & \sum_{\sigma+1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{\sigma-2} & p_\sigma & \cdots & p_{2\sigma-1} \\ & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & \cdots & p_0 & p_2 & \cdots & p_{\sigma+1} \\ 0 & \cdots & 0 & p_2 & \cdots & p_{\sigma+1} \end{vmatrix} x_j$$

$$- \begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{\sigma-2} & p_\sigma & \cdots & p_{2\sigma-1} \\ & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & \cdots & p_0 & p_2 & \cdots & p_{\sigma+1} \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_3 & \cdots & \sum_{\sigma+2} \end{vmatrix}.$$

注意到 $p_0 = 1, x_j = \sum_1$, 则上式就可以化成(3.12)的右边，对 σ 为奇数证毕．设 σ 为偶数，则有

$$\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)=\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{\sigma-1} & \cdots & p_{2\sigma-1}\\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & \cdots & p_1 & \cdots & p_{\sigma+1}\\ 0 & \cdots & \sum_1 & \cdots & \sum_{\sigma+1}\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{\sigma-1} & \cdots & p_{2\sigma-1}\\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & \cdots & p_1 & \cdots & p_{\sigma+1}\\ 0 & \cdots & p_1 & \cdots & p_{\sigma+1}\end{vmatrix}x_j-\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{\sigma-1} & \cdots & p_{2\sigma-1}\\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & \cdots & p_1 & \cdots & p_{\sigma+1}\\ 0 & \cdots & \sum_2 & \cdots & \sum_{\sigma+2}\end{vmatrix},$$

前一项为零,因而上式等于 (3.12) 的右边,(3.12) 证毕.

今证 (3.14),我们将它们一起写到左边. 由 Δ_σ 及 $\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)$ 的定义及 (3.12),有

$$-\Delta_{\sigma+1}\Delta_{\sigma-1,j}(x_1,\cdots,x_n)+\Delta_{\sigma-1}\Delta_{\sigma+1,j}(x_1,\cdots,x_n)$$
$$+\Delta_\sigma\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)$$

$$=-\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{2\sigma-1} & p_{2\sigma+1}\\ p_0 & \cdots & p_{2\sigma-2} & p_{2\sigma}\\ & \cdots & & \cdots\\ 0 & \cdots & p_\sigma & p_{\sigma+2}\\ 0 & \cdots & p_{\sigma-1} & p_{\sigma+1}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{2\sigma-5} & p_{2\sigma-3}\\ p_0 & \cdots & p_{2\sigma-6} & p_{2\sigma-4}\\ & \cdots & & \cdots\\ 0 & \cdots & p_{\sigma-2} & p_\sigma\\ 0 & \cdots & \sum_{\sigma-2} & \sum_\sigma\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{2\sigma-1} & p_{2\sigma+1}\\ p_0 & \cdots & p_{2\sigma-2} & p_{2\sigma}\\ & \cdots & & \cdots\\ 0 & \cdots & p_\sigma & p_{\sigma+2}\\ 0 & \cdots & \sum_\sigma & \sum_{\sigma+2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{2\sigma-5} & p_{2\sigma-3}\\ p_0 & \cdots & p_{2\sigma-6} & p_{2\sigma-4}\\ & \cdots & & \cdots\\ 0 & \cdots & p_{\sigma-2} & p_\sigma\\ 0 & \cdots & p_{\sigma-3} & p_{\sigma-1}\end{vmatrix}$$

$$
-\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{2\sigma-3} & p_{2\sigma-1} \\ p_0 & \cdots & p_{2\sigma-4} & p_{2\sigma-2} \\ & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & p_{\sigma-1} & p_{\sigma+1} \\ 0 & \cdots & p_{\sigma-2} & p_{\sigma} \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{2\sigma-3} & p_{2\sigma-1} \\ p_0 & \cdots & p_{2\sigma-4} & p_{2\sigma-2} \\ & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & p_{\sigma} & p_{\sigma+2} \\ 0 & \cdots & p_{\sigma-1} & p_{\sigma+1} \\ 0 & \cdots & \sum\limits_{\sigma} & \sum\limits_{\sigma+1} \end{vmatrix}.
$$

如果将上式依次写成$-AB+CD-EF$，把A和C按最后一行元素展开，A中最后一行第k列的元素对应的子式记为D_k，则显然有$E=D_{\sigma+1}$。将$-AB+CD$中有相同的D_k提出来，这样有

$$
-AB+CD-EF=D_{\sigma+1}\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{2\sigma-3} & 0 \\ p_0 & \cdots & p_{2\sigma-4} & 0 \\ & \cdots\cdots & & \\ 0 & \cdots & p_{\sigma-1} & p_{\sigma+1} \\ 0 & \cdots & \sum\limits_{\sigma} & \sum\limits_{\sigma+2} \end{vmatrix}
$$

$$
-D_{\sigma}\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{2\sigma-3} & 0 \\ p_0 & \cdots & p_{2\sigma-4} & 0 \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ 0 & \cdots & p_{\sigma-1} & p_{\sigma-1} \\ 0 & \cdots & \sum\limits_{\sigma} & \sum\limits_{\sigma} \end{vmatrix}
+D_{\sigma-1}\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{2\sigma-3} & 0 \\ p_0 & \cdots & p_{2\sigma-4} & 0 \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ 0 & \cdots & p_{\sigma-1} & p_{\sigma-3} \\ 0 & \cdots & \sum\limits_{\sigma} & \sum\limits_{\sigma-2} \end{vmatrix}
$$

$$
+\cdots+(-1)^{\sigma}D_1\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{2\sigma-3} & 0 \\ p_0 & \cdots & p_{2\sigma-4} & 0 \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ 0 & \cdots & p_{\sigma-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \sum\limits_{\sigma} & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
- D_{\sigma+1}\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{2\sigma-3} & p_{2\sigma-1} \\ p_0 & \cdots & p_{2\sigma-4} & p_{2\sigma-2} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ 0 & \cdots & p_{\sigma-1} & p_{\sigma+1} \\ 0 & \cdots & \sum\limits_{\sigma} & \sum\limits_{\sigma+2} \end{vmatrix}.
$$

合并上式的第一项与最后一项之后,容易看出,上式是下面行列式的拉普拉斯展式:

$$
(-1)^{\sigma+1}\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{2\sigma-1} & p_{2\sigma+1} & & & & \\ p_0 & \cdots & p_{2\sigma-2} & p_{2\sigma} & & 0 & & \\ & \cdots\cdots\cdots & & & & & & \\ 0 & & p_\sigma & p_{\sigma+2} & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & -p_{2\sigma-1} & p_1 & \cdots & p_{2\sigma-3} \\ 0 & \cdots & 0 & -p_{2\sigma-2} & p_0 & \cdots & p_{2\sigma-4} \\ & \cdots\cdots\cdots & & & & & \\ 0 & \cdots & p_{\sigma-1} & 0 & 0 & \cdots & p_{\sigma-1} \\ 0 & \cdots & \sum\limits_{\sigma} & 0 & 0 & \cdots & \sum\limits_{\sigma} \end{vmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \sigma\text{个} \end{matrix},
$$

(前 $\sigma+1$ 列标注"$\sigma+1$ 个",后 $\sigma-1$ 列标注"$\sigma-1$ 个")

今将它的第 2, 3⋯, σ 列分别减去第 $\sigma+2, \sigma+3, \cdots, 2\sigma$ 列,然后将第 3, 4, ⋯, σ 行分别加到第 $\sigma+1, \sigma+2, \cdots, 2\sigma-2$ 行上去,得到一个行列式,此行列式是 2σ 阶的,在它的左下角有一个 σ 行 $\sigma+1$ 列的矩形块,其元素皆为零,$\sigma+(\sigma+1)=2\sigma+1>2\sigma$. 根据行列式中熟知的索波列夫 (Соболев) 证明的引理,知此行列式等于零,等式 (3.14) 证毕.

(四) 基本定理的证明. 我们将 (3.5) 沿 (3.1) 的积分曲线求导数,注意到 (3.9),有

$$
\frac{dV}{dt} = 2\Delta_2\cdots\Delta_n \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i x_j
$$

$$
+ 2\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\sigma\pm1}}^{n} \Delta_i\Delta_{\sigma,i}(x_1, \cdots, x_n)
$$

$$\times \frac{d}{dt} \Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n) = -2\Delta_1 \cdots \Delta_n \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

$$- 2\Delta_2 \cdots \Delta_n \sum_{j=1}^{n} (\sum M_{v_1}^{(j)}(x_1, \cdots, x_n)$$

$$\times \Delta_{1,j}(x_1, \cdots, x_n)) + 2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq \sigma \pm 1}}^{n} \Delta_s \Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n)$$

$$\times \frac{d}{dt} \Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n).$$

由 (3.13), $p_n \Delta_{n-1} = \Delta_n$ 及 (3.14), 有

$$\sum_{\sigma=1}^{n-1} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq \sigma+1}}^{n} \Delta_s \Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n) \frac{d}{dt} \Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n)$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{n-3} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq \pm\sigma_1}}^{n} \Delta_s \Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n) \frac{d}{dt} \Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n)$$

$$+ \Delta_1 \cdots \Delta_{n-4} \Delta_{n-2} \Delta_n \Delta_{n-2,j}(x_1, \cdots, x_n) \frac{d}{dt} \Delta_{n-2,j}(x_1, \cdots, x_n)$$

$$+ \Delta_1 \cdots \Delta_{n-3} \Delta_{n-1} \Delta_{n-1,j}(x_1, \cdots, x_n) \frac{d}{dt} \Delta_{n-1,j}(x_1, \cdots, x_n)$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{n-3} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq \sigma+1}}^{n} \Delta_s \Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n) \frac{d}{dt} \Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n)$$

$$+ \Delta_1 \cdots \Delta_{n-4} \Delta_{n-1} \Delta_n \Delta_{n-3,j}(x_1, \cdots, x_n) \Delta_{n-2,j}(x_1, \cdots, x_n)$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{n-4} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq \sigma \pm 1}}^{n} \Delta_s \Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n) \frac{d}{dt} \Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n)$$

$$+ \Delta_1 \cdots \Delta_{n-5} \Delta_{n-2} \Delta_{n-1} \Delta_n \Delta_{n-4,j}(x_1, \cdots, x_n) \Delta_{n-3,j}(x_1, \cdots, x_n).$$

继续用 (3.14), 由归纳法, 不难证明上式等于

$$\Delta_3 \cdots \Delta_n \Delta_{1,j}(x_1, \cdots, x_n)$$

$$\times \left[\Delta_{2,j}(x_1, \cdots, x_n) + \Delta_1 \frac{d}{dt} \Delta_{1,j}(x_1, \cdots, x_n)\right],$$

$$(j = 1, 2, \cdots, n).$$

如果再注意到

$$\Delta_1 = p_1, \quad \Delta_2 = p_1p_2 - p_3,$$
$$\Delta_{2,j}(x_1, \cdots, x_n) = p_1\sum M^{(j)}_{\nu_1\nu_2\nu_3}(x_1, \cdots, x_n) - p_3 \sum M^{(j)}_{\nu_1}(x_1, \cdots, x_n),$$
$$\Delta_{1,j}(x_1, \cdots, x_n) = \sum M^{(j)}_{\nu_1\nu_2}(x_1, \cdots, x_n)$$

及 (3.10)，那么立即可得 (3.6)，定理证毕.

最后要指出，由于李雅普诺夫函数不是唯一的，可以有各种作法，对特殊问题还可另行考虑其它公式.

§4. E. A. 巴尔巴欣公式[7]

下面针对线性系统来具体地作出李雅普诺夫函数.

1. 首先对二阶系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x + a_{12}x_2,\\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{aligned} \tag{4.1}$$

来作出李雅普诺夫函数.

给出二次型

$$w = w_{11}x_1^2 + 2w_{12}x_1x_2 + w_{22}x_2^2,$$

并且企图找到这样的二次型

$$v = v_{11}x_1^2 + 2v_{12}x_1x_2 + v_{22}x_2^2, \tag{4.2}$$

使得它关于 t 的由于系统 (4.1)的导数，满足等式

$$\frac{dv}{dt} = 2w. \tag{4.3}$$

当根据系统 (4.1) 来微分 v 时，并且比较 (4.3) 中在 x_1^2, x_1x_2, x_2^2 前面的系数，我们得到三个方程组

$$\left.\begin{aligned}a_{11}v_{11} + a_{21}v_{12} \qquad\qquad\qquad &= w_{11},\\ a_{12}v_{11} + (a_{11} + a_{22})v_{12} + a_{21}v_{22} &= 2w_{12},\\ a_{12}v_{12} + a_{22}v_{22} &= w_{22}.\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

这个方程组的系数行列式为

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{21} \\ 0 & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}+a_{22})(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}). \quad (4.5)$$

当按照克莱姆法则来解 (4.4) 时，并将被找到的系数 v_{ik} 代入 (4.2)，我们得到

$$v = \frac{1}{\Delta}\left\{\begin{vmatrix} w_{11} & a_{21} & 0 \\ 2w_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{21} \\ w_{22} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} x_1^2 + 2\begin{vmatrix} a_{11} & w_{11} & 0 \\ a_{12} & 2w_{12} & a_{21} \\ 0 & w_{22} & a_{22} \end{vmatrix} x_1x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & w_{11} \\ a_{12} & a_{11}+a_{22} & 2w_{12} \\ 0 & a_{12} & w_{22} \end{vmatrix} x_2^2\right\}.$$

由此立即得到

$$v = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 \\ w_{11} & a_{11} & a_{21} & 0 \\ 2w_{12} & a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{21} \\ w_{22} & 0 & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (4.6)$$

方便地取函数 $V = \Delta v$ 作为李雅普诺夫函数，在这种情况下，有

$$\dot{V} = 2\Delta w \quad (4.7)$$

2. 对三阶系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \dot{x}_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}\right\} \quad (4.8)$$

而言，我们可以得到类似的公式.

给定了二次型

$$w = \sum_{i,k=1}^{3} w_{ik}x_ix_k, \quad w_{ik} = w_{ki}$$

之后，我们找出满足条件 $\dot{v} = 2w$ 的二次型

$$v = \sum_{i,k=1}^{3} v_{ik}x_ix_k, \quad v_{ik} = v_{ki}.$$

确定系数 v_{ik} 的相应的组为：

$$
\left.\begin{aligned}
&a_{11}v_{11}+a_{21}v_{21}+a_{31}v_{13}=w_{11},\\
&a_{12}v_{11}+(a_{11}+a_{22})v_{12}+a_{32}v_{13}+a_{21}v_{22}+a_{31}v_{23}=2w_{12},\\
&a_{13}v_{11}+a_{23}v_{12}+(a_{11}+a_{33})v_{13}+a_{21}v_{23}+a_{31}v_{33}=2w_{13},\\
&a_{12}v_{12}+a_{22}v_{22}+a_{32}v_{23}=w_{22},\\
&a_{13}v_{12}+a_{12}\;v_{13}+a_{23}v_{22}+(a_{22}+a_{33})v_{23}+a_{32}v_{33}\\
&\qquad=2w_{23},\\
&a_{13}v_{13}+a_{23}v_{23}+a_{33}v_{33}=w_{33}.
\end{aligned}\right\}
\tag{4.9}
$$

这个组的系数行列式为

$$
\Delta=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 & 0 & 0\\
a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{32} & a_{21} & a_{31} & 0\\
a_{13} & a_{23} & a_{11}+a_{33} & 0 & a_{21} & a_{31}\\
0 & a_{12} & 0 & a_{22} & a_{32} & 0\\
0 & a_{13} & a_{12} & a_{23} & a_{22}+a_{33} & a_{32}\\
0 & 0 & a_{13} & 0 & a_{23} & a_{33}
\end{vmatrix}
=|a(ik,jl)|,
\tag{4.10}
$$

这里,令 $a(ik,jl)$ 表示在组 (4.9) 的方程 (由比较方程 $\dot{v}=2w$ 中在 x_jx_l 前面的系数而得到)中在 v_{ik} 前面的系数,容易看出,下面的关系式

$$
a(ik,jl)=a(ki,jl)=a(ki,lj),
\tag{4.11}
$$

$$
a(ik,jl)=\begin{cases}
0, & \text{当 } i\neq j,\ k\neq l \text{ 时},\\
a_{kl}, & \text{当 } i=j,\ k\neq l \text{ 时},\\
a_{ii}+a_{kk}, & \text{当 } i=j,\ k=l,\ i\neq k \text{ 时},\\
a_{ii}, & \text{当 } i=j=k=l \text{ 时}
\end{cases}
\tag{4.12}
$$

是正确的.

按照克莱姆公式解系统 (4.9),我们得到

$$
v_{ik}=\frac{\Delta_{ik}}{\Delta},\quad \text{及}\quad v=\frac{1}{\Delta}\sum_{i,k=1}^{3}\Delta_{ik}x_ix_k.
$$

这里 Δ_{ik} 表示这样的行列式,它从行列式 Δ 中用系统 (4.9) 的右端来代替这个系统中在 v_{ik} 前面的系数而得到.

不难相信,在这种情况下,类似于公式 (4.6) 的公式

$$
v = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}
0 & x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 & x_2^2 & 2x_2x_3 & x_3^2 \\
w_{11} & a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 & 0 & 0 \\
2w_{12} & a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{32} & a_{21} & a_{31} & 0 \\
2w_{13} & a_{13} & a_{23} & a_{11}+a_{33} & 0 & a_{21} & a_{31} \\
w_{22} & 0 & a_{12} & 0 & a_{22} & a_{32} & 0 \\
2w_{23} & 0 & a_{13} & a_{12} & a_{23} & a_{22}+a_{33} & a_{32} \\
w_{33} & 0 & 0 & a_{13} & 0 & a_{23} & a_{33}
\end{vmatrix} \tag{4.13}
$$

是正确的.

与以前一样,如果取二次型 $V = \Delta v$, 那末得到

$$
\dot{V} = 2\Delta w. \tag{4.14}
$$

作为例子,研究方程

$$
\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0, \tag{4.15}
$$

其等价系统为

$$
\left.\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2, \\
&\dot{x}_2 = -ax_2 + x_3, \\
&\dot{x}_3 = -cx_1 - bx_2, \qquad x_1 = x.
\end{aligned}\right\} \tag{4.16}
$$

在这种情形,不难算出 $\Delta = c(ab - c)$. 将找出这样的二次型 v, 使得它满足条件 $\dot{v} = 2\Delta x_2^2$.

显然,由于 (4.13), 我们得到

$$
v = \begin{vmatrix}
0 & x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 & x_2^2 & 2x_2x_3 & x_3^2 \\
0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -a & -b & 0 & -c & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -c \\
1 & 0 & 1 & 0 & -a & -b & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -a & -b \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{vmatrix},
$$

由此得到

$$
v = -c(acx_1^2 + 2cx_1x_2 + bx_2^2 + x_3^2).
$$

在这种情形,更方便地研究二次型

$$
V = \frac{ac}{2}x_1^2 + cx_1x_2 + \frac{b}{2}x_2^2 + \frac{x_3^2}{2}. \tag{4.17}
$$

对于它，有

$$\dot{V} = (c - ab)x_2^2.$$

3. 最后，我们研究一般情形，微分方程组为

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{4.18}$$

当再次考虑了满足方程

$$\dot{v} = 2w$$

的二次型

$$w = \sum_{i,k=1}^{n} w_{ik}x_ix_k \text{ 及 } v = \sum_{i,k=1}^{n} v_{ik}x_ix_k$$

时，并进行类似的讨论，不难得出公式

$$v = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & \cdots & 2x_ix_k & \cdots & x_n^2 \\ w_{11} & a_{11} & & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2w_{jl} & a(11, jl) & \cdots & a(ik, jl) & \cdots & a(nn, jl) \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{nn} & a(11, nn) & \cdots & a(ik, nn) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4.19}$$

这里元素 $a(ik, jl)$ 完全被关系式 (4.11) 及 (4.12) 所确定．以上公式是由 E. A. 巴尔巴欣给出的．

§5. 二次型李雅普诺夫函数存在性的进一步探讨[8]

讨论

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \tag{5.1}$$

这里 A 是 $n \times n$ 阶的常量矩阵，李雅普诺夫曾证明了下面两个定理．

定理 5.1：如果对一个任意给定的实对称正定 $n \times n$ 阶矩阵 C，存在 $A'B + BA = -C$ 的一个正定解矩阵 B，那末 (5.1) 的平衡位置是渐近稳定的．

定理 5.2：如果 (5.1) 的平衡位置是渐近稳定的，那末对任意给定的实对称正定 $n \times n$ 阶矩阵 C，存在 $A'B + BA = -C$ 的一

个正定解矩阵 B.

定理 5.1 及定理 5.2 可以组合成:

定理 5.3: 系统 (5.1) 的平衡位置是渐近稳定的，当且仅当对任意给定的实对称正定 $n\times n$ 阶矩阵 C，存在 $A'B+BA=-C$ 的一个正定解矩阵 B.

定理 5.4: 如果对任意给定的实对称严格半正定 $n\times n$ 阶矩阵 C，它有这样的性质，对 (5.1) 的每个非平凡解，使 $\boldsymbol{x}'(t,\boldsymbol{x}_0,t_0)\cdot C\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,t_0)\not\equiv 0$，存在 $A'B+BA=-C$ 的一个正定解矩阵 B，那末 (5.1) 的平衡位置是渐近稳定的.

证: 如果 B 是正定的，函数 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x}$ 有

$$\dot{V}|_{(5.1)}=\boldsymbol{x}'(A'B+BA)\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}'C\boldsymbol{x}.$$

利用第一篇第一章定理 3.3，得出系统 (5.1) 的平凡解是渐近稳定性的结论(这个定理是由 E. A. 巴尔巴欣及 H. H. 克拉索夫斯基给出).

我们再将本篇第一章定理 2.2 写成:

定理 5.5: 如果 (5.1) 的平衡位置是渐近稳定的，则对于任何预先给定的实对称严格半正定矩阵 C (C 有这样的性质，使 $\boldsymbol{x}'(t,\boldsymbol{x}_0,t_0)C\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,t_0)\not\equiv 0$，对 (5.1) 的每个非平凡解成立)，存在满足 $A'B+BA=-C$ 的一个正定矩阵 B.

我们上面用到严格半正定的概念. 所谓 $V(\boldsymbol{x})$ 是严格半正定的，它在点 O 的邻域内不取负值，并且在 O 的任何邻域内，有异于零的变元，使 V 取零值(原点除外).

举例: 取 $A=-U$ (U 为 $n\times n$ 阶的单位矩阵)，方程 $A'B+BA=-C$，在这种情况下为 $-2B=-C$，故有唯一解 $B=\dfrac{C}{2}$. 这对严格半正定的 C，矩阵 B 不能是正定的，虽然 $\dot{\boldsymbol{x}}=-U\boldsymbol{x}$ 的平衡位置是渐近稳定的. 为什么会出现这样的情形，这是因为在这种情况下，对每一个严格半正定的 C 以及对 $\dot{\boldsymbol{x}}=-U\boldsymbol{x}$ 的非平凡解 $\boldsymbol{x}(t,x_0,t_0)$ ($|x_0|$)任意小)，有 $\boldsymbol{x}'(t,\boldsymbol{x}_0,t_0)C\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,t_0)\equiv 0$.

证: $\dot{\boldsymbol{x}}=-U\boldsymbol{x}$ 的通解为

$$x(t, x_0, t_0) = x_0 e^{-(t-t_0)}.$$

由于 C 是严格半正定的，故在 O 的任何邻域内，有点 $\tilde{x} \neq 0$，使得 $\tilde{x}'C\tilde{x} = 0$. 对于非平凡解 $x(t, \tilde{x}, t_0) = \tilde{x}e^{-(t-t_0)}$，我们有

$$x'(t, \tilde{x}, t_0)Cx(t, \tilde{x}, t_0) = \tilde{x}'C\tilde{x}e^{-2(t-t_0)} \equiv 0.$$

这就提出了这样的问题，在定理 5.5 中，如果对矩阵 A 不加任何限制的话，那末，对任意严格半正定的 C，条件 $x'(t, x_0, t_0)Cx\cdot(t, x_0, t_0) \not\equiv 0$（这里 $x(t, x_0, t_0)$ 是 (5.1) 的解）不是总能实现的，上面所举的例子已经说明了这个问题. 所以我们要在矩阵 A 上加上一些限制，使得一定存在满足 $x'(t, x_0, t_0)Cx(t, x_0, t_0) \not\equiv 0$（对 (5.1) 的任何解 $x(t, x_0, t_0)$ 而言）的严格半正定的矩阵 C. 由定理 5.5 知，如果 (5.1) 的零解是渐近稳定的，则一定可以找到一个正定的 B，使满足

$$A'B + BA = -C.$$

即证明了真正存在一个李雅普诺夫函数 $V = x'Bx$，它对 t 的由于系统 (5.1) 所取的导数为 $\frac{dv}{dt} = -x'Cx = w$，在 $w = 0$ 的集合 M 中不包含系统 (5.1) 的整条轨线.

故问题归结为：是否有一类 $n \times n$ 矩阵 A，对于它存在实对称严格半正定 $n \times n$ 阶矩阵 C，使得，对系统 (5.1) 的每个非平凡解，都有

$$x'(t, x_0, t_0)Cx(t, x_0, t_0) \not\equiv 0.$$

定理 5.6：对每一个实对称严格半正定矩阵 C 及对系统 (5.1) 的至少一个非平凡解 $x(t, x_0, t_0)$，$x'(t, x_0, t_0)Cx(t, x_0, t_0) \equiv 0$ 成立的充分必要条件是 $A = aU$（这里 U 是 $n \times n$ 单位矩阵；a 是纯量）.

证：$\dot{x} = Ax$ 的一般解可以写成

$$x(t, x_0, t_0) = e^{A(t-t_0)}x_0. \tag{5.2}$$

不失一般性，可以假设 $t_0 = 0$，更进一步，每一个实对称严格半正定 $n \times n$ 阶矩阵 C，可以表成

$$C = R'R. \tag{5.3}$$

这里 R 是实的 $n \times n$ 阶的奇异矩阵(参看附注 1),利用 (5.2) ($t_0 = 0$) 及 (5.3),我们可将 $\boldsymbol{x}'C\boldsymbol{x}$ 写成

$$\boldsymbol{x}_0' e^{A't} R' R e^{At} \boldsymbol{x}_0. \tag{5.4}$$

如果设 $w(t) = Re^{At}\boldsymbol{x}_0$,则 $(5.4) = w'(t)w(t)$,因此

$$\boldsymbol{x}'(t, \boldsymbol{x}_0, t_0)C\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0, t_0) \equiv 0,$$

当且仅当 $w(t) \equiv 0$.

先证充分性. 即如果 $A = aU$,那末对每个奇异矩阵 R 及对至少一个 $\boldsymbol{x}_0 \neq 0$,有 $w(t) \equiv 0$,为此,如果 $A = aU$,则 $RA = AR$,因此,对每个奇异矩阵 R,有初始点 $\boldsymbol{x}_0 \neq 0$,使得

$$w(t) = Re^{At}\boldsymbol{x}_0 = e^{At}R\boldsymbol{x}_0 \equiv 0.$$

现证明必要性,即如果对每个奇异矩阵 R 及对至少一个初始点 $\boldsymbol{x}_0 \neq 0$,有 $w(t) \equiv 0$,那末 $A = aU$.

为了证明这一点,我们将 $w(t)$ 表成更方便的形式,即令 $A = MJM^{-1}$ (这里 J 是约当形式),则 $w(t) = RMe^{Jt}M^{-1}\boldsymbol{x}_0$,再假设 $RM = S$, $M^{-1}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{y}$,则

$$w(t) = Se^{Jt}\boldsymbol{y}. \tag{5.5}$$

那末,上面的问题成为:如果对每个奇异矩阵 S 及对至少一个向量 $\boldsymbol{y} \neq 0$,有 $Se^{Jt}\boldsymbol{y} = 0$,那末 $J = A = aU$. 这可以从下面事实得出,如果 $J \neq aU$,亦即如果 $A \neq aU$,至少存在一个奇异矩阵 S,对每个 $\boldsymbol{y} \neq 0$,使得 $Se^{Jt}\boldsymbol{y} \not\equiv 0$ (这个证明在下面附注 2 中给出).换句话说,如果 $A \neq aU$,至少存在一个实对称严格半正定矩阵 $C = RR' = (M^{-1})S'SM^{-1}$,使得对每个 $\boldsymbol{x}_0 \neq 0$ 有 $w'(t)w(t) = \boldsymbol{x}_0'e^{A't}Ce^{At}\boldsymbol{x}_0 \not\equiv 0$,这样就完成了定理的证明.

注 1: 二次型 $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'C\boldsymbol{x}$ 是严格半正定的,一定存在一个奇异矩阵 R,使 $C = R'R$.

因为 $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'C\boldsymbol{x}$ 是严格半正定的,一定存在正交矩阵 P,使得

$$P'CP = C^* = \operatorname{diag}(0, \cdots, 0, d_1, \cdots, d_r).$$

由 $F(\boldsymbol{x})$ 的严格半正定性,故 $d_i > 0$ ($i = 1, \cdots, r$). 定义 $D^* = \operatorname{diag}(0, \cdots, 0, \sqrt{d_1}, \cdots, \sqrt{d_k})$,显然 D^* 是奇异矩阵,并

且是对称的 $(D^{*\prime} = D^*)$, $D^{*2} = C^*$. 因此

$$C = P'^{-1}C^*P^{-1} = PC^*P' = PD^*D^*P' = R'R \ (P' = P^{-1}),$$

这里 $R = D^*P'$. 显然 R 是奇异矩阵.

注 2: 如果 $A = aU$, 则至少有一个奇异矩阵 S, 使得对每个 $\boldsymbol{y} \neq 0$ 有 $w(t) = Se^{Jt}\boldsymbol{y} \not\equiv 0$.

如果 $A \neq aU$, 则 $J \neq aU$, 即或者 A 至少有二个不同的特征值,或者,如果 A 的特征值是相同的, J 不是对角矩阵.

我们首先考虑情形 1, 即

$$J = \operatorname{diag}(\underbrace{S_1, \cdots, S_1}_{\pi_1}, \underbrace{S_2, \cdots, S_2}_{\pi_2}, \cdots, \underbrace{S_k, \cdots, S_k}_{\pi_k})$$

$S_1, S_2, \cdots, S_k$ 是 A 的不同的特征值, $k \geqslant 2$, S_k 有重数 $\pi_k < n$, 令 $S = (S_{\mu\nu})^n_{\mu,\nu=1}$, 则 $w(t)$ 的分量 $w_\mu(t)$ 为

$$\begin{aligned} w_\mu(t) = & e^{S_1t}(S_{\mu,1}y_1 + \cdots + S_{\mu,\pi_1}y_{\pi_1}) + e^{S_2t}(S_{\mu,\pi_1+1}y_{\pi_1+1} \\ & + \cdots + S_{\mu\pi_1+\pi_2}y_{\pi_1+\pi_2}) \\ & + \cdots + e^{S_kt}(S_{\mu,n-\pi_k+1}y_{n-\pi_k+1} + \cdots + S_{\mu n}y_n), \\ & (\mu = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned}$$

我们来选择这样的矩阵作为 S, 它的元素由下面确定:

$$(S_{\mu\nu})^{\pi_1}_{\mu,\nu=1} = U_{\pi_1}, \ (S_{\mu\nu})^{\pi_2, \pi_1+\pi_2}_{\mu=1, \nu=\pi_1+1} = U_{\pi_2}, \cdots,$$
$$(S_{\mu\nu})^{\pi_k, n}_{\mu=1, \nu=n-\pi_k+1} = U_{\pi_k}$$

$(U_\alpha$ 是 $\alpha \times \alpha$ 单位矩阵). 并且我们设 S 的所有其它元素为零.

即在矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
s_{11} & \cdots & s_{1\pi_1} & s_{1\pi_1+1} & \cdots & s_{1\pi_1+\pi_2} & \cdots & s_{1n-\pi_k+1} & \cdots & s_{1n} \\
 & U_{\pi_1} & & & \cdots\cdots & & \cdots & & \cdots\cdots & \\
s_{\pi_1 1} & \cdots & s_{\pi_1\pi_1} & s_{\pi_1\pi_1+1} & \cdots & s_{\pi_1\pi_1+\pi_2} & \cdots & s_{\pi_1 n-\pi_k+1} & \cdots & s_{\pi_1 n} \\
 & \cdots\cdots & & & U_{\pi_2} & & \cdots & & U_{\pi_k} & \\
s_{\pi_2 1} & \cdots & s_{\pi_2\pi_1} & s_{\pi_2\pi_1+1} & \cdots & s_{\pi_2\pi_1+\pi_2} & \cdots & s_{\pi_2 n-\pi_k+1} & \cdots & s_{\pi_2 n} \\
 & \cdots\cdots & & & \cdots\cdots & & \cdots & & \cdots\cdots & \\
s_{\pi_k 1} & \cdots & s_{\pi_k\pi_1} & s_{\pi_k\pi_1+1} & \cdots & s_{\pi_k\pi_1+\pi_2} & \cdots & s_{\pi_k n-\pi_k+1}, & \cdots & s_{\pi_k n} \\
 & & & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & & & \\
s_{n1} & \cdots & s_{n\pi_1} & s_{n\pi_1+1} & \cdots & s_{n\pi_1+\pi_2} & \cdots & s_{nn-\pi_k+1} & \cdots & s_{nn}
\end{array}\right.$$

中除了 $U_{\pi_1}, U_{\pi_2}, \cdots, U_{\pi_k}$ 中的对角元素为 1 以外，其它所有元素都是零. 那末，因为 $\pi_k < n$，S 至少有一个零元素的行，即 S 是奇异的. 用这样选择的 S，$w(t)$ 的分量 w_μ 不同时为零，除非 $\boldsymbol{y} = 0$. 即除非 $\boldsymbol{x}_0 = 0$. 由 $S = RM$，我们得到奇异矩阵 $R = SM^{-1}$，$C = R'R$，因此，对系统 (5.1) 的每个非平凡解 $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0, t_0)$，有 $\boldsymbol{x}'(t, \boldsymbol{x}_0, t_0) C\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0, t_0) \not\equiv 0$.

其次，我们考虑 J 不是对角矩阵的情形，令 $n \times n$ 阶矩阵 A 有重数 $\pi_1 = n$ 的特征值 S_1，并且令 $e_1 \geqslant e_2 \geqslant \cdots \geqslant e_d \geqslant 1$，有 $e_1 > 1$ 是 S_1 的非退化的初等因子数，$\sum\limits_{J=1}^{d} e_J = \pi_1 = n$. 并且 $d < n$. 那末，$w(t)$ 的分量 $w_\mu(t)$ 为

$$
\begin{aligned}
w_\mu(t) = e^{S_1 t} \Big\{ & \Big(y_1 + \cdots + y_{e_1} \frac{t^{e_1 - 1}}{(e_1 - 1)!}\Big) S_{\mu_1} \\
& + \cdots + y_{e_1} S_{\mu e_1} + \Big(y_{e_1+1} + \cdots + y_{e_1+e_2} \frac{t^{e_2-1}}{(e_2 - 1)!}\Big) S_{\mu e_1+1} \\
& + \cdots + y_{e_1+e_2} S_{\mu e_1+e_2} + \cdots \\
& + \Big(y_{n-e_d+1} + \cdots + y_n \frac{t^{e_d-1}}{(e_d - 1)!}\Big) S_{\mu, n-e_d+1} + \cdots + y_n S_{\mu n} \Big\} \\
& (\mu = 1, \cdots, n),
\end{aligned}
$$

我们设 $S_{11} = S_{2e_1+1} = S_{3e_1+e_2+1} = \cdots = S_{d, n-e_d+1} = 1$，并设 S 的所有其它元素为 0，因为 $d < n$，S 至少有一个行是零元素. 即 S 是奇异的矩阵，就用这样选取的矩阵 S，向量 $w(t)$ 不同时为零，除非 $\boldsymbol{y} = 0$，即除非 $\boldsymbol{x}_0 = 0$.

A 的任何一种其它可能的情形，都可以考虑作为以上所处理过的特殊情形的组合. 因此，在任何情形，如果 $A \neq aU$，存在一个奇异矩阵 S，使得 $w(t) \not\equiv 0$，当 $\boldsymbol{y} \not\equiv 0$ 时. 注意到以上证明的过程也同时给出了奇异矩阵 S 的具体作法.

很明显，对给定 $A \neq aU$，不是每一个奇异矩阵 R 都具有以下性质：$w(t) = R(e^{At})\boldsymbol{x}_0 \not\equiv 0$，对每个 $\boldsymbol{x}_0 \neq 0$.

例：令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，其特征根为 $\lambda = 0$，$\lambda = 2$. 故其约当

型为 $J=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$,

$$M=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},\ M^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$e^{Jt}=e^{\begin{pmatrix}0&0\\0&2t\end{pmatrix}}=E+\begin{pmatrix}0&0\\0&2t\end{pmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{pmatrix}0&0\\0&2t\end{pmatrix}^2+\cdots$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&2t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&\frac{(2t)^2}{2!}\end{pmatrix}+\cdots$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&e^{2t}\end{pmatrix},$$

故 $Me^{Jt}y=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&e^{2t}\\-1&e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1+e^{2t}y_2\\-y_1+e^{2t}y_2\end{pmatrix}.$$

用 $R=R_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, 它是奇异矩阵.

$$w(t)=R_1Me^{Jt}y=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1+e^{2t}y_2\\-y_1+e^{2t}y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y_2e^{2t}\\2y_2e^{2t}\end{pmatrix}.$$

当 $y_1\neq 0$, $y_2=0$ 时(这时 $y\neq 0$), 有 $w(t)=0$. 如果取

$$R=R_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$w(t)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1+e^{2t}y_2\\-y_1+e^{2t}y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1+y_2e^{2t}\\0\end{pmatrix},$$

向量 $w(t)$ 同时为 $0\rightleftharpoons y_1=y_2=0$ (即 $y=0$).

我们现在可以证明下面的定理 5.2 的推广.

定理 5.7: 如果 $\dot{x}=Ax(A\neq aU)$ 的平衡位置是渐近稳定的, 并且如果 R 是一个奇异 $n\times n$ 阶矩阵, 使得对每个 $x_0\neq 0$, 有

$w(t) = Re^{At}x_0 \not\equiv 0$，则存在 $A'B + BA = -R'R$ 的一个正定解矩阵 B.

证：我们必须证明，如果 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ 的平衡位置是渐近稳定的，那末 $A'B + BA = -R'R$ 的唯一解 B 是正定的. 用反证法，如果 B 不是正定的 $\Rightarrow$ 矛盾.

设 $\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x}$ 在 O 点的任何邻域内取负值，因为 $\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x} = 0$，仅当 $\boldsymbol{x} = 0$ 时，$v(t)$ 对于 t 的由于系统 (5.1) 所取的导数为

$$\dot{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'(A'B + BA)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}'R'R\boldsymbol{x}.$$

由于第一篇第一章定理 5.1 得出系统 (5.1) 的平凡解是不稳定的，这与假设矛盾.

现假设 B 是严格半正定的，则在 O 点任何邻域内存在初始点 $\boldsymbol{x}_0' \neq 0$，使得 $v(\boldsymbol{x}(t_0, \boldsymbol{x}_0', t_0)) = v(\boldsymbol{x}_0') = 0$，相应于解 $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0', t_0)$，我们有关于 $w(t)$ 的假设，且因为 RR' 是严格半正定的，故有

$$\dot{v}(\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0', t_0)) \not\equiv 0 \text{ 及 } \dot{v}(\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0', t_0)) \leqslant 0.$$

因此，对足够大的值 $t > t_0$，不等式

$$v(\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0', t_0)) = \int_{t_0}^{t} \dot{v}(\boldsymbol{x}(\tau, \boldsymbol{x}_0', t_0)d\tau < 0,$$

这与假设 $v(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 矛盾.

因此，B 必定是正常的.

第五章 大系统与子系统

§1. 问题的提出

近十多年来，特别是七十年代以来，由子系统本身的稳定性，并对关联项作某些限制以得出整个系统的稳定性，已经作了很多研究[11]-[14]. 在工程控制论中，也提出了大系统理论. 即有些动态系统(包括工程的和非工程的)规模相当庞大，构造相当复杂(例如很大的通讯系统、交通系统、计算机系统等等). 这类系统由于其环节数量极大，其间关系错综复杂，影响因素众多，而且常常带有随机性质，不可能完全确定每一细节的运动规律，更不可能根据所有细节的运动规律推导出整个系统的某些整体性的运动规律. 但是这种大系统也有其本身的输入、输出、反馈、信息转换和信息传递之类的问题，与一般的工程控制系统有类似之处. 因此，对大系统的分析、综合、控制过程和动态特性的研究现在也被看作是控制理论的一个分支，称之为"大系统理论".

大系统理论目前还处于初创阶段，成果还不多. 但由于实际问题的需要，近年来这门理论已受到相当大的重视，正在迅速发展.

大系统理论现有的主要方法是，把整个系统首先分解成层次型式的子系统，建立子系统与整个系统以及各个子系统之间的关系，根据这些关系来进行整个系统的分析和综合. 这样就可以大大减少需要考虑的因素的数量，使系统的研究切实可行.

早在 1960 年，秦元勋所提出的关于稳定性理论中的分解问题[15]，实际上已经有了上述想法. 因为工程设计中的运动系统常常是多维自由度的，例如飞机是六维的运动，实际工作者常把高维运动分解为低维运动，例如将飞机的运动分解为纵向运动和横向

运动，研究分解后的低维问题的稳定性与原来高维问题的稳定性之间的关系，并得出由分解系统的稳定性保证原来系统的稳定性的若干充分条件。下面我们介绍这方面的工作。

讨论方程

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{1.1}$$

其中 A 是 $n\times n$ 阶的实常量矩阵，$x=\mathrm{col}(x_1,\cdots,x_n)$.

方程 (1.1) 的未被扰动运动的稳定性问题，在理论上已全部解决，即如果特征方程：

$$|a_{ij}-\delta_{ij}\lambda| = 0, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases}1, & \text{当 } i=j,\\ 0, & \text{当 } i\neq j.\end{cases}$$

所有的根皆具有负实部，则 (1.1) 的未被扰动运动为渐近稳定，如果特征方程根中有具有正实部者，则 (1.1) 的未被扰动运动为不稳定。

但当 n 相当大时，判别特征方程的根是否皆具有负实部或具有正实部，计算相当麻烦，所以提出以下的问题，即是否将方程 (1.1) 分解成互相独立的 r 组方程，用讨论下列方程

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_1 & & & 0\\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix} \tag{1.2}$$

的稳定性问题来代替方程组 (1.1) 的稳定性的判定问题。在 (1.2) 中，$x_1=\mathrm{col}(x_1^{(1)},\cdots,x_{n_1}^{(1)})$, $x_2=\mathrm{col}(x_1^{(2)},\cdots,x_{n_2}^{(2)})$, $\cdots$, $x_r=\mathrm{col}(x_1^{(r)},\cdots,x_{n_r}^{(r)})$, $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$, $A_1, A_2,\cdots,A_r$ 分别为 $n_1\times n_1, n_2\times n_2,\cdots,n_r\times n_r$ 阶的常量矩阵，并且与系统 (1.1) 中矩阵 A 的对应的元素相同。用 (1.2) 的稳定性问题来代替方程组 (1.1) 的稳定性的判定问题，这在物理及工程实践中已经用到，但系统地研究这问题，则发现所有的可能性都有出现的例子，即：(1.2) 的未被扰动运动是渐近稳定的，而 (1.1) 的未被扰动运动是渐近稳定的；

(1.2) 的未被扰动运动是渐近稳定的，而 (1.1) 的未被扰动运动是不稳定的；

(1.2) 的未被扰动运动是不稳定的，而 (1.1) 的未被扰动运动是渐近稳定的；

(1.2) 的未被扰动运动是不稳定的，而 (1.1) 的未被扰动运动是不稳定的。

例 1:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \qquad a_{22}x_2, \end{aligned}\right\} \tag{I$_1$}$$

若 $a_{11} < 0$，$a_{22} < 0$，则方程 (I_1) 的未被扰动运动是渐近稳定的。

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned}\right\} \tag{I$_2$}$$

设 $A^* = \max\{|a_{12}|, |a_{21}|\}$，如果 $A^* < \sqrt{a_{11}a_{22}}$，则 ($\mathrm{I}_2$) 的未被扰动运动是渐近稳定的.

例 2:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \qquad -x_2, \end{aligned}\right\} \tag{II$_1$}$$

(II_1) 的未被扰动运动是渐近稳定的.

而

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + 2x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_1 - x_2 \end{aligned}\right\} \tag{II$_2$}$$

的未被扰动运动是不稳定的，因其特征方程之一根为 1.

例 3:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \qquad -2x_2.\end{aligned}\right\} \tag{III$_1$}$$

(III_1) 的未被扰动运动是不稳定的。

而

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1 - 2x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_1 - 2x_2\end{aligned}\right\} \tag{III$_2$}$$

的未被扰动运动为渐近稳定，因其特征方程之根皆具有负实部。

例 4:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \qquad a_{22}x_2.\end{aligned}\right\} \tag{IV$_1$}$$

其中 $a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$, 则 (IV_1) 的未被扰动运动为不稳定的。

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2,\end{aligned} \tag{IV$_2$}$$

若 $a_{11} + a_{22} > 0$, 则无论如何选取 a_{12}, a_{21}, (IV_2) 的未被扰动运动总是不稳定的。

§2. 保证性条件

由上节可见，企图由解决 (1.2) 的稳定性问题来得出方程 (1.1) 的稳定性的结论时，情形比较复杂，但工程师们习惯于这一类的作法，为了保证这类作法的有效范围，我们来证明以下定理[15]。

定理 1.1：如果 (1.2) 的未被扰动运动是渐近稳定的，则一定存在 $\eta > 0$,

令

$$\max_{\substack{i_1=n_1+1,\cdots,n\\ i_2=n_1+n_2+1,\cdots,n\\ \cdots\cdots\\ i_r=n-n_r+1,\cdots,n}}\left\{\begin{array}{ll}|a_{1i_1}|,\cdots,|a_{n_1i_1}|; & |a_{n_1+1,i_2}|,\cdots,|a_{n_1+n_2,i_2}|;\\ \qquad\cdots;|a_{n-n_r+1,i_r}|, & \cdots,|a_{ni_r}|\\ |a_{i_11}|,\cdots,|a_{i_1n_1}|; & |a_{i_2n_1+1}|,\cdots,|a_{i_2n_1+n_2}|;\\ \qquad\cdots;|a_{i_r,n-n_r+1}|, & \cdots,|a_{i_rn}|\end{array}\right\}=A^*,$$

只要 $A^*<\eta$，则 (1.1) 的未被扰动运动是渐近稳定的。

此定理的证明过程给出了计算 η 的方法。

定理 1.2: 如果 (1.2) 的未被扰动运动是渐近稳定的，一定可以选取 (1.1) 中的系数(在 (1.2) 中不出现的)，使得 (1.1) 的未被扰动运动为不稳定的。

定义: 如果 (1.2) 的未被扰动运动为不稳定，不论怎样选取 (1.1) 中的系数 (在 (1.2) 中不出现的)，(1.1) 的未被扰动运动仍为不稳定，则 (1.1) 的未被扰动运动为绝对不稳定。

定理 1.3: 如果 $\Sigma a_{ii}>0$，则 (1.1) 的未被扰动运动为绝对不稳定的。

定理 1.1 表明了，当交叉项的系数足够小时，亦即某些因素之间的关联不多时，则工程上可视为互不相关的，而数学上现在也证实其可行。

以上定理 1.1 及定理 1.2 表明了由系统 (1.2) 的平凡解的渐近稳定性⇒系统 (1.1) 的平凡解的渐近稳定性是有条件的。这给实际工作者在处理问题时提供了数学上的论证，说明了一般说来，不能随意将系统分割而不影响其稳定性。只有当 (1.1) 中的系数 (在 (1.2) 中不出现的)满足一定的条件时，才能由 (1.2) 的平凡解的渐近稳定性得出系统 (1.1) 的平凡解的渐近稳定性。例如当 $n=2$ 时，

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=-a_{11}x_1+a_{12}x_2,\\ \frac{dx_2}{dt}&=a_{21}x_1-a_{22}x_2,\end{aligned}\right\}\qquad(1.1)'$$

这里 $a_{11}>0$，$a_{22}>0$. 先考虑

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -a_{11}x_1, \\
\frac{dx_2}{dt} &= \qquad\qquad -a_{22}x_2,
\end{aligned}\right\} \tag{1.2)'}
$$

系统(1.2)′的平凡解显然是渐近稳定的，令 $A^* = \max\{|a_{12}|, |a_{21}|\}$，如果 $A^* < \sqrt{a_{11}a_{22}}$，那末系统(1.1)′的平凡解也是渐近稳定的。上面的条件指出了在参数 a_{12}，a_{21} 的平面上，作出以原点为中心边长为 $H = \sqrt{a_{11}a_{22}}$ 的正方形(图 1)，只要(1.1)′中的参数 a_{12}，a_{21} 取在此正方形(I)内，则由(1.2)′的平凡解的渐近稳定性可以得出(1.1)′的平凡解的渐近稳定性。我们称这样的区域(I)为参数 a_{12}，a_{21} 的稳定性区域。

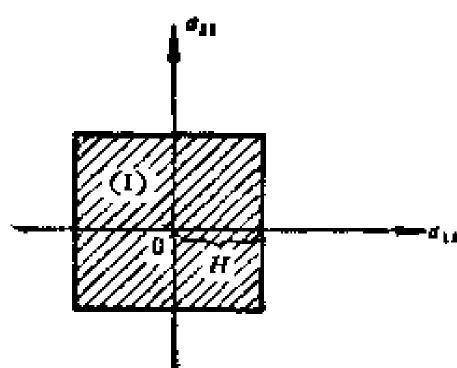


图 1

§3. 参数的稳定性区域之扩大

下面利用向量李雅普诺夫函数的概念[16]，进一步扩大了系统(1.1)中参数的稳定性区域[17]。过程是这样的：先将原系统(1.1)分成含有 r 个子系统的系统(1.2)，并假定每个子系统的平凡解是渐近稳定的，首先对(1.2)中的每个子系统作出李雅普诺夫函数，然后通过原来出发系统的关联性，得出 $r(r < n)$ 阶的常系数线性微分方程组(称为辅助方程组)，最后由辅助方程组平凡解的渐近稳定性，可以推出原系统(1.1)的平凡解的渐近稳定性。由确定辅助方程组平凡解渐近稳定性的条件，也就给出了为保证原系统(1.1)的平凡解为渐近稳定时，系统(1.1)的系数所应满足的条件(即给出了参数的稳定性区域)。例如，对于 $n = 2$ 而言，利用这个方法得到，只要满足条件 $a_{12}^2a_{21}^2 < a_{11}^2a_{22}^2$，那末由(1.2)′的渐近稳定性⇒(1.1)′的渐近稳定性。在参数 a_{12}，a_{21} 的平面上，不等式

$a_{12}^2a_{21}^2 < a_{11}^2a_{22}^2$ 表示由双曲线 $a_{12}a_{21}=H^2$ ($H=\sqrt{a_{11}a_{22}}$) (当 $a_{12}\cdot a_{21}>0$ 时)及 $a_{12}a_{21}=-H^2$ (当 $a_{12}a_{21}<0$ 时) 所界限的区域 (II) (图 2) 为参数的稳定性区域，即如果参数 a_{12}, a_{21} 的数值取在区域 (II) 中，则由系统 (1.2)′ 的平凡解的渐近稳定性 ⇒ 系统 (1.1)′ 的平凡解的渐近稳定性。显然，区域 (II) 包含了区域 (I)，说明了现在所用的方法刻划了问题的本质，因此有较大的优越性。

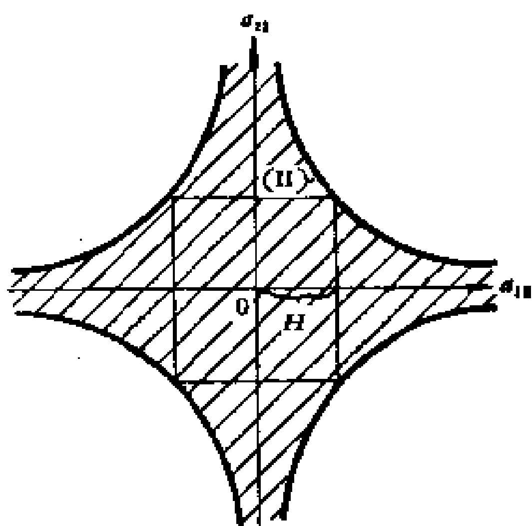


图 2

F. N. 贝叶尔[26]用向量李雅普诺夫函数的方法来处理复合系统的稳定性问题，我们现在将他的方法用到在稳定性理论中关于系统的分解问题中来，给出了由系统 (1.2) 的平凡解的渐近稳定性得出系统 (1.1) 的平凡解的渐近稳定性时，系统 (1.1) 中的参数应满足的条件(即在参数空间中给出了稳定性区域)。这里要指出的是：我们仅用了 F. N. 贝叶尔方法的思想，并没有用他的公式，以飞机纵向运动方程作为例子可以看出，用我们的计算方法，比用 F. N. 贝叶尔公式所得结果更好 (即参数的稳定性区域可以扩大)。

(一) 预备知识: 考虑系统 (1.1)，这里

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

引理 3.1: 如果特征方程 $|A-\lambda E|=0$ 的所有根都具有负实部，那末对无论怎样预先给定的常负二次型 w (它在除原点以外不包含整条轨道的集合 M 上取零值) 存在一个且只有一个二次型 V，满足 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1.1)}=w$，并且这二次型 V 必定是正定的(此即第二

篇第四章定理 2.2)。

E. A. 巴尔巴欣曾给出了根据 $w = \sum_{i,k=1}^{n} w_{ik}x_i x_k$ 来确定

$$v = \sum_{i,k=1}^{n} v_{ik}x_i x_k$$

的公式(第二篇第四章 § 4),使其满足 $\dot{v} = 2w$.

$$v = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & x_1^2, & \cdots, & 2x_i x_k & \cdots & x_n^2 \\ w_{11} & a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2w_{jl} & a(11, jl) & \cdots & a(ik, jl) & \cdots & a(nn, jl) \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{nn} & a(11, nn), & \cdots & a(ik, nn) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (3.1)$$

这里 $a(ik, jl)$ 完全由下面公式确定:

$$a(ik, jl) = a(ki, jl) = a(ki, lj),$$

$$a(ik, jl) = \begin{cases} 0 & \text{当 } i \neq j,\ k \neq l,\ k \neq j,\ i \neq l, \\ a_{kl} & \text{当 } i = j,\ k \neq l, \\ a_{ii} + a_{kk} & \text{当 } i = j,\ k = l,\ i \neq k, \\ a_{ii} & \text{当 } i = j = k = l. \end{cases}$$

Δ是在公式 (3.1) 的行列式中去掉第一行及第一列的子行列式,为简单起见,以下我们取 $w = -(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$. H. H. 克拉索夫斯基[18]指出,存在 $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, 使 $c_1(x_1^2 + \cdots + x_n^2) \leqslant v(x_1, \cdots, x_n) \leqslant c_2(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$.

引理 3.2: B 是一个有负的对角元素,而所有其它元素为非负的矩阵,若 $\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ 及 $\boldsymbol{y}(t; \boldsymbol{y}_0, t_0)$ 是

$$\dot{\boldsymbol{x}} \leqslant B\boldsymbol{x},$$

$$\dot{\boldsymbol{y}} = B\boldsymbol{y}$$

的解,并且 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{y}_0$, 则 $\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0) \leqslant \boldsymbol{y}(t; \boldsymbol{y}_0, t_0)$ 对所有 $t_0 \leqslant t < \infty$ 成立.

引理 3.2 的证明可参考[16].

引理 3.3: 设 $a > 0$ 及 $b \geqslant 0$, 则对所有 $0 \leqslant z < \infty$, 有

$$-az^2 + bz \leqslant -\frac{a}{2}z^2 + \frac{b^2}{2a}.$$

证:

$$-az^2 + bz \leqslant -\frac{a}{2}z^2 + \frac{b^2}{2a},$$

当且仅当

$$-\frac{a}{2}z^2 + \frac{b^2}{2a} - \frac{a}{2}z^2 + bz - \frac{b^2}{2a} \leqslant -\frac{a}{2}z^2 + \frac{b^2}{2a},$$

即

$$\left(-\frac{a}{2}z^2 + \frac{b}{2a}\right) - \frac{1}{2a}(az - b)^2 \leqslant -\frac{a}{2}z^2 + \frac{b^2}{2a}.$$

(二) 举例: 以最简单的二阶方程组 (1.1)′ 为例,假设 $a_{11}>0$, $a_{22}>0$, 先考虑有二个子系统的系统 (1.2)′ 对 (1.2)′ 中的每个子系统分别作李雅普诺夫函数

$$v_1 = \frac{1}{2a_{11}}x_1^2, \quad v_2 = \frac{1}{2a_{22}}x_2^2.$$

考虑

$$\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{(1.1)'} = -x_1^2 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 \leqslant -|x_1|^2 + \frac{|a_{12}|}{a_{11}}|x_1||x_2|$$

$$\leqslant -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{a_{12}^2}{2a_{11}^2}x_2^2 = -a_{11}v_1 + \frac{a_{22}a_{12}^2}{a_{11}^2}v_2,$$

$$\left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{(1.1)'} = -x_2^2 + \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1x_2 \leqslant -|x_2|^2 + \frac{|a_{21}|}{a_{22}}|x_1||x_2|$$

$$\leqslant -\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{a_{21}^2}{2a_{22}^2}x_1^2 = -a_{22}v_2 + \frac{a_{21}^2a_{11}}{a_{22}^2}v_1,$$

故有

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{(1.1)'} &\leqslant -a_{11}v_1 + \frac{a_{22}a_{12}^2}{a_{11}^2}v_2,\\ \left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{(1.1)'} &\leqslant \frac{a_{21}^2a_{11}}{a_{22}^2}v_1 - a_{22}v_2.\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

考虑辅助方程组

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv_1^*}{dt} &= -a_{11}v_1^* + \frac{a_{22}a_{12}^2}{a_{11}^2}v_2^*,\\ \frac{dv_2^*}{dt} &= \frac{a_{21}^2a_{11}}{a_{22}^2}v_1^* - a_{22}v_2^*,\end{aligned}\right\} \tag{3.2'}$$

其特征方程为

$$\lambda^2 + (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - \frac{a_{21}^2 a_{11}}{a_{22}^2} \cdot \frac{a_{22}a_{12}^2}{a_{11}^2} = 0,$$

而其特征根具有负实部的充为必要条件为

$$a_{11} + a_{22} > 0, \quad a_{11}a_{22} - \frac{a_{21}^2 a_{12}^2}{a_{11}a_{22}} > 0,$$

即

$$a_{12}^2 a_{21}^2 < a_{11}^2 a_{22}^2. \tag{3.3}$$

当满足以上条件时，辅助方程组 (3.2)′ 的平凡解是渐近稳定的.

由引理 3.2，得

$$v_1(t;\ v_1^0,\ t_0) \leqslant v_1^*(t,\ v_1^0,\ t_0),$$
$$v_2(t;\ v_2^0,\ t_0) \leqslant v_2^*(t,\ v_2^0,\ t_0),$$

故有

$$\lim_{t\to\infty} v_1(t;\ v_1^0,\ t_0) = 0,$$
$$\lim_{t\to\infty} v_2(t;\ v_2^0,\ t_0) = 0.$$

但是

$$x_1^2 = 2a_{11}v_1,\ x_2^2 = 2a_{22}v_2,$$

故有

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \lim_{t\to\infty} x_2(t) = 0.$$

即当满足使辅助方程组 (3.2)′ 的平凡解是渐近稳定的条件时，可以推出系统 (1.1)′ 的平凡解的渐近稳定性. 也就是说，当 a_{12}, a_{21} 满足以上条件 (3.3) 时，由系统 (1.2)′ 的平凡解的渐近稳定性，可以推出系统 (1.1)′ 的平凡解的渐近稳定性. 上面已指出，例中所要求满足的条件比 [15] 中的条件宽.

再举一例，考虑三阶方程组:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\\
\frac{dx_3}{dt} &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - a_{33}x_3.
\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

假设 $a_{11} + a_{22} > 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$, $a_{33} > 0$.

首先对有二个子系统的系统

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 \quad - a_{22}x_2, \\
\frac{dx_3}{dt} &= \qquad\qquad\qquad -a_{33}x_3
\end{aligned}\right\} \tag{3.4'}
$$

作出李雅普诺夫函数 $v_1(x_1, x_2)$, $v_2(x_3)$, 使得

$$
\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{(3.4)'} = -(x_1^2 + x_2^2),
$$

$$
\left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{(3.4)'} = -x_3^2.
$$

由前段得到

$$
v_1 = c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2,
$$

$$
c_{11} = \frac{1}{-2\Delta}[(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + a_{21}^2 + a_{22}^2] > 0,
$$

$$
c_{12} = -\frac{1}{2\Delta}(a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}),
$$

$$
c_{22} = -\frac{1}{2\Delta}[(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + a_{11}^2 + a_{12}^2] > 0,
$$

其中 $\Delta = (a_{11} + a_{22})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$,
且存在 $c_1 > 0$ 及 $c_2 > 0$, 使

$$
c_1(x_1^2 + x_2^2) \leqslant v_1(x_1, x_2) \leqslant c_2(x_1^2 + x_2^2),
$$

$$
v_2 = \frac{1}{2a_{33}}x_3^2,
$$

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{(3.4)} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(-a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(a_{21}x_1 - a_{22}x_2) \\
&\quad + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}a_{13}x_3 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}a_{23}x_3 = -(x_1^2 + x_2^2) \\
&\quad + 2(c_{11}x_1 + c_{12}x_2)a_{13}x_3 + 2(c_{12}x_1 + c_{22}x_2)a_{23}x_3 \\
&= -(x_1^2 + x_2^2) + 2(c_{11}a_{13} + c_{12}a_{23})x_1x_3 \\
&\quad + 2(c_{12}a_{13} + c_{22}a_{23})x_2x_3 \leqslant -|x_1|^2 + 2|c_{11}a_{13}
\end{aligned}
$$

$$+ c_{12}a_{23}||x_1||x_3| - |x_2|^2 + 2|c_{12}a_{13}$$

$$+ c_{22}a_{23}||x_2||x_3| \leqslant -\frac{1}{2}x_1^2 + 2(c_{11}a_{13} + c_{12}a_{23})^2 x_3^2$$

$$-\frac{1}{2}x_2^2 + 2(c_{12}c_{13} + c_{22}a_{23})^2 x_3^2$$

$$= -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + 2[(c_{11}a_{13} + c_{12}a_{23})^2$$

$$+ (c_{12}a_{13} + c_{22}a_{23})^2]x_3^2 \leqslant -\frac{1}{2}\frac{v_1}{c_2} + 4a_{33}b_1v_2.$$

这里

$$b_1 = (c_{11}a_{13} + c_{12}a_{23})^2 + (c_{12}a_{13} + c_{22}a_{23})^2 \geqslant 0,$$

$$\left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{(3.4)} = -x_3^2 + \frac{1}{a_{33}}x_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2)$$

$$\leqslant -\frac{1}{2}|x_3|^2 + \frac{|a_{31}|}{a_{33}}|x_1||x_3| - \frac{1}{2}|x_3|^2 + \frac{|a_{32}|}{a_{33}}|x_2||x_3|$$

$$\leqslant -\frac{1}{4}x_3^2 + \frac{a_{31}^2}{a_{33}^2}x_1^2 - \frac{1}{4}x_3^2 + \frac{a_{32}^2}{a_{33}^2}x_2^2$$

$$\leqslant -\frac{1}{2}x_3^2 + b_2(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\leqslant -a_{33}v_2 + \frac{b_2}{c_1}v_1.$$

这里

$$b_2 = \max\left\{\frac{a_{31}^2}{a_{33}^2}, \frac{a_{32}^2}{a_{33}^2}\right\} \geqslant 0,$$

故有

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &\leqslant -\frac{1}{2}\frac{v_1}{c_2} + 4a_{33}b_1v_2, \\ \frac{dv_2}{dt} &\leqslant -a_{33}v_2 + \frac{b_2}{c_1}v_1. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

考虑辅助方程组

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_1^*}{dt} &= -\frac{1}{2}\frac{v_1^*}{c_2} + 4a_{33}b_1v_2^*, \\ \frac{dv_2^*}{dt} &= \frac{b_2}{c_1}v_1^* - a_{33}v_2^*, \end{aligned}\right\} \tag{3.5'}$$

其特征方程为

$$\lambda^2+\left(a_{33}+\frac{1}{2c_2}\right)\lambda+a_{33}\frac{1}{2c_2}-\frac{4a_{33}b_1b_2}{c_1}=0,$$

其特征根具有负实部的充分必要条件为

$$\frac{a_{33}}{2c_2}-\frac{4a_{33}b_1b_2}{c_1}>0.$$

即

$$b_1b_2<\frac{c_1}{8c_2}, \tag{3.6}$$

所以如果满足条件 (3.6)，则 (3.5)′ 的平凡解是渐近稳定的.

因为

$$v_1(t;\, v_1^0,\, t_0)\leqslant v_1^*(t;\, v_1^0,\, t_0),$$
$$v_2(t;\, v_2^0,\, t_0)\leqslant v_2^*(t,\, v_2^0,\, t_0),$$

故有

$$\lim_{t\to\infty} v_1=\lim_{t\to\infty} v_2=0.$$

由此得到

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t)=\lim_{t\to\infty} x_2(t)=\lim_{t\to\infty} x_3(t)=0.$$

当方程组 (3.4) 的系数满足条件 (3.6) 时，则由系统 (3.4)′ 的平凡解的渐近稳定性⇒系统 (3.4) 的平凡解的渐近稳定性.

(三) 对 n 阶方程稳定性的结论： n 阶常系数线性方程组(1.1)

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x},$$

这里

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ & \cdots\cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

首先考虑有 r 个子系统的系统 (1.2)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix},$$

这里 $x_1 = \mathrm{col}(x_1^{(1)}, \cdots, x_{n_1}^{(1)}), \cdots, x_r = \mathrm{col}(x_1^{(r)}, \cdots, x_{n_r}^{(r)})$,

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n.$$

$A_1, A_2, \cdots, A_r$ 分别为 $n_1 \times n_1, n_2 \times n_2, \cdots, n_r \times n_r$ 阶的常量矩阵,并且与系统(1.1)中矩阵 A 的对应的元素相同.

现在假设,这 r 个子系统的平凡解都是渐近稳定的,即

$$|A_1 - \lambda E| = 0, \cdots, |A_r - \lambda E| = 0$$

的特征根都具有负实部. 所以,对于每个子系统而言,对于给定的负定函数 $w_k(x_1^{(k)}, \cdots, x_{n_k}^{(k)}) = -(x_1^{(k)2} + \cdots + x_{n_k}^{(k)2})$ $(k = 1, 2, \cdots, r)$,根据引理 3.1 中 E. A. 巴尔巴欣所作出的正定的

$$v_k(x_1^{(k)}, \cdots, x_{n_k}^{(k)}) = \sum_{i,j=1}^{n_k} \frac{1}{2} C_{ij}^{(k)} x_i^{(k)} x_j^{(k)}$$

有

$$\left.\frac{dv_k}{dt}\right|_{(1.2)} = -(x_1^{(k)2} + \cdots + x_{n_k}^{(k)2}),$$

这里 $v_k(x_1^{(k)}, \cdots, x_{n_k}^{(k)})$ 中 $x_i^{(k)} x_j^{(k)}$ 前面的系数 $C_{ij}^{(k)}$ 完全由本节公式(3.1)决定. 并且存在 $A_1^{(k)} > 0$, $A_2^{(k)} > 0$, 使得

$$\begin{gathered} A_1^{(k)}(x_1^{(k)2} + \cdots + x_{n_k}^{(k)2}) \leqslant v_k(x_1^{(k)}, \cdots, x_{n_k}^{(k)}) \\ \leqslant A_2^{(k)}(x_1^{(k)2} + \cdots + x_{n_k}^{(k)2}) \\ (k = 1, \cdots, r). \end{gathered}$$

由

$$v_k(x_1^{(k)}, \cdots, x_{n_k}^{(k)}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n_k} C_{ij}^{(k)} x_i^{(k)} x_j^{(k)},$$

故有

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_2^{(k)}} = \sum_{j=1}^{n_k} C_{ij}^{(k)} x_j^{(k)} \quad (i = 1, \cdots, n_k; k = 1, \cdots, r),$$

$$\begin{aligned} \left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{(1.1)} &= \sum_{j=1}^{n_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_j^{(1)}} \frac{dx_j^{(1)}}{dt} \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1^{(1)}} \left(\sum_{i=1}^{n_1} a_{1,i} x_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{n_2} a_{1,n_1+i} x_i^{(2)} \right. \end{aligned}$$

$$+ \cdots + \sum_{i=1}^{n_r} a_{1,n_1+\cdots+n_{r-1}+i} x_i^{(r)} \Big)$$

$$+ \frac{\partial v_1}{\partial x_2^{(1)}} \Big(\sum_{i=1}^{n_1} a_{2,i} x_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{n_2} a_{2n_1+i} x_i^{(2)}$$

$$+ \cdots + \sum_{i=1}^{n_r} a_{2,n_1+\cdots+n_{r-1}+i} x_i^{(r)} \Big)$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\partial v_1}{\partial x_{n_1}^{(1)}} \Big(\sum_{i=1}^{n_1} a_{n_1 i} x_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{n_2} a_{n_1 n_1+i} x_i^{(2)}$$

$$+ \cdots + \sum_{i=1}^{n_r} a_{n_1 n_1+\cdots+n_{r-1}+i} x_i^{(r)} \Big)$$

$$= -\left(x_1^{(1)^2} + \cdots + x_{n_1}^{(1)^2} \right)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_1} c_{1j}^{(1)} x_j^{(1)} \Big(\sum_{i=1}^{n_2} a_{1,n_1+i} x_i^{(2)}$$

$$+ \cdots + \sum_{i=1}^{n_r} a_{1n_1+\cdots+n_{r-1}+i} x_i^{(r)} \Big)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_1} c_{2j}^{(1)} x_j^{(1)} \Big(\sum_{i=1}^{n_2} a_{2,n_1+i} x_i^{(2)}$$

$$+ \cdots + \sum_{i=1}^{n_r} a_{2,n_1+\cdots+n_{r-1}+i} x_i^{(r)} \Big)$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_1} c_{n_1 j}^{(1)} x_j^{(1)} \Big(\sum_{i=1}^{n_2} a_{n_1,n_1+i} x_i^{(2)}$$

$$+ \cdots + \sum_{i=1}^{n_r} a_{n_1,n_1+\cdots+n_{r-1}+i} x_i^{(r)} \Big)$$

$$= -\left(x_1^{(1)^2} + \cdots + x_{n_1}^{(1)^2} \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n_2} \Big(\sum_{j=1}^{n_1} c_{j1}^{(1)} a_{jn_1+i} \Big) x_i^{(2)} x_1^{(1)}$$

$$+\cdots+\sum_{i=1}^{n_2}\left(\sum_{j=1}^{n_1}c_{jn_1}^{(1)}a_{jn_1+i}\right)x_i^{(2)}x_{n_1}^{(1)}$$

$$+\cdots\cdots$$

$$+\sum_{i=1}^{n_r}\left(\sum_{j=1}^{n_1}c_{j1}^{(1)}a_{jn-n_r+i}\right)x_i^{(r)}x_1^{(1)}$$

$$+\cdots+\sum_{i=1}^{n_r}\left(\sum_{j=1}^{n_1}c_{jn_1}^{(1)}a_{jn-n_j+i}\right)x_i^{(r)}x_{n_1}^{(1)}$$

$$\leqslant-(x_1^{(1)^2}+\cdots+x_{n_1}^{(1)^2})$$

$$+\sum_{i=1}^{n_2}|B_{i1}^{(2)}||x_i^{(2)}||x_1^{(1)}|$$

$$+\cdots+\sum_{i=1}^{n_2}|B_{in_1}^{(2)}||x_i^{(2)}||x_{n_1}^{(1)}|$$

$$+\cdots\cdots$$

$$+\sum_{i=1}^{n_r}|B_{i1}^{(r)}||x_i^{(r)}||x_1^{(1)}|$$

$$+\cdots+\sum_{i=1}^{n_r}|B_{in_1}^{(r)}||x_i^{(r)}||x_{n_1}^{(1)}|$$

(这里 $B_{i1}^{(2)}=\sum_{j=1}^{n_1}c_{j1}^{(1)}a_{jn_1+i},\ \cdots,\ B_{in_1}^{(2)}=\sum_{j=1}^{n_1}c_{jn_1}^{(1)}a_{jn_1+i},$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$B_{i1}^{(r)}=\sum_{j=1}^{n_1}c_{j1}^{(1)}a_{j,n-n_r+i},\ \cdots,\ B_{in_1}^{(r)}=\sum_{j=1}^{n_1}c_{jn_1}^{(1)}a_{jn-n_r+i}$)

$$\leqslant-\frac{n_2}{n-n_1}x_1^{(1)^2}+\sum_{i=1}^{n_2}|B_{i1}^{(2)}||x_i^{(2)}||x_1^{(1)}|$$

$$+\cdots+(-1)\frac{n_2}{n-n_1}x_{n_1}^{(1)^2}+\sum_{i=1}^{n_2}|B_{in_1}^{(2)}||x_i^{(2)}||x_{n_1}^{(1)}|$$

$$+\cdots\cdots$$

$$+(-1)\frac{n_r}{n-n_1}x_1^{(1)}+\sum_{i=1}^{n_r}|B_{i1}^{(r)}||x_i^{(r)}||x_1^{(1)}|$$

$$+\cdots+(-1)\frac{n_r}{n-n_1}x_{n_1}^{(1)^2}+\sum_{i=1}^{n_r}|B_{in_1}^{(r)}||x_i^{(r)}||x_{n_1}^{(1)}|$$

$$\leqslant-\frac{n_2}{2(n-n_1)}x_1^{(1)^2}+\frac{(n-n_1)}{2}\sum_{j=1}^{n_2}B_{j1}^{(2)^2}x_j^{(2)^2}$$

$$+\cdots+(-1)\frac{n_2}{2(n-n_1)}x_{n_1}^{(1)^2}+\frac{n-n_1}{2}\sum_{j=1}^{n_2}B_{jn_1}^{(2)^2}x_j^{(2)^2}$$

$$+\cdots\cdots$$

$$+(-1)\frac{n_r}{2(n-n_1)}x_1^{(1)^2}+\frac{(n-n_1)}{2}\sum_{j=1}^{n_r}B_{j1}^{(r)^2}x_j^{(r)^2}$$

$$+\cdots+(-1)\frac{n_r}{2(n-n_1)}x_{n_1}^{(1)^2}+\frac{n-n_1}{2}\sum_{j=1}^{n_r}B_{jn_1}^{(r)^2}x_j^{(r)^2}$$

$$=-\frac{1}{2}(x_1^{(1)^2}+\cdots+x_{n_1}^{(1)^2})$$

$$+\frac{n-n_1}{2}\sum_{j=1}^{n_2}(B_{j1}^{(2)^2}+\cdots+B_{jn_1}^{(2)^2})x_j^{(2)^2}$$

$$+\cdots+\frac{n-n_1}{2}\sum_{j=1}^{n_r}(B_{j1}^{(r)^2}+\cdots+B_{jn_1}^{(r)^2})x_j^{(r)^2}$$

$$=-\frac{1}{2}(x_1^{(1)^2}+\cdots+x_{n_1}^{(1)^2})$$

$$+\frac{n-n_1}{2}\sum_{j=1}^{n_2}\left(\sum_{k=1}^{n_1}B_{jk}^{(2)^2}\right)x_j^{(2)^2}$$

$$+\cdots+\frac{n-1}{2}\sum_{j=1}^{n_r}\left(\sum_{k=1}^{n_1}B_{jk}^{(r)^2}\right)x_j^{(r)^2}$$

$$\leqslant-\frac{1}{2}(x_1^{(1)^2}+\cdots+x_{n_1}^{(1)^2})+L_{12}(x_1^{(2)^2}+\cdots+x_{n_2}^{(2)^2})$$

$$+\cdots+L_{1r}(x_1^{(r)^2}+\cdots+x_{n_r}^{(r)^2})$$

（这里 $L_{12}=\max\limits_{j=1,\cdots,n_2}\frac{n-n_1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n_1}B_{jk}^{(2)}$

$\cdots\cdots$

$L_{1r}=\max\limits_{j=1,\cdots,n_2}\frac{n-n_1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n_1}B_{jk}^{(r)^2}$ ）

$$\leqslant -\frac{1}{2A_2^{(1)}}v_1+\frac{L_{12}}{A_1^{(2)}}v_2+\cdots+\frac{L_{1r}}{A_1^{(r)}}v_r.$$

同样可以得到

$$\left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{(1.1)}\leqslant\frac{L_{21}}{A_1^{(1)}}v_1-\frac{1}{2A_2^{(2)}}v_2+\cdots+\frac{L_{2r}}{A_1^{(r)}}v_r,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\frac{dv_r}{dt}\right|_{(1.1)}\leqslant\frac{L_{r_1}}{A_1^{(1)}}v_1+\frac{L_{r_2}}{A_1^{(2)}}v_2+\cdots-\frac{1}{2A_2^{(r)}}v_r.$$

这里 $L_{21},\cdots,L_{2r};\cdots;L_{r_1},\cdots,L_{r,r-1}$ 完全与 $L_{12},\cdots,L_{1r}$ 同样计算,不再重复. 故有

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv_1}{dt}&\leqslant-\frac{1}{2A_2^{(1)}}v_1+\frac{L_{12}}{A_1^{(2)}}v_2+\cdots+\frac{L_{1r}}{A_1^{(r)}}v_r,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dv_r}{dt}&\leqslant\frac{L_{r_1}}{A_1^{(1)}}v_1+\frac{L_{r_2}}{A_1^{(2)}}v_2+\cdots-\frac{1}{2A_2^{(r)}}v_r.\end{aligned}\right\}\qquad(A)$$

现在考虑辅助方程组

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv_1^*}{dt}&=-\frac{1}{2A_2^{(1)}}v_1^*+\frac{L_{12}}{A_1^{(2)}}v_2^*+\cdots+\frac{L_{1r}}{A_1^{(r)}}v_r^*,\\ \frac{dv_2^*}{dt}&=\frac{L_{21}}{A_1^{(1)}}v_1^*-\frac{1}{2A_2^{(2)}}v_2^*+\cdots+\frac{L_{2r}}{A_1^{(r)}}v_r^*,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dv_r^*}{dt}&=\frac{L_{r_1}}{A_1^{(1)}}v_1^*+\frac{L_{r_2}}{A_1^{(2)}}v_2^*+\cdots+(-1)\frac{1}{2A_2^{(r)}}v_r^*.\end{aligned}\right\}\qquad(B)$$

这是一个 r 阶的常系数线性微分方程组，如果方程右端系数满足劳思-赫维茨条件(我们称条件 (C)), 那末 (B) 的平凡解是渐近稳定的,用引理 3.2, 得出 (A) 的平凡解也是渐近稳定的,即

$$\lim_{t\to\infty}v_1=\lim_{t\to\infty}v_2=\cdots=\lim_{t\to\infty}v_r=0.$$

由此推出系统 (1.1) 的平凡解也是渐近稳定的. 所以, 如果 (1.1) 中的参数满足条件 (C), 则由系统 (1.2) 的平凡解的渐近稳定性可以得出系统 (1.1) 的平凡解的渐近稳定性，条件 (C) 给出了参数的稳定性区域.

第六章 缓变系数系统

随时间 t 变化的变系数动力系统的运动稳定性，在工程和物理中是经常遇到的问题，例如依靠尾翼来稳定的火箭弹在火箭推力起作用的过程中的运动状态[19]，飞机的稳定与控制[20]。

变系数动力系统的稳定性的处理方法中有几种常用的方法：

（1）直接积分，

（2）设法作出李雅普诺夫函数，

（3）冻结系数法[20]，

（4）内积法[21]，

（5）其它（例如特殊方程的特殊处理，如马蒂厄（Mathieu）方程[22]）。

这些方法中，(1) 的可能性是十分稀少的，但是经常可以用来构成反例（见本章§ 1)；(2) 的困难在于一般不易作出适当的李雅普诺夫函数；(3) 虽为常见的方法，但是，必须小心使用，有反例表明，“冻结”系统与原来的系统的稳定性质可以完全相反；(见本章§ 1)罗森布罗克（Rosenbrok）在[23]中指出过，当系数缓慢变化时，则可保证稳定性质相同。但指出，困难的问题是如何来确定可允许的系数的变化率的范围，他只对一个特殊类型进行讨论，所用的方法比较烦复，不能直接由方程的系数变化率来决定稳定性质. [21]中给出了比较直接的考察方法，是一个值得注意的方法．但是，有反例表明内积法可能加上了若干不必要的限制.

本章将指出李雅普诺夫函数的作法可以由常系数扩充到变系数的类型，并且对于变系数系统可以明显地找出李雅普诺夫函数，以及由此用显式确定系数缓变的界限，非线性附加项的界限，带有时滞的系统的时滞的界限。

§1. 问题的提出[25][26]

众所周知,对于常系数线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=Ax \tag{1.1}$$

而言,如果 $|A-\lambda E|=0$ 的根均具有负实部,则(1.1)的零解是渐近稳定的.

对变系数系统

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x \tag{1.2}$$

而言,这里矩阵 $A(t)$ 的元素可微、有界,是否还有同样的结论呢?一般说来是不成立的. 在[23]中曾引用了下面的例子:

例 1: 考虑

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=(-1-9\cos^2 6t+12\sin 6t\cos 6t)x_1\\&\quad+(12\cos^2 6t+9\sin 6t\cos 6t)x_2,\\\frac{dx_2}{dt}&=(-12\sin^2 6t+9\sin 6t\cos 6t)x_1\\&\quad-(1+9\sin^2 6t+12\sin 6t\cos 6t)x_2.\end{aligned}$$

其特征方程

$$\begin{vmatrix}(-1-9\cos^2 6t+12\sin 6t\cos 6t)-\lambda & 12\cos^2 6t+9\sin 6t\cos 6t\\ -12\sin^2 6t+9\sin 6t\cos 6t & (-1-9\sin^2 6t-12\sin 6t\cos 6t)-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2+11\lambda+10=(\lambda+1)(\lambda+10)=0.$$

故对所有之 t 有 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-10$, 但这并不足以保证这个系统的稳定性. 事实上,它的通解为

$$\begin{aligned}x_1&=a_1e^{2t}(\cos 6t+2\sin 6t)+a_2e^{-13t}(\sin 6t-2\cos 6t),\\x_2&=a_1e^{2t}(2\cos 6t-\sin 6t)+a_2e^{-13t}(2\sin 6t+\cos 6t).\end{aligned}$$

其中 a_1, a_2 为任意常数,这个系统由于 e^{2t} 之因子,当 $t\to\infty$ 是不

稳定的.

例 2: 取一个系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = (c_1 + c_2\cos^2\nu t + c_3\sin\nu t\cos\nu t)x_1 \\ \qquad + (c_3\cos^2\nu t - c_2\sin\nu t\cos\nu t)x_2, \\ \dot{x}_2 = (-c_3\sin^2\nu t - c_2\sin\nu t\cos\nu t)x_1 \\ \qquad + (c_1 + c_2\sin^2\nu t - c_3\sin\nu t\cos\nu t)x_2.\end{cases}$$

其中 c_1, c_2, c_3, ν 为任意常数。

对任何 t 此系统的特征方程为

$$\lambda^2 - (2c_1 + c_2)\lambda + c_1(c_1 + c_2) = 0,$$

即

$$\lambda_1 = c_1, \quad \lambda_2 = c_1 + c_2.$$

此系统有通解

$$x_1 = a_1e^{\mu_1 t}(c_4\cos\nu t + c_5\sin\nu t) + a_2e^{\mu_2 t}(c_4\sin\nu t - c_5\cos\nu t),$$

$$x_2 = a_1e^{\mu_1 t}(c_5\cos\nu t - c_4\sin\nu t) + a_2e^{\mu_2 t}(c_5\sin\nu t + c_4\cos\nu t).$$

其中 a_1, a_2 为任意常数。

μ_1, μ_2, c_4, c_5 由 c_1, c_2, c_3, ν 而定. 具体有

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\left[2c_1 + c_2 + \sqrt{c_2^2 + 4\nu(c_3 - \nu)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lambda_1 + \lambda_2 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\nu(c_3 - \nu)}\right],$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2}\left[2c_1 + c_2 - \sqrt{c_2^2 + 4\nu(c_3 - \nu)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lambda_1 + \lambda_2 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\nu(c_3 - \nu)}\right],$$

以及

$$c_4:c_5 = (\nu - c_3):\frac{1}{2}\left[\lambda_2 - \lambda_1 - \sqrt{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 + 4\nu(c_3 - \nu)}\right].$$

注意，只要 $c_1:c_2:c_3:\nu$ 及 $\mu_1:\mu_2:c_4:c_5$ 即可. 当然比例因子任意差一个正数是可以的，因把 t 改为 $at(a > 0)$，不改变稳定性的性质.

引入一个判定量

$$K = \nu(c_3 - \nu) - \lambda_1\lambda_2,$$

则 $\sqrt{}$ 中之项可写成

$$c_2^2 + 4\nu(c_3 - \nu) = (\lambda_2 - \lambda_1)^2 + 4\nu(c_3 - \nu) = (\lambda_2 + \lambda_1)^2 + 4K.$$

下面研究 λ_1, λ_2 与 μ_1, μ_2 之关系.

注意到 λ_1, λ_2 只与 c_1, c_2 有关；μ_1, μ_2 不只与 $\lambda_1 + \lambda_2$ 有关，而且还与 K 有关，故 μ_1, μ_2 不只由 c_1, c_2 而定，还由 ν 及 c_3 而定. 因此，μ_1, μ_2 不能由 λ_1, λ_2 完全决定. 这样，改变 ν 及 c_3 可以使 μ_1, μ_2 的特性与 λ_1 及 λ_2 不同. 这是最主要的一点.

另外，μ_1, μ_2 也不全与 λ_2, λ_2 无关. 首先

$$\mu_1 + \mu_2 = \lambda_1 + \lambda_2,$$

因此，这当中有一定的联系. 其次，当 $|4K|$ 足够小时(即比 $(\lambda_1 + \lambda_2)^2$ 小)，μ_1, μ_1 主要有 $\mu_1 \cong \lambda_1 + \lambda_2$, $\mu_2 \cong \dfrac{-K}{|\lambda_1 + \lambda_2|}$, μ_1 及 μ_2 特性由 $\lambda_1 + \lambda_2$ 和 $-4K$ 而定.

下面分 $K < -\dfrac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2)^2$, $-\dfrac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2)^2 < K < 0$ $K > 0$ 三种情形来考察:

1) $K < -\dfrac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2)^2$, 则 $\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 4K}$ 为虚数,

$$\mathrm{Re}(\mu_1) = \mathrm{Re}(\mu_2) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

$(\mathrm{i})_1$ 当 $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, 系统不稳定,

$(\mathrm{ii})_1$ 当 $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, 系统稳定.

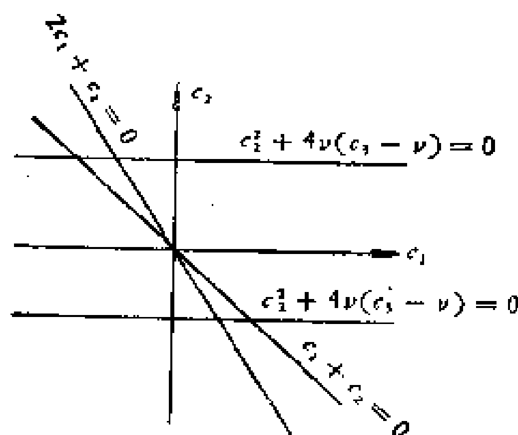


图 1

由于$(\mathrm{i})_1$是显然，我们着重讨论$(\mathrm{ii})_1$. 在这种情况下存在着反例.

例如 $\lambda_1\lambda_2 < 0$, 即 λ_1, λ_2 反号，因而冻结方程不稳定，但原方程稳定. 这时包含有三个不等式同时成立，即

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 4K < 0$$

或 $\quad c_2^2 + 4\nu(c_3 - \nu) < 0;$

$\lambda_1+\lambda_2<0$ 或 $2c_1+c_2<0$; $\lambda_1\lambda_2<0$ 或 $c_1(c_1+c_2)<0$, 故当 $4\nu(c_3-\nu)<0$ 时，第二、四象限中各有一个小区域具有反常性质，见图 (1) 中的阴影区.

例 1: $c_1=-1$, $c_2=1.5$, $c_3=1$, $\nu=2$,

则 $\lambda_1=-1<0$, $\lambda_2=0.5>0$,

$$\mu_1=\frac{1}{2}[-0.5+\sqrt{5.75}\,i],$$

$$\mu_2=\frac{1}{2}[-0.5-\sqrt{5.75}\,i].$$

故冻结系统不稳定，原系统稳定.

例 2: 取 $c_1=0.5$, $c_2=-2$, $c_3=1$, $\nu=2$ 则仍旧得"冻结"系统不稳定和原系统是稳定的.

如果 $4\nu(c_3-\nu)\geqslant 0$ (即 $c_3\geqslant\nu$, 假设 $\nu>0$), 这时就不出现这种反常区域.

2) $-\frac{1}{4}(\lambda_1+\lambda_2)^2<K<0$,

$0<4K+(\lambda_1+\lambda_2)^2<(\lambda_1+\lambda_2)^2$, 故有 $\mu_1\ \mu_2$ 均与 $\lambda_1+\lambda_2$ 同号.

$(\text{i})_2$ $\lambda_1+\lambda_2>0$ 系统不稳定，

$(\text{ii})_2$ $\lambda_1+\lambda_2<0$ 系统稳定.

情形 $(\text{i})_2$ 与 $(\text{i})_1$ 相同. 只有 $(\text{ii})_2$ 如同 $(\text{ii})_1$ 可能出现反常区，具体分析如下:

$(\text{ii})_2$ $\lambda_1+\lambda_2<0$, 即 (1) $2c_1+c_2<0$. 反常条件 $\lambda_1\lambda_2<0$, 即

$$(2)\,c_1(c_1+c_2)<0.$$

2) 之条件为 $-\frac{1}{4}(\lambda_1+\lambda_2)^2\underset{(3)}{<}K\underset{(4)}{<}0$, 即

$$0\underset{(3)}{<}(\lambda_1+\lambda_2)^2+4K\underset{(4)}{<}(\lambda_1+\lambda_2)^2,$$

或
$$0\underset{(3)}{<}c_2^2+4\nu(c_3-\nu)\underset{(4)}{<}(2c_1+c_2)^2,$$

或
$$-c_2^2\underset{(3)}{<}4\nu(c_3-\nu)\underset{(4)}{<}4(c_1+c_2)c_1\underset{(2)}{<}0.$$

求同时满足 (1), (2), (3), (4) 之 c_1, c_2, c_3, ν. 由

$$4\nu(c_3-\nu) \underset{(4)}{<} 4c_1(c_1+c_2) \underset{(2)}{<} 0,$$

故 $4\nu(c_3-\nu)>0$ 时，不存在反常情况，而当 $4\nu(c_3-\nu)<0$ 时，存在反常区域(如图(2))，用深色表示．下面是两片之例：

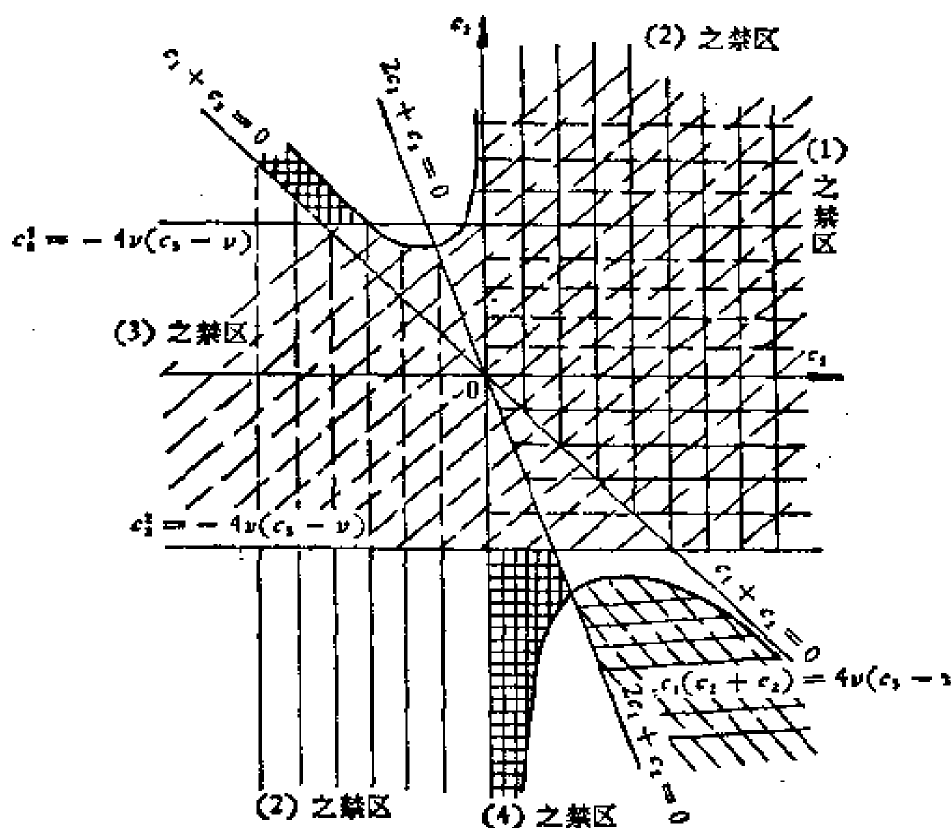


图 2

例 3：$c_1=0.1$，$c_2=-3$，$c_3=1.5$，$\nu=2$，

则　$\lambda_1=0.1>0$，$\lambda_2=-2.9<0$，$\mu_1=-0.28<0$，

$\mu_2=-2.52<0$．

例 4：$c_1=-2.9$，$c_2=3$，$c_3=1.5$，$\nu=2$，

则　$\lambda_1=-2.9<0$，$\lambda_2=0.1>0$，$\mu_1=-0.28<0$，

$\mu_2=-2.52<0$．

3) $K>0$，这时 $|\lambda_1+\lambda_2|<\sqrt{(\lambda_1+\lambda_2)^2+4K}$，$\mu_1>0$，$\mu_2<0$，故系统不稳定．这时又可分两种情形：

(i)：$c_1>0$ 和 $c_1+c_2>0$ 中至少有一个成立；

(ii)$_3$ $c_1 < 0, c_1 + c_2 < 0$.

情况 (i)$_3$ 与 (i)$_1$ (i)$_2$ 的情形同样，没有特别之处，我们仍旧着重讨论 (ii)$_3$，$c_1 < 0$，$c_1 + c_2 < 0$，此为反常情形．这时要求同时满足三个条件：

$$K \underset{(1)}{>} 0 \text{ 即 } \nu(c_3 - \nu) \underset{(1)}{>} c_1(c_1 + c_2) \underset{(2)(3)}{>} 0$$

$$c_1 \underset{(2)}{<} 0, \quad c_1 + c_2 \underset{(3)}{<} 0$$

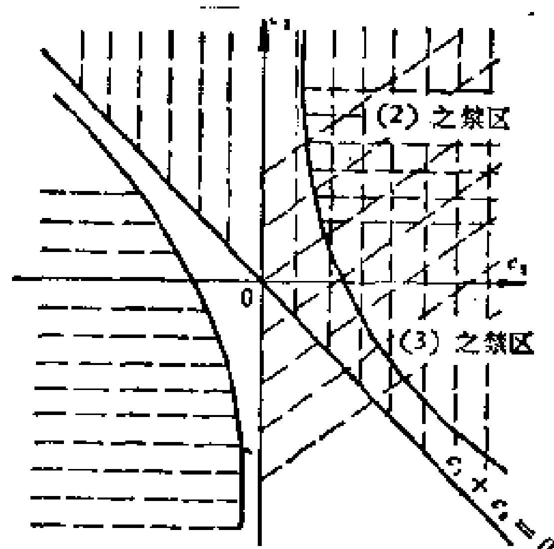


图 3

故当 $\nu(c_3 - \nu) < 0$ 时，(ii)$_3$ 不出现．

当 $\nu(c_3 - \nu) > 0$ 时，则有一个带形的反常区，见图 3 中的空白区．

例 5：$c_1 = -1$，$c_2 = 0.5$，$c_3 = 2$，$\nu = 1$，

则 $\lambda_1 = -1 < 0$，$\lambda_2 = -1 + 0.5 = -0.5 < 0$，$\mu_1 = 0.28 > 0$，$\mu_2 = -1.78 < 0$．

例 6：取 $c_1 = -1$，$c_2 = -9$，$c_3 = 12$，$\nu = 6$，

则 $\lambda_1 = -1 < 0$，$\lambda_2 = -10 < 0$，$\mu_1 = 2 > 0$，$\mu_2 = -13 < 0$．

结论 I：因此，我们可以看到 λ 判定（即"冻结"系统）与 μ 判定（即原来系统）之间的各种关系，一般均可出现．现总结如下：

"冻结"系统 \ 原来系统	判定不稳定	判定稳定
不 稳 定	(i)$_1$ (i)$_2$ (i)$_3$	(ii)$_3$ {例 5, 例 6}
稳 定	反常情形 (ii)$_1$ 之 {例 1, 例 2} 反常情形 (ii)$_2$ 之 {例 3, 例 4}	(ii)$_1$ 中之正常情形 (ii)$_2$ 中之正常情形

其次，如果固定 c_1, c_2, 把 c_3, ν 看成可以调节的量，我们希望调节 c_3, ν 使得 $(\text{ii})_3$ 中的情形，即"冻结"系统判定稳定 (λ)，也能保证原系统的稳定 (μ)。

这时，已设 $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$，要调整 c_3, ν 使得 $\text{Re}(\mu_1) < 0$, $\text{Re}(\mu_2) < 0$. 但由 μ_2 的表示式可看出，不论 $K > 0$ 或 $K < 0$，都有 $\text{Re}(\mu_2) < 0$.

但当 $K > 0$，则

$$\mu_1 = \frac{1}{2}[(\lambda_1 + \lambda_2) + \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 4K}] > 0.$$

因此条件化为要求 $K < 0$ 使 $\text{Re}(\mu_1) < 0$. 亦即要求

$$\nu(c_3 - \nu) < \lambda_1\lambda_2.$$

因此，有两种方法加以改变，一种是改变 ν，另一种是改变 c_3. 不妨设 $\nu > 0$，则 (c_3, ν) 平面上之曲线，$\nu(c_3 - \nu) = \lambda_1\lambda_2$ 如图 4 所示为双曲线。

(甲) 当 $|c_3| < 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$，则不论 ν 为何，原系统均为稳定；

(乙) 当 $|c_3| > 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$，则 $\nu(c_3 - \nu) = \lambda_1\lambda_2$，对 ν 有两个实根：

$$\nu_1 = \frac{1}{2}[c_3 - \sqrt{c_3^2 - 4\lambda_1\lambda_2}],$$

$$\nu_2 = \frac{1}{2}[c_3 + \sqrt{c_3^2 - 4\lambda_1\lambda_2}],$$

则稳定区在 $0 < \nu < \nu_1$ 及 $\nu_2 < \nu$ 两段内. 由此得出

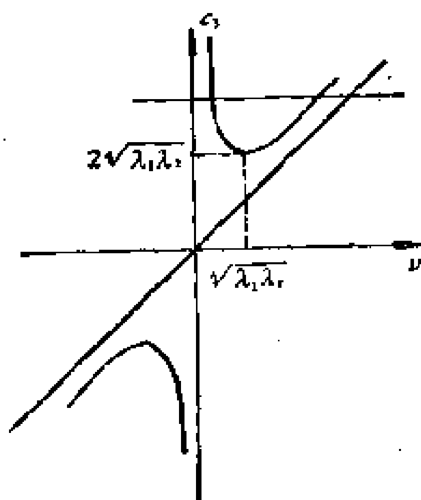


图 4

结论 II：当 $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ 判定稳定，要保证 $\text{Re}(\mu_1) < 0$, $\text{Re}(\mu_2) < 0$ 有两种调节法：

(甲) 减少 $|c_3|$，亦即减少扰动项的"振幅系数"，

(乙) 减小 ν 或加大 ν.

由于周期 $T = \frac{2\pi}{\nu}$，减少 ν 即加大 T，亦即系统成为"缓慢"系

统;加大 ν 即减少 T,使系统成为"高频"振动,前者是容易想像的,后者则不易想像.

条件 $\nu(c_3-\nu)<\lambda_1\lambda_2$,当 ν 小时也可简化成

$$\nu c_3<\lambda_1\lambda_2.$$

不等式的左方表示 $\nu c_3=2\pi\frac{c_3}{T}$,即一周期所改变之幅度的特征数,用 $\lambda_1\lambda_2$ 来控制,加大 T 或减少 c_3,便得到缓慢系统了.

§2. 保证性条件

讨论系统

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j,\quad i=1,\cdots,n. \tag{2.1}$$

假设 $a_{ij}(t)$ 可微,$|a_{ij}(t)|\leqslant a$ (a 为与 t 无关的常量),并设

$$\mathrm{Re}\lambda(A(t))\leqslant-\delta<0,$$

对所有 t 都成立.

系统 (2.1) 的特征方程为

$$|a_{ij}(t)-\lambda\delta_{ij}|=0, \tag{2.2}$$

即 $\lambda^n-\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(t)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\begin{vmatrix}a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{vmatrix}=0.$

若 $\lambda_j(t)(j=1,\cdots,n)$ 为方程 (2.2) 的根,根据根与系数的关系有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(t),\ \prod_{i=1}^{n}\lambda_i(t)=\begin{vmatrix}a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{vmatrix},$$

记

$$p_1(t)=-\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(t),\ \cdots,\ p_n(t)=(-1)^n\begin{vmatrix}a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{vmatrix}.$$

则特征方程 (2.2) 可以写成

$$\lambda^n + p_1(t)\lambda^{n-1} + \cdots + p_n(t) = 0.$$

再记

$$\Delta_1(t) = p_1(t),\ \Delta_2(t) = \begin{vmatrix} p_1(t) & p_3(t) \\ p_0(t) & p_2(t) \end{vmatrix}, \cdots, \Delta_n$$

$$= \begin{vmatrix} p_1(t) p_3(t) & \cdots & p_{2n-1}(t) \\ p_0(t) p_2(t) & \cdots & p_{2n-2}(t) \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 \quad 0 & \cdots & p_n(t) \end{vmatrix}$$

$(p_0(t) = 1; p_k(t) = 0$, 当 $k > n)$.

因为方程 (2.2) 之根均具有负实部,故有

$$\Delta_i(t) > 0 \ (i = 1, 2\cdots, n),$$

即满足劳思-赫维茨条件.

求出 $V(t; x_1, \cdots, x_n)$, 使其满足

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j = -2 \prod_{i=1}^{n} \Delta_i(t) \sum_{j=1}^{n} x_j^2, \qquad (2.3)$$

根据巴尔巴欣公式$\left(其中取\ w_{ii} = -\prod_{i=1}^{n} \Delta_i(t),\ i = 1, \cdots, n,\right.$

$\left. w_{ij} = 0, 当\ i \neq j\ 时, 即取\ w = -\prod_{i=1}^{n} \Delta_i(t) \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)$得出

$$v = \frac{\prod_{i=1}^{n} \Delta_i(t)}{\Delta(t)} \begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & \cdots & 2x_i x_k & \cdot & x_\alpha^2 \\ 1 & a_{11}(t) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ 0 & a(11, jl) & \cdots & a(ik, jl) & \cdots & a(nn, jl) \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ 1 & a(11, nn) & \cdots & a(ik, nn) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}, \qquad (2.4)$$

其中 $\Delta(t) = |a(ik, jl)|$, $a(ik, jl)$ 定义如下:

$jl \backslash ik$	11	$\cdots$	$1n$	$\cdots$	$n1$	$\cdots$	nn
11	$a(11,11)$	$\cdots$	$a(1n,11)$	$\cdots$	$a(n1,11)$	$\cdots$	$a(nn,11)$
$\vdots$			$\cdots\cdots$				
$1n$	$a(11,1n)$	$\cdots$	$a(1n,1n)$	$\cdots$	$a(n1,1n)$	$\cdots$	$a(nn,1n)$
$\vdots$			$\cdots\cdots$				
$n1$	$a(11,n1)$	$\cdots$	$a(1n,n1)$	$\cdots$	$a(n1,n1)$	$\cdots$	$a(nn,n1)$
$\vdots$			$\cdots\cdots$				
nn	$a(11,nn)$	$\cdots$	$a(1n,nn)$	$\cdots$	$a(n1,nn)$	$\cdots$	$a(nn,nn)$

有以下关系

$$a(ik,jl)=a(ki,jl)=a(ki,lj),$$

$$a(ik,jl)=\begin{cases} 0 & 当\ i\neq j,\ k\neq l,\ k\neq j,\ i\neq l; \\ a_{kl}(t) & 当\ i\neq j,\ k\neq l; \\ a_{ii}(t)+a_{jj}(t) & 当\ i=j,\ k=l,\ i\neq k; \\ a_{ii}(t) & 当\ i=j=k=l. \end{cases}$$

记

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}\Delta_i(t)}{\Delta(t)}=c(t).$$

由 (2.4) 式得出

$$v(t;x_1,\cdots,x_n)=c(t)\sum_{i,j=1}^{n}v_{ij}(t)x_ix_j\,(v_{ij}(t)=v_{ji}(t)). \quad (2.5)$$

其中 $v_{ij}(t)(i,j=1,\cdots,n)$ 是用 (2.4) 式的行列式中的第一列与含有 $2x_ix_j(i\neq j)$（当 $i=j$ 时为 x_i^2）的列对换,然后去掉第一行与第一列后所得到的行列式。

将 (2.5) 式写成

$$v(t;x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}V_{ij}(t)x_ix_j(V_{ij}(t)=V_{ji}(t)), \quad (2.6)$$

其中 $V_{ij}(t)=c(t)v_{ij}(t)$。

首先来证明函数 $v(t;x_1,\cdots,x_n)$ 是正定的,给定二次型

$$w=-\prod_{i=1}^{n}\Delta_i(t)\sum_{j=1}^{n}x_j^2,$$

由 (2.3) 式可以求出唯一确定的 $v(t;x_1,\cdots,x_n)$, 故由 (2.6) 式所表示的 $v(t;x_1,\cdots,x_n)$ 应该与 [6] 中所作的李雅普诺夫函数相一致,即

$$v(t;x_1,\cdots,x_n)=\Delta_2(t)\cdots\Delta_n(t)\sum_{j=1}^{n}x_j^2$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma\pm1}}^{n}\Delta_s\Delta_{\sigma,j}^2(t;x_1,\cdots,x_n).$$

记号 $\Delta_{s,\sigma}(t;x_1,\cdots,x_n)$ 可参阅 [6]。显然有

$$v(t;x_1,\cdots,x_n)\geqslant\Delta_2(t)\cdots\Delta_n(t)\sum_{j=1}^{n}x_j^2\geqslant K\sum_{j=1}^{n}x_j^2.$$

其中 K 为与 t 无关的常量,由 δ 决定.

为了简单起见,我们仅以 $n=3$ 为例证明之,对一般 n 的情形也可同样证明.

$$v(t;x_1,x_2,x_3)\geqslant\Delta_2(t)\Delta_3(t)\sum_{j=1}^{3}x_j^2$$

$$=(-\lambda_1\lambda_2\lambda_3)[-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)$$

$$-\lambda_1\lambda_2\lambda_3]^2\sum_{j=1}^{3}x_j^2\geqslant\delta^3[3\delta(3\delta^2)+\delta^3]^2\sum_{j=1}^{3}x_j^2$$

$$=100\delta^9\sum_{j=1}^{3}x_j^2,$$

取 $K=100\delta^9$ 即可. 故由上面所作出的函数 $v(t;x_1,\cdots,x_n)$ 是正定的,所以下面我们就可以取正定函数

$$v(t;x_1\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}V_{ij}(t)x_ix_j$$

作为系统 (2.1) 的李雅普诺夫函数:

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.1)}=-2\prod_{i=1}^{n}\Delta_i(t)\sum_{j=1}^{n}x_j^2+\sum_{i,j=1}^{n}\dot V_{ij}(t)x_ix_j$$

$$\leqslant -2\prod_{i=1}^{n}\Delta_i(t)\sum_{j=1}^{n}x_j^2+\sum_{i,j=1}^{n}|\dot{V}_{ij}(t)||x_i||x_j|$$

$$\leqslant -2\prod_{i=1}^{n}\Delta_i(t)\sum_{j=1}^{n}x_j^2+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{2}|\dot{V}_{ij}(t)|(x_i^2+x_j^2)$$

$$=-2\prod_{i=1}^{n}\Delta_i(t)\sum_{j=1}^{n}x_j^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|\dot{V}_{ij}(t)|x_i^2.$$

因为 $V_{ij}(t)=c(t)v_{ij}(t)$，故

$$\dot{V}_{ij}(t)=\frac{dc(t)}{dt}v_{ij}(t)+c(t)\dot{v}_{ij}(t)$$

$$=\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial c}{\partial a_{ij}}\dot{a}_{ij}(t)\right)v_{ij}(t)+c(t)\dot{v}_{ij}(t).$$

令 $|\dot{a}_{ij}(t)|\leqslant\varepsilon$，则有

$$|\dot{V}_{ij}(t)|\leqslant\varepsilon|v_{ij}(t)|\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial c}{\partial a_{ij}}\right|+\varepsilon|c(t)|P_{ij}(t).\quad(2.7)$$

其中 P_{ij} 为 v_{ij} 的行列式中其导数不为零之元素的代数余子式之绝对值之和（如果某元素出现 $a_{ii}+a_{jj}$ 之形，则在其代数余子式的绝对值前乘以 2）。

由 (2.7) 式得出

$$|\dot{V}_{ij}(t)|\leqslant\varepsilon[|v_{ij}(t)|D(t)+|c(t)|P_{ij}(t)].$$

其中 $D(t)=\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial c}{\partial a_{ij}}\right|$，故

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.1)}\leqslant -2\prod_{i=1}^{n}\Delta_i(t)\sum_{j=1}^{n}x_j^2$$

$$+\varepsilon\left\{\left[D(t)\sum_{j=1}^{n}|v_{1j}(t)|+|c(t)|\sum_{j=1}^{n}P_{1j}(t)\right]x_1^2\right.$$

$$\left.+\cdots+\left[D(t)\sum_{j=1}^{n}|v_{nj}(t)|+|c(t)|\sum_{j=1}^{n}P_{nj}(t)\right]x_n^2\right\}.$$

令

$$Q_i(t)=\sum_{j=1}^{n}|v_{ij}(t)|,\quad P_i(t)=\sum_{j=1}^{n}P_{ij}(t)\quad(i=1,\cdots,n),$$

故有

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.1)}\leqslant -2\prod_{i=1}^{n}\Delta_i(t)\sum_{j=1}^{n}x_j^2+\varepsilon[D(t)Q_1(t)+|c(t)|P_1(t)]x_1^2+\cdots+\varepsilon[D(t)Q_n(t)+|c(t)|P_n(t)]x_n^2.$$

不妨取

$$\varepsilon=\min_{t_0\leqslant t<\infty}\left\{\frac{\prod_{i=1}^{n}\Delta_i(t)}{D(t)Q_1(t)+|c(t)|P_1(t)},\cdots,\frac{\prod_{i=1}^{n}\Delta_i(t)}{D(t)Q_n(t)+|c(t)|P_n(t)}\right\},$$

那末当 $|\dot{a}_{ij}(t)|\leqslant\varepsilon$ 时,有

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.1)}\leqslant-\prod_{i=1}^{n}\Delta_i(t)\sum_{j=1}^{n}x_j^2.$$

(这里的估值较粗略，对具体的问题我们可作较精细的估值，从而可使系数的变化率范围还可放大一些.)

利用 $\mathrm{Re}\lambda(A(t))\leqslant-\delta<0$ 之条件,不难证明

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.1)}\leqslant-K^*\sum_{j=1}^{n}x_j^2.$$

其中 K^* 为与 t 无关的常量,故 $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.1)}$ 是负定的.

由于 $v(t;x_1,\cdots,x_n)$ 是正定的，且具有无限小的上限（由 $|a_{ij}(t)|\leqslant a$ 立即得出此结论)，而 $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.1)}$ 是负定的，所以系统 (2.1) 的零解是渐近稳定的，又因系统 (2.1) 是线性的，故稳定性具有全局的性质,因而有下面的定理:

定理 2.1：考虑变系数线性系统 (2.1)

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j \quad (i = 1, \cdots, n),$$

假设 $a_{ij}(t)$ 可微，$|a_{ij}(t)| \leqslant a$ (a 为与 t 无关的常量)，并且特征方程的每一个根满足 $\mathrm{Re}\lambda(A(t)) \leqslant -\delta < 0$，对所有 t 成立，则存在

$$\varepsilon > 0, \quad \varepsilon = \min_{t_0 \leqslant t < \infty} \left\{ \frac{\prod_{i=1}^{n} \Delta_i(t)}{D(t)Q_1(t) + |c(t)|P_1(t)}, \cdots, \frac{\prod_{i=1}^{n} \Delta_i(t)}{D(t)Q_n(t) + |c(t)|P_n(t)} \right\}.$$

其中 $c(t) = \dfrac{\prod_{i=1}^{n} \Delta_i(t)}{\Delta(t)}$, $D(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \left| \dfrac{\partial c}{\partial a_{ij}} \right|$,

$$Q_i(t) = \sum_{j=1}^{n} |v_{ij}(t)|,$$

$$P_i(t) = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(t), \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

这里 $P_{ij}(t)$ 是 $v_{ij}(t)$ 行列式中其导数不为零之元素的代数余子式的绝对值之和(如果某元素出现 $a_{ii} + a_{jj}$ 的形式，则在其代数余子式绝对值之前乘以 2)。使得如果 $|a_{ij}(t)| \leqslant \varepsilon$，则系统 (2.1) 的零解是渐近稳定的. 由于系统 (2.1) 是线性的，故稳定性具有全局性.

上述处理缓变线性系统的方法，在对非线性附加项作适当的限制后，同样可处理非线性缓变系统的稳定性问题. 下面我们就介绍这方面的工作。

考虑非线性系统

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{sj}(t)x_j + f_s(t; x_1, \cdots, x_n), \quad s = 1, \cdots, n. \tag{2.8}$$

假设当 $t_0 \leqslant t < \infty$ 时，$a_{ij}(t)$ 是可微的，满足 $|a_{ij}(t)| \leqslant a$ (a 为与 t 无关的常量)，并且 $|a_{ij}(t) - \lambda\delta_{ij}| = 0$ 的所有特征根有 $\mathrm{Re}\lambda(A(t)) \leqslant -\delta < 0$ 对所有 t 成立。此处还假设：

(1) 存在区域 D：$t \geqslant t_0, |x_s| \leqslant H (s = 1, 2, \cdots, n)$，在这区域中满足不等式

$$|f_s(t; x_1, \cdots, x_n)| \leqslant A\{|x_1| + \cdots + |x_n|\}, \qquad (2.9)$$

其中 A 是常量。

(2) 在区域 D 中，函数 $f_s(t; x_1, \cdots, x_n)$ 连续，并满足使方程 (2.8) 对在所指区域内的任何初始条件有唯一的解。

取由 (2.6) 所表示的正定函数

$$v(t; x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} V_{ij}(t) x_i x_j$$

作为李雅普诺夫函数，则

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.8)} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + \sum_{i,j=1}^{n} \dot{V}_{ij}(t) x_i x_j \\
&= -2\Delta_1(t) \cdots \Delta_n(t) \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} \dot{V}_{ij}(t)\, x_i x_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j} f_j(t; x_1, \cdots, x_n) \\
&= \left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.1)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j} f_j(t; x_1, \cdots, x_n),
\end{aligned} \qquad (2.10)$$

而

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j} f_j(t; x_1, \cdots, x_n) = 2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} V_{ji}(t) x_i f_j(t; x_1 \cdots, x_n),$$

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j} f_j(t; x_1, \cdots, x_n)\right| \\
&\qquad \leqslant 2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |V_{ji}(t)| |x_i(t)| |f_j(t; x_1, \cdots, x_n)|
\end{aligned}$$

$$\leqslant 2A\{|x_1| + \cdots + |x_n|\}\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|V_{ji}(t)||x_i|\right\}$$

$$= 2A\{|x_1| + \cdots + |x_n|\}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|V_{ji}(t)|\right)|x_i|\right\}$$

$\Big($因为 $V_{ji}(t) = c(t)v_{ji}(t)$, $Q_i(t) = \sum_{j=1}^{n}|v_{ij}(t)|$

$= \sum_{j=1}^{n}|v_{ji}(t)|\Big)$

$$\leqslant 2A|c(t)|\Big\{Q_1(t)x_1^2 + \frac{1}{2}Q_1(t)(x_1^2 + x_2^2)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{2}Q_1(t)(x_1^2 + x_n^2)$$

$$+ \frac{1}{2}Q_2(t)(x_1^2 + x_2^2) + Q_2(t)x_2^2$$

$$+ \cdots + \frac{1}{2}Q_2(t)(x_2^2 + x_n^2)$$

$$+ \cdots$$

$$+ \frac{1}{2}Q_n(t)(x_1^2 + x_n^2) + \frac{1}{2}Q_n(t)(x_2^2 + x_n^2)$$

$$+ \cdots + Q_n(t)x_n^2\Big\}$$

$$= 2A|c(t)|\left\{\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}Q_j(t) + nQ_1(t)\right)x_1^2\right.$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}Q_j(t) + nQ_2(t)\right)x_2^2$$

$$\left.+ \cdots + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}Q_j(t) + nQ_n(t)\right)x_n^2\right\},$$

由 (2.10) 得出

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.8)} \leqslant \left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.1)} + \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_j}f_j(t, x_1, \cdots, x_n)\right|$$

$$\leqslant -2\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_n\sum_{j=1}^{n} x_j^2 + \varepsilon[(D(t)Q_1(t) + |c(t)|P_1(t))x_1^2 + \cdots + (D(t)Q_n(t) + |c(t)|P_n(t))x_n^2]$$
$$+ A|c(t)|\left[\left(\sum_{j=1}^{n} Q_j(t) + nQ_1(t)\right)x_1^2 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} Q_j(t) + nQ_n(t)\right)x_n^2\right],$$

如果取

$$\varepsilon = \min_{t_0\leqslant t<+\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_1(t)\cdots\Delta_n(t)}{D(t)Q_1(t)+|c(t)|P_1(t)},\cdots,\frac{\Delta_1(t)\cdots\Delta_n(t)}{D(t)Q_n(t)+|c(t)|P_n(t)}\right], \tag{2.11}$$

$$\eta = \min_{t_0\leqslant t<+\infty}\frac{1}{2|c(t)|}\left[\frac{\Delta_1(t)\cdots\Delta_n(t)}{\sum_{j=1}^{n} Q_j(t)+nQ_1(t)},\cdots,\frac{\Delta_1(t)\cdots\Delta_n(t)}{\sum_{j=1}^{n} Q_j(t)+nQ_n(t)}\right\}, \tag{2.12}$$

则当 $A\leqslant\eta$, $|a_{ij}(t)|\leqslant\varepsilon$ 时,就有

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.8)} \leqslant -\Delta_1(t)\cdots\Delta_n(t)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right).$$

因为函数 $v(t;x_1,\cdots,x_n)$ 是正定的,且具有无限小的上界,而 $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.8)}$ 是负定的,故系统(2.8)的零解是渐近稳定的. 因此下列定理成立.

定理 2.2: 对于非线性系统(2.8)

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{sj}(t)x_j + f_s(t;x_1,\cdots,x_n) \quad (s=1,2,\cdots,n),$$

假设当 $t_0 \leqslant t < +\infty$ 时，$a_{ij}(t)$ 可微，$|a_{ij}(t)| \leqslant a$（a 为与 t 无关的常量），并且 $|a_{ij}(t) - \lambda\delta_{ij}| = 0$ 的所有特征根有

$$\mathrm{Re}\lambda(A(t)) \leqslant -\delta < 0$$

对所有 t 成立。此外还假设：

(1) 存在区域 D：$t \geqslant t_0$，$|x_i| \leqslant H$，在这区域中满足不等式

$$|f_i(t; x_1, \cdots, x_n)| \leqslant A\{|x_1| + \cdots + |x_n|\},$$

其中 A 是常量。

(2) 在区域D中，函数 $f_i(t; x_1, \cdots, x_n)$ 连续，并满足使方程 (2.8) 对在所指区域内的任何初始条件有唯一的解。则存在 $\varepsilon > 0$（与 t 无关，由 (2.11) 式决定）及 $\eta > 0$（与 t 无关，由 (2.12) 式决定）。只要当 $|\dot{a}_{ij}(t)| \leqslant \varepsilon$ 及 $A \leqslant \eta$ 时，则系统 (2.8) 的零解是渐近稳定的。

§3. 带有时滞的系统

考虑

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}(t)x_j(t) + b_{ij}(t)x_j(t-\tau))$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.1}$$

的零解的稳定性问题。为了方便起见，我们将系统 (3.1) 改写成下面形式：

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(t)x_j(t) + \psi_i(t) \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{3.2}$$

其中

$$A_{ij}(t) = a_{ij}(t) + b_{ij}(t) \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

$$\psi_i(t) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)(x_j(t-\tau) - x_j(t)) \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

当时滞 τ 很小时，这一项可看成是微小扰动。

现在假设 $a_{ij}(t)$，$b_{ij}(t)$ 连续可微有界

$$|a_{ij}(t)| \leqslant \frac{A}{2}, \quad |b_{ij}(t)| \leqslant \frac{A}{2}$$

(即 $|A_{ij}(t)|\leqslant A$)，且特征方程

$$|A_{ij}(t)-\lambda\delta_{ij}|=0$$

之根都有 $\mathrm{Re}(\lambda_i(t))\leqslant-\delta<0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 对所有 t 都成立，取由 (2.6) 式所表示的正定函数

$$v(t;x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}V_{ij}(t)x_ix_j$$

作为李雅普诺夫函数 (注意这里是以 $A_{ij}(t)$ 代替 (2.6) 中的 $a_{ij}(t)$)，则

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(3.2)}=-2\prod_{i=1}^{n}\Delta_i(t)(x_1^2+\cdots+x_n^2)$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\dot V_{ij}(t)x_ix_j+R_2(t;x_1,\cdots,x_n),$$

$$=\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.1)}+R_2(t;x_1,\cdots,x_n).$$

其中

$$R_2(t;x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(t)(x_j(t-\tau)-x_j(t))\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}b_{ij}(t)\right)(x_j(t-\tau)-x_j(t))$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}2\left(\sum_{k=1}^{n}V_{ik}(t)x_k\right)b_{ij}(t)\right)(x_j(t-\tau)-x_j(t))$$

$$=2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}V_{ik}(t)b_{ij}(t)\right)x_k\right)(x_j(t-\tau)-x_j(t))$$

$$=2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}Q_{jk}(t)x_k\right)(x_j(t-\tau)-x_j(t)).$$

其中

$$Q_{jk}(t)=\sum_{i=1}^{n}b_{ij}(t)V_{ik}(t)\quad(\text{注意 } V_{ij}(t)=V_{ji}(t)),$$

又

$$x_j(t-\tau)-x_j(t)=(-\tau)\left.\frac{dx_j(t)}{dt}\right|_{t=\xi_j},$$

$$t-\tau\leqslant\xi_j\leqslant t\quad(j=1,2,\cdots,n),$$

再注意到

$$|Q_{jk}(t)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|b_{ij}(t)||V_{ik}(t)|,$$

令

$$Q=\max_{\substack{ij=1,2,\cdots,n\\ t_0\leqslant t<+\infty}}|Q_{ij}(t)|,$$

故有

$$|R_2(t;x_1,\cdots,x_n)|\leqslant 2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|Q_{jk}(t)||x_k|\right)\tau$$

$$\times\left[\left|\sum_{l=1}^{n}a_{jl}(\xi_j)x_l(\xi_j)+b_{jl}(\xi_j)x_l(\xi_j-\tau)\right|\right]$$

$$\leqslant 2\tau Q\left[\sum_{k=1}^{n}|x_k(t)|\right]\left[\sum_{j,l=1}^{n}(|a_{jl}(\xi_j)||x_l(\xi_j)|\right.$$

$$\left.+|b_{jl}(\xi_j)||x_l(\xi_j-\tau)|\right]$$

$$\leqslant 2\tau Q\frac{A}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k(t)|\right)\left[\sum_{j,l=1}^{n}|x_l(\xi_j)|+|x_l(\xi_j-\tau)|\right]$$

$$\leqslant \tau Q\frac{A}{2}\left\{2n^2(x_1^2(t)+\cdots+x_n^2(t))\right.$$

$$+n\sum_{i=1}^{n}x_i^2(\xi_1)+\cdots+n\sum_{i=1}^{n}x_i^2(\xi_n)$$

$$\left.+n\sum_{i=1}^{n}x_i^2(\xi_1-\tau)+\cdots+n\sum_{i=1}^{n}x_i^2(\xi_n-\tau)\right\}.$$

因为

$$v=\Delta_2\cdots\Delta_n\sum_{j=1}^{n}x_j^2+\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma+1}}^{n}\Delta_s(t)\Delta_{\sigma j}^2(x_1,\cdots,x_n),$$

所以

$$v \geqslant \Delta_2 \cdots \Delta_n \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \geqslant \alpha \sum_{j=1}^{n} x_j^2,\ \alpha > 0 \text{ 常数。}$$

又因 $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$ 有界,因此

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant v(t;\ x_1,\ \cdots,\ x_n) \leqslant \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \tag{3.3}$$

这里 $\beta > 0$ 常数。

如果 $x_i(\xi_j)\,x_i(\xi_j-\tau)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 在 $2nv\,(t;\ x_1(t),\ \cdots,\ x_n(t))$ 中,则由 (3.3) 知

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2(\xi_j) \leqslant 2n\frac{\beta}{\alpha}\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t),$$

故

$$|R_2(t;\ x_1,\ \cdots,\ x_n)| \leqslant \frac{A}{2}\tau Q\left\{2n^2 + 2n\cdot\frac{\beta}{\alpha}\cdot 2n^2\cdot n\right\}$$

$$\times \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) = A\tau Q n^2\left[1 + 2n^2\frac{\beta}{\alpha}\right]\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t).$$

故当我们取

$$\tau \leqslant \frac{1}{2}\Delta_1(t)\cdots\Delta_n(t)\cdot\frac{1}{AQn^2\left(1 + 2n^2\dfrac{\beta}{\alpha}\right)},$$

$$\varepsilon \leqslant \min_{t_0\leqslant t<+\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_1(t)\cdots\Delta_n(t)}{D(t)Q_1(t) + |c(t)|P_1(t)},\cdots,\right.$$

$$\left.\frac{\Delta_1(t)\cdots\Delta_n(t)}{D(t)Q_n(t) + |c(t)|P_n(t)}\right],$$

我们有

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(3.2)} \leqslant -2\Delta_1\cdots\Delta_n\sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

$$+ \varepsilon[(D(t)Q_1(t) + |c(t)|P_1(t))x_1^2$$

$$+ \cdots + (D(t)Q_n(t) + |c(t)|P_n(t))x_n^2]$$

$$+ \tau AQn^2\left(1 + 2n^2\frac{\beta}{\alpha}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)$$

$$\leqslant -\Delta_1\cdots\Delta_n \sum_{j=1}^{n} x_j^2.$$

由此得下面的定理(参考[27], 127—129页).

定理 3: 假定 $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$ 连续可微有界,即

$$|a_{ij}(t)| \leqslant \frac{A}{2},\ |b_{ij}(t)| \leqslant \frac{A}{2},\ A > 0$$

常数,且特征方程

$$|A_{ij}(t) - \delta_{ij}\lambda| = 0$$

之根都有

$$\operatorname{Re}(\lambda_i(t)) \leqslant -\delta < 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

对所有 t 都成立,则存在一个数

$$G_0 = \frac{1}{2}\Delta_1(t)\cdots\Delta_n(t)\frac{1}{AQn^2\left(1 + 2n^2\frac{\beta}{\alpha}\right)}$$

和一个数

$$\varepsilon \leqslant \min\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_1(t)\cdots\Delta_n(t)}{D(t)Q_1(t) + |c(t)|P_1(t)}, \cdots, \frac{\Delta_1(t)\cdots\Delta_n(t)}{D(t)Q_n(t) + |c(t)|P_n(t)}\right],$$

当

$$|\dot{a}_{ij}(t)| \leqslant \varepsilon,\ |\dot{b}_{ij}(t)| \leqslant \varepsilon$$

及 $0 \leqslant \tau \leqslant G_0$ 时,系统(3.2)的零解是渐近稳定的.

注: 如果时滞 τ 是时间 t 的连续函数,上述估值方法同样成立.

第七章　周期系数系统

§1. 前　　言

在物理和工程技术中，许多问题最终都能导致具有周期系数的线性微分方程组. 实际工作者在分析这些问题时，往往尽可能把这些问题化为大家所熟悉的希尔(Hill)方程或马蒂厄方程. 可是现代工程技术问题常常要求带有好几个自由度的系统. 例如弹性力系统的动力学稳定性，大功率发射的参数共振及质子加速器，天体力学中的数值问题以及激光物理等都是带有多个自由度的系统. 对这种系统所遇到之现象的定量描述，就不可能像希尔方程描述的具有一个自由度的系统那样简单. 而且原有的处理方法已显得不够了；再则，就是从庞加莱(H. Poincaré)和李雅普诺夫开始以来，为了研究用非线性微分方程描述的周期运动的稳定性，不少实际方法都是围绕研究带有周期系数的线性微分方程组而进行探索. 由于世界各国的常微分方程工作者的努力，在过去廿多年里，在这方面的系统的数学理论研究，已可看到一些有意义的进展(特别是哈密尔顿系统). 另一方面许多针对具体问题总结出来的实际方法，现在看来是很有成效的，它常常提供解式. 这些解从工程的观点来看是十分满意的. 对于过去许多认为难以下手的问题，现在多多少少都有了一些探索的途径. 这些方法的特点就是随着系统阶数的增高计算的困难在逐渐增大，但是在计算技术蓬勃发展的今天，大型高速亿万次电子计算机的出现，为克服这些困难而创造了有利的条件. 所有这些方法被认为是对具有多个自由度的问题是极其富有成效的，不少新的深入研究的成果对于像希尔方程同样适用. 而系统总结这个课题的研究成果，建议读者可参阅 V. A. 亚库鲍维奇(Yakubovich)与 V. M. 斯塔尔兹斯基

(Starzhinskii) 合著的"具有周期系数的线性微分方程"[28]一书。

§2. 周期系数的线性微分方程组

(一) 预备知识

考虑

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{2.1}$$

这里系数矩阵 $A(t+T) = A(t)$, $T > 0$ 即 $A(t)$ 是 $n \times n$ 周期矩阵，在研究 (2.1) 的同时，我们亦考虑相应于 (2.1) 的矩阵方程之初始值问题。

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)X, \\ X(0) = I \end{cases} \tag{2.2}$$

的解 $X(t)$，显见它是方程 (2.1) 的一个标准基本解方阵。矩阵方程

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X$$

的任一个解 $Y(t)$ 都可表成

$$Y(t) = X(t)M \quad (M \text{ 是任意常量矩阵}),$$

由于 $A(t)$ 的周期性，因此当 $X(t)$ 是 (2.2) 的一个解时，$X(t+T)$ 亦是 (2.2) 的一个解，即

$$\dot{X}(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)X(t+T),$$

即存在一个非奇异矩阵 C，使得

$$X(t+T) = X(t)C,$$

可是 $X(T) = X(0)C = IC = C$，故 $X(t+T) = X(t)X(T)$。

定义： $X(T)$ 是一个单值矩阵，它的特征值即方程

$$|X(T) - \rho I| = 0 \tag{2.3}$$

的根，被称为方程组 (2.1) 的乘数。所有这些乘数构成的一个集合就称为方程组 (2.1) 的谱。这样一来，单值矩阵 $X(t)$ 就是由初始条件 $X(0) = I$ (单位矩阵) 确定的矩阵方程 (2.2) 的一个标准基本解方阵在 $t = T$ 的值。方程 (2.3) 被称为方程组 (2.1) 的特征方程。

令 $\boldsymbol{\alpha}$ 是单值矩阵 $X(T)$ 相应于某一个乘数 ρ 的特征向量，即

$$X(T)\boldsymbol{\alpha}=\rho\boldsymbol{\alpha}. \tag{2.4}$$

考虑初值问题

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=A(t)\boldsymbol{x},\\ x(0)=\alpha\end{cases} \tag{2.5}$$

的一个解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ (注意，一般说来向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是复的，甚至当 $A(t)$ 是一个实矩阵时，因为这是从解代数方程 $X(T)\boldsymbol{\alpha}=\rho\boldsymbol{\alpha}$ 来定出向量$\boldsymbol{\alpha}$).

初值问题 (2.5) 的解 $x=\boldsymbol{x}(t)$ 可以用方程 (2.2) 的一个标准基本解方阵 $X(t)$ 来表示，

$$\boldsymbol{x}(t)=X(t)\boldsymbol{\alpha}.$$

利用 (2.2) 和 (2.4)，我们就有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t+T)&=X(t+T)\boldsymbol{\alpha}=X(t)X(T)\boldsymbol{\alpha}\\&=X(t)\rho\boldsymbol{\alpha}=\rho X(t)\boldsymbol{\alpha}=\rho\boldsymbol{x}(t),\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{x}(t+T)=\rho\boldsymbol{x}(t). \tag{2.6}$$

这样一来，对于每一个乘数 ρ，都有方程 (2.1) 的一个解 $x(t)$ 满足关系式 (2.6).

为了定出方程 (2.1) 的具有性质 (2.6) 的一个非零解 $\boldsymbol{x}(t)\not\equiv 0$，这里 ρ 是某一个数，我们能够导出特征方程 (2.3).

事实上，向量函数 $\boldsymbol{x}(t+T)$ 和 $\rho\boldsymbol{x}(t)$ 都满足 (2.1)，如果它们在 $t=0$ 时的始值一样，

$$\boldsymbol{x}(T)=\rho\boldsymbol{x}(0), \tag{2.7}$$

那末从解的唯一性来考虑，等式 (2.6) 一定成立. 所以这样一来，只要找到一个满足条件 (2.7) 的解就够了.

因为 $\boldsymbol{x}(T)=X(T)\boldsymbol{x}(0)$，从等式 (2.7) 即得

$$X(T)\boldsymbol{x}(0)-\rho Ix(0)=0,$$

$$(X(T)-\rho I)x(0)=0.$$

则 ρ 是特征方程的一个根，也就是一个乘数，且 $\boldsymbol{x}(0)$ 就是单值矩阵 $X(T)$ 的一个特征向量.

（二）佛洛盖（Floquet）-李雅普诺夫定理

令K表示$n\times n$常量矩阵

$$K=\frac{1}{T}\ln X(T),$$

其中$Y=\ln X(T)$是矩阵方程$e^Y=X(T)$的解之一. 如果矩阵$A(t)$是实的，那末$X(T)$也是一个实矩阵，但矩阵K一般说来是复的.

令$F(t)$表示矩阵函数

$$F(t)=X(t)e^{-tK}. \tag{2.8}$$

由于

$$\begin{aligned}F(t+T)&=X(t+T)e^{-(t+T)K}=X(t+T)e^{-tK}e^{-TK}\\&=X(t)X(T)e^{-TK}e^{-tK}\\&=X(t)X(T)X^{-1}(T)e^{-tK}=F(t),\end{aligned}$$

这样一来,就可把方程(2.1)的一个标准基本解方阵$X(t)$表成

$$X(t)=F(t)e^{tK}.$$

这里$F(t)$是一个周期为T的$n\times n$周期矩阵,此外从(2.8)立即看出$F(t)$是非奇异的. 因为

$$e^{-tK}=I-tK+\frac{t^2}{2!}K^2+\cdots,$$

则

$$[\det e^{-tK}]_{t=0}=1,\ \det X(t)\neq 0,\ \det F(t)\neq 0,$$

且$F(t)$是连续的和具有一个可积、逐段连续的导数；

$$F(0)=X(0)e^{-tK}|_{t=0}=X(0)=I.$$

反之,任何形如

$$X(t)=F(t)e^{tK} \tag{2.9}$$

的矩阵（其中$F(t)$是周期的、非奇异的、连续的，且有一个可积的逐段连续的导数，K是$n\times n$常量矩阵),则它就是某一个具有周期系数$A(t)$的方程(2.1)

$$\dot{x}=A(t)x\quad (A(t+T)=A(t))$$

的一个标准基本解方阵。

事实上，由 (2.9) 我们有

$$X(t)=F(t)e^{tK},$$

$$X(t+T)=F(t+T)e^{(t+T)K}=F(t)e^{tK}e^{TK}$$
$$=X(t)e^{TK}=X(t)X(T).$$

这就说明 $X(t)$ 是方程 (2.1) 的一个标准的基本解方阵。它恒等地满足矩阵方程

$$\dot{X}(t)=A(t)X(t),$$

$$\dot{X}(t+T)=A(t+T)X(t+T)\Rightarrow\dot{X}(t)$$
$$=A(t+T)X(t)\Rightarrow A(t+T)=A(t).$$

综合上面所述，我们可以证明下列定理：

佛洛盖-李雅普诺夫定理：一个具有周期系数 (周期为 T) 的微分方程组

$$\dot{x}=A(t)x$$

的标准基本解组方阵 $X(t)$ 可表成

$$X(t)=F(t)e^{tK}.$$

这里 $F(t)$ 是一个周期为 T 的 $n\times n$ 函数方阵，它对所有 t 是非奇异的、连续的，且有一个可积、逐段连续的导数，且 $F(0)=I$ 和 K 是一个 $n\times n$ 常量矩阵。

反之，若 $F(t)$ 是一个具有上述性质的矩阵，K 是一个 $n\times n$ 常量方阵，那末由下式定义的方阵 $X(t)$

$$X(t)=F(t)e^{tK},$$

就是某一个具有周期系数的微分方程组

$$\dot{x}=A(t)x$$

的一个标准基本解方阵。

上述佛洛盖-李雅普诺夫定理是针对标准基本解组方阵而言的，而对于非标准基本组方阵 (即 $X_1(0)=C\neq I$)，上述定理的结论同样成立。

事实上，

$$\begin{cases}\dot{X}=A(t)X,\\ X_1(0)=C\neq I,\ \det C\neq 0,\ I\text{ 是单位方阵,}\end{cases}$$

由于

$$X_1(t) = X(t)C = F(t)e^{tK}C = F(t)CC^{-1}e^{tK}C$$
$$= F(t)Ce^{t(C^{-1}KC)},$$

得

$$X_1(t) = F_1(t)e^{tK_1}. \tag{2.10}$$

这里

$$F_1(t) = F(t)C, \quad K_1 = C^{-1}KC.$$

显见

$$F_1(t) = F_1(t+T) \quad (F(t+T) = F(t)).$$

反之,如果 $X_1(t)$ 可以表示成 (2.10),那末

$$X(t) = X_1(t)C^{-1} = F_1(t)e^{tK_1}C^{-1}$$
$$= F_1(t)C^{-1}e^{t(CK_1C^{-1})} = F(t)e^{tK}.$$

这里 $F(t) = F_1(t)C^{-1}$, $K = CK_1C^{-1}$ 及 $F(0) = CC^{-1} = I$. 这样一来,矩阵 $X(t)$ 可以表示成 (2.9) 形式,因此方程

$$\dot{x} = A(t)x$$

是一个具有周期系数的系统,从而有下列佛洛盖-李雅普诺夫定理的推论成立:

推论: 具有周期为 T 的周期系数方程

$$\dot{x} = A(t)x$$

的任一基本解方阵 $X_1(t)$ 可以表示成

$$X_1(t) = F_1(t)e^{tK_1}.$$

这里 $F_1(t)$ 是一个非奇异的、连续的、周期为 T 的 $n\times n$ 方阵函数,它的导数是一个可积、逐段连续的函数. K_1 是一个常量矩阵.

反之, 具有形如 (2.10) 的任何一个方阵 $X_1(t)$ ($X_1(t) = F_1(t)e^{tK_1}$, 其中 $F_1(t)$ 与 K_1 具有上面的性质)都是某一个具有周期系数的方程

$$\dot{x} = A(t)x \quad (A(t+T) = A(t))$$

的非标准的基本解组方阵.

§ 3. 实系数的情形

如果方程

$$\dot{x} = A(t)x \tag{3.1}$$

中系数方阵 $A(t)$ 对所有 $t \geqslant 0$ 是实的，那末 (3.1) 的标准基本解组方阵 $X(t)$ 对所有 $t \geqslant 0$ 也是实的。此外，如果特征方程

$$|X(T) - \rho I| = 0$$

没有一个根是负实数，我们可以假定

$$X(t) = F(t)e^{tK}$$

中的方阵 $F(t)$ 和 K 也是实的。

实际上在这个情况下，我们可以定义

$$K = T^{-1}\ln X(T),$$

那末 K 就是实的。 这样一来 $F(t) = X(t)e^{-tK}$ 也将是一个实方阵。在一般实周期系数的情况下，我们有下列命题：

方阵 $X(t)$ 可以表示成

$$X(t) = F_0(t)e^{tK_0}. \tag{3.2}$$

这里 K_0 是一个实常数方阵，$F_0(t)$ 是一个实方阵函数，使得

$$F_0(t+T) = F_0(t)R, \tag{3.3}$$

且 R 是某一个实方阵，使得

$$R^2 = I,\ K_0R = RK_0. \tag{3.4}$$

特别是

$$F_0(t+2T) = F_0(t)\quad (0 \leqslant t \leqslant 2T),$$

函数 $F_0(t)$ 有一个可积的逐段连续的导数。

反之，若 $F_0(t)$, K_0 及 R 满足条件

$$F_0(t+T) = F_0(t)R,$$

$R^2 = I$, $K_0R = RK_0$, $\det F_0(t) \neq 0$ 的任意实方阵，且 $F_0(t)$ 有一个可积的逐段连续的导数，那末 $X(t) = F_0(t)e^{tK_0}$ 就是某一个具有实周期系数方阵 $A(t)$ 的方程

$$\dot{x} = A(t)x$$

的基本解组方阵.

在证明这个命题之前，我们首先把有关实矩阵的对数的定义及其几个辅助引理介绍一下,详细证明可参阅[1].

考虑一个实矩阵 Z,我们规定

$$K = \ln Z = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{q}\int_{r_j}(\zeta I - Z)^{-1}(\ln\zeta)_{m_j}d\zeta,$$

$$e^K = Z \qquad (m_j\ \text{表对数的分枝数}).$$

引理 I: 令 X 是一个非奇异实的 $n\times n$ 矩阵,则存在一个实的 $n\times n$ 矩阵 K 使得

$$e^{2K} = X^2.$$

引理 II: 令 X 是一个实的非奇异矩阵，则存在实矩阵 K 与 R 使得

$$e^K = XR = RX,\ RK = KR,\ R^2 = I.$$

引理 III: 如果 X 是一个没有负特征根的实的非奇异矩阵，则存在一个实矩阵 $K = \ln X$, 使得

$$e^K = X.$$

推论: 如果 X 是一个非奇异实矩阵,而且它没有实的、正的特征值,则存在一个实矩阵

$$K = \ln(-X),$$

使得

$$e^K = -X.$$

往下我们就转入上述命题的证明.

由引理 II 知, 对于一个实的、非奇异单值矩阵 $X(T)$, 都存在实常数矩阵 K_0 和 R, 使得

$$K_0R = RK_0,\ R^2 = I\ \text{及}\ e^{TK_0} = X(T)R = RX(T).$$

故 $R = R^{-1}$, 由此推出

$$R = X(T)e^{-TK_0}. \tag{3.5}$$

由 $K_0R = RK_0$ 知对任何 t, 有

$$Re^{-tK_0} = e^{-tK_0}R. \tag{3.6}$$

我们现在就按下列方式来定义一个矩阵函数 $F_0(t)$, 即

$$F_0(t) = X(t)e^{-tK_0}.$$

根据标准基本解组方阵的特性和条件 (3.5) (3.6)，我们就得到

$$\begin{aligned} F_0(t+T) &= X(t+T)e^{-(t+T)K_0} \\ &= X(t)X(T)e^{-(t+T)K_0} = X(t)X(T)e^{-TK_0}e^{-tK_0} \\ &= X(t)Re^{-tK_0} = X(t)e^{-tK_0}R \\ &= F_0(t)R \end{aligned}$$

这样一来，关系式 (3.3) 成立. 显见 $\det F_0(t) \neq 0$，且 $\frac{dF_0(t)}{dt}$ 具有所要求的性质 ($X(t)$ 亦如此).

现在反过来讨论，令 $X(t)$ 按下式来定义

$$X(t) = F_0(t)e^{tK_0},$$

显见，$X(t)$ 是某一个具有实的、逐段连续和可积的系数矩阵 $A(t)$ 的方程

$$\dot{x} = A(t)x$$

的一个基本解组矩阵.

为了证明，$A(t+T) = A(t)$，只要证明标准基本解组矩阵 $X(t)X^{-1}(0)$ 满足关系式

$$X(t+T) = X(t)X^{-1}(0)X(T)$$

即可.

事实上利用

$F_0(t+T) = F_0(t)R$，$R^2 = I$，$K_0R = RK_0$，我们有

$$\begin{aligned} X(t+T)X^{-1}(T) &= F_0(t+T)e^{(t+T)K_0}X^{-1}(T) \\ &= F_0(t)Re^{tK_0}e^{TK_0}X^{-1}(T) \\ &= F_0(t)e^{tK_0}Re^{TK_0}X^{-1}(T) \\ &= X(t)RF_0^{-1}(T) \\ &= X(t)F_0^{-1}(0) = X(t)X^{-1}(0). \end{aligned}$$

§4. 周期系数系统的可约性

考虑

$$\dot{x} = A(t)x \quad (A(t+T) = A(t)). \tag{4.1}$$

假定初值为 $X_1(0)=C$ 的 (4.1) 的一个非标准基本解组矩阵 $X_1(t)$ 可表成

$$X_1(t) = F_1(t)e^{tK_1},$$

因此

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = \frac{dF_1(t)}{dt}e^{tK_1} + F_1(t)K_1e^{tK_1}$$
$$= A(t)X_1(t) = A(t)F_1(t)e^{tK_1},$$

则

$$\frac{dF_1}{dt} = A(t)F_1 - F_1(t)K_1. \tag{4.2}$$

现在来阐明 (4.1) 的求解等价于下列问题求解：即寻求一个 $n\times n$ 常量矩阵 K_1，使得矩阵方程 (4.2) 有一个周期为 T 的矩阵解 $F_1(t)$，它的行列式即 $\det F_1(t) \neq 0$.

事实上，假定我们已找到一个具有这些性质的解 $F_1(t)$，一个直接检验的方法就是证明矩阵

$$X_1(t) = F_1(t)e^{tK_1} \tag{4.3}$$

满足矩阵方程

$$\dot{X} = A(t)X. \tag{4.4}$$

再由 $\det X_1(t) \neq 0$，即知 $X_1(t)$ 是方程 (4.1) 的一个基本解组矩阵.

也可由 (4.3) 导得

$$\det F_1(t) = \det[X_1(t)e^{-tK_1}]$$
$$= \det(C\exp\int_0^t \mathrm{Tr}A(t_1)dt_1)\exp(-t\mathrm{Tr}K_1).$$

因为 $X_1(t) = X(t)C$，得

$$\det X_1(t) = \det X(t)\cdot C = \det C\cdot X(t)$$
$$= \det C\cdot\exp\int_0^T \mathrm{Tr}A(t_1)dt_1,$$

$$\det e^{tA} = e^{t\mathrm{Tr}A}. \tag{4.5}$$

因此为了证明

$$\det F_1(t) \neq 0, \tag{4.6}$$

我们只要证明

$$\det F_1(t_0) \neq 0 \tag{4.7}$$

就可，这里 t_0 是一个任意固定的数。

佛洛盖-李雅普诺夫定理的另一种解释，就是所谓的李雅普诺夫的可约性定理。

给定一个具有周期系数（周期为 T）的系统 (4.1)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x},$$

则存在一个连续、非奇异(对所有 t)、周期为 T 的矩阵函数 $F_1(t)$，此函数有一个可积的、逐段连续的导数，使得代换

$$\boldsymbol{x} = F_1(t)\boldsymbol{y}, \tag{4.8}$$

把方程 (4.1) 变成形式

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = K_1\boldsymbol{y}. \tag{4.9}$$

反之，如果 $F_1(t)$ 是一个任意连续非奇异（对所有 t)、周期为 T 的矩阵函数，使得代换 (4.8) 把方程 (4.1) 化成 (4.9)，那末方程 (4.1) 表示了一个周期为 T 的周期系数方程，且

$$X_1(t) = F_1(t)e^{tK_1}$$

是 (4.1) 的一个基本解矩阵。

证：对方程 (4.1) 应用代换 (4.8) 就得

$$\boldsymbol{x} = F_1(t)\boldsymbol{y} = X_1(t)e^{-tK_1}\boldsymbol{y},$$

则

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{F}_1(t)\boldsymbol{y} + F_1(t)\dot{\boldsymbol{y}} = A(t)F_1(t)\boldsymbol{y}.$$

可是 $\dot{F}_1(t) = A(t)F_1(t) - F_1(t)K_1$ 把它代入上式，注意 $F_1(t)$ 是非奇异的，这样我们就导出了 $\boldsymbol{y}(t)$ 所满足的具有常系数的向量方程

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = K_1\boldsymbol{y}.$$

反之，假定我们有一个代换

$$\boldsymbol{x} = F_1(t)\boldsymbol{y}.$$

这里 $F_1(t)$ 具有上述的性质，它把周期系数方程 (4.1) 化成常系数方程 (4.9)，那末，如果 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{y}(t)$ 分别是方程 (4.1) 和 (4.9) 的解，我们就有

$$\boldsymbol{x}(t) = F_1(t)\boldsymbol{y}(t). \tag{4.10}$$

在这个关系式中，我们把 (4.9) 的一个标准基本解组矩阵

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_{11}, & y_{12}, & \cdots, & y_{1n} \\ y_{21}, & y_{22}, & \cdots, & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1}, & y_{n2}, & \cdots, & y_{nn} \end{pmatrix} = e^{tK_1}$$

的每一列（它是 (4.9) 的一个解）

$$y_\nu(t) = \begin{pmatrix} y_{1\nu} \\ y_{2\nu} \\ \vdots \\ y_{n\nu} \end{pmatrix} (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

代入 (4.10)，就得 (4.1) 的 n 个独立的向量解

$$x_\nu(t) = F_1(t)y_\nu(t) \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n).$$

因此这 n 个矢量解组合在一起就得

$$X_1(t) = F_1(t)Y(t) = F_1(t)e^{tK_1}.$$

因为

$$\det X_1(t) = \det F_1(t)\det e^{tK_1} = \det F_1(t) \cdot e^{t\mathrm{Tr}K_1} \neq 0,$$

故 $X_1(t)$ 是 (4.1) 的一个基本解组矩阵.

这样一来，由代换 (4.8) 的存在性就可推出方程 (4.1) 的一个基本解组矩阵 $X_1(t)$，可表成如下形式

$$X_1(t) = F_1(t)e^{tK_1}.$$

这就证明了佛洛盖-李雅普诺夫定理的结论.

注意，在前面论证过程中的矩阵 K，$F(t)$，K_1，$F_1(t)$ 一般说来是复的，甚至即使当矩阵 $A(t)$ 是实的，方程的一个标准基本解组矩阵 $X(t)$ 也是实的话.

再则，如果 $A(t)$ 是实的，则存在一个代换

$$\boldsymbol{x} = F_0(t)\boldsymbol{y},$$

把方程 (4.1) 化成 (4.9). 其中代换系数矩阵 $F_0(t)$ 和常系数方程 (4.9) 的系数矩阵 K_1 应满足如下的关系式:

$$F_0(t+T)=F_0(t)R,\ R^2=I,\ K_1R=RK_1.$$

§5. 特征指数和一般稳定性结论

很明显从关系式

$$X(t)=F(t)e^{tK} \tag{5.1}$$

(其中 $F(t)$ 是一个 $n\times n$ 非奇异、连续的矩阵函数, 且它有一个可积、逐段连续的导数)立即看出,

$$\dot{x}=A(t)x$$

的零解稳定性或不稳定性, 也就是说当 $t\to+\infty$ 时方程的所有解的有界性和无界性, 方程所有解的增长或衰减速率完全依赖于矩阵 K.

实际上,常常只要把矩阵 K 或它的特征值求出来,问题就能够解决.

定义: 把矩阵 K 的特征方程

$$|K-\alpha I|=0$$

的根 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 称为方程 (4.1) 的特征指数.

实际上,为了方便起见, 常常从一个任意基本解组矩阵 $X_1(t)$ 出发,考虑用相似于矩阵 K 的一个相似矩阵 K_1 来代替 K, 即

$$K_1=C^{-1}KC.$$

此时 K_1 与 K 有相同的特征值.

此时从 (5.1) 看出,每一个特征指数 α_s 都对应于方程 (4.1)

$$\dot{x}=A(t)x$$

的一个形如下式的解

$$x(t)=e^{\alpha t}f(t). \tag{5.2}$$

其中 $f(t+T)=f(t)$.

事实上,令 $Ka=\alpha a$, 那末从关系式

$$x(t)=X(t)x(0)\ \text{和}\ X(t)=F(t)e^{tK}$$

看出，方程 (4.1) 满足初始条件 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{a}$ 的解是

$$\boldsymbol{x}(t)=F(t)e^{tK}\boldsymbol{a}=F(t)e^{\alpha t}\boldsymbol{a}=e^{\alpha t}\boldsymbol{f}(t).$$

这里 $\boldsymbol{f}(t)=F(t)\boldsymbol{a}$.

反之，如果对方程 (4.1) 我们有一个形如 (5.2) 的解

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{\alpha t}\boldsymbol{f}(t)\quad(\boldsymbol{f}(t+T)=\boldsymbol{f}(t)),$$

那末 α 就是一个特征指数.

事实上，从 (5.2) 导出

$$\boldsymbol{x}(T)=e^{\alpha T}\boldsymbol{f}(T)=e^{\alpha T}\boldsymbol{f}(0)=e^{\alpha T}\boldsymbol{x}(0),$$

则数 $\rho=e^{\alpha T}$ 是方程 (4.1) 的一个乘数，ρ 是矩阵 $X(T)$ 的一个特征值 $\alpha=\frac{1}{T}\ln\rho$，这就说明了 α 的确是一个特征指数.

这样一来，特征指数 α_ν 可以根据 $X(T)$ 的特征值 ρ_ν 来表示:

$$\alpha_\nu=\frac{1}{T}\ln\rho_\nu\quad(\nu=1,2,\cdots,n).\tag{5.3}$$

这里对数分枝是任意的. 因此特征指数在 (5.3) 的右端再附加一项 $2\pi i\frac{m}{T}$，就被唯一决定，其中 m 是一个整数.

§6. 周期系统的解之结构

让我们假定矩阵 K 的特征指数 α_ν 是不同的，且令 $\boldsymbol{a}_\nu$ 是对应的特征向量. 正如我们前面刚刚证明过的方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A(t)\boldsymbol{x},\tag{6.1}$$

存在形如

$$\boldsymbol{x}_\nu(t)=e^{\alpha_\nu t}\boldsymbol{f}_\nu(t)\quad(\boldsymbol{f}_\nu(t+T)=\boldsymbol{f}_\nu(t))\tag{6.2}$$

的 n 个向量解.

这里 $\boldsymbol{f}_\nu(t)=F(t)\boldsymbol{a}_\nu$，因为 $F(0)=I$，且向量 $\boldsymbol{a}_\nu(\nu=1,2,\cdots,n)$ 是线性独立，向量 $\boldsymbol{x}_\nu(0)=F(0)\boldsymbol{a}_\nu=\boldsymbol{a}_\nu(\nu=1,2,\cdots,n)$ 是线性独立的. 因此形如 (6.2) 的 n 个向量解

$$x_1(t), \cdots, x_n(t)$$

就构成了方程 (6.1) 的一个基本解组.

我们现在考虑一般情形. 针对方程 (6.1) 作代换

$$x = F_1(t)y, \tag{6.3}$$

就得到方程

$$\frac{dy}{dt} = K_1 y \tag{6.4}$$

的一个基本解组,我们用

$$\{y_h^{(\sigma)}\} \quad \sigma = 1, 2, \cdots, s, \quad h = 1, \cdots, m_\sigma, \quad m_1 + \cdots + m_s = n$$

来表示.

令 λ_σ 是特征方程 $|K_1 - \lambda I| = 0$ 的特征根. 如果它对应的初等因子是 $(\lambda - \lambda_\sigma)^{m_\sigma}$, 那末它就对应于方程 (6.4) 的一组 m_σ 个线性独立的解,

$$y_1^{(\sigma)} = e^{\lambda_\sigma t} a_1^{(\sigma)},$$

$$y_2^{(\sigma)} = e^{\lambda_\sigma t}(a_1^{(\sigma)} t + a_2^{(\sigma)}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{m_\sigma}^{(\sigma)} = e^{\lambda_\sigma t}\left(\frac{1}{(m_\sigma - 1)!} t^{m_\sigma - 1} a_1^{(\sigma)} + \cdots + a_{m_\sigma}^{(\sigma)}\right).$$

因为 $\det F_1(t) \neq 0$, 向量

$$x_h^{(\sigma)} = F_1(t)\, y_h^{(\sigma)} \begin{pmatrix} \sigma = 1, 2, \cdots, s, \\ h = 1, \cdots, m_\sigma, \end{pmatrix} m_1 + \cdots + m_s = n.)$$

就构成了方程 (6.1) 的一个基本解组.

在这里我们记

$$f_h^{(\sigma)}(t) = F(t)\, a_h^{(\sigma)},$$

得到下列命题:

方程 (6.1) 有一个基本解组集, 这个解组集被分成 s 组, 每一组有如下形式

$$
\begin{cases}
x_1^{(\sigma)} = e^{\alpha_\sigma t} f_1^{(\sigma)}(t), \\
x_2^{(\sigma)} = e^{\alpha_\sigma t}[t f_1^{(\sigma)}(t) + f_2^{(\sigma)}(t)], \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{m_\sigma}^{(\sigma)} = e^{\alpha_\sigma t}\left[\dfrac{1}{(m_\sigma-1)!} t^{m_\sigma-1} f_1^{(\sigma)}(t) + \cdots + f_{m_\sigma}^{(\sigma)}(t)\right] \\
\qquad (\sigma = 1, 2, \cdots s; m_1 + \cdots + m_s = n).
\end{cases}
\tag{6.5}
$$

这里 $f_k^{(\sigma)}(t)$ 是周期为 T 的、具有逐段连续的可积的导数的周期向量函数，每一组解都对应于矩阵 K 的一个初等因子 $(\lambda - \alpha_\sigma)^{m_\sigma}$.

注意：每一个特征指数可以对应于几组解，这主要看特征指数的初等因子来定．但是属于一个特征指数的解的总数是等于该特征指数的重数．例如特征指数 $\lambda = \alpha_\sigma$ 是特征方程

$$|K - \lambda I| = 0$$

的 m_σ 重根，那末对应于此特征指数的方程之解的总数就等于 m_σ. 特别当根 $\lambda = \alpha_1$ 是单根时，它就确定了方程的一组解．在这组解中只包含一个解

$$x_1(t) = e^{\alpha_1 t} f_1(t) \quad (f_1(t + T) = f_1(t)).$$

在特征指数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 不同的情况下（或者它们中某几个是相重的，但是所对应的初等因子是简单的），我们仍旧得到形如 (6.5) 的一个基本解组．

§7. 解依赖于特征指数及其乘数的性质

根据李雅普诺夫稳定性的一般定义，系统

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{7.1}$$

的平凡解是稳定的，当且仅当 (7.1) 的所有解当 $t \to +\infty$ 时是有界的；要使 (7.1) 的平凡解是渐近稳定的，如果 (7.1) 的所有解当 $t \to +\infty$ 时都趋于零的话．

由于 (7.1) 的任意一个解 $x(t)$ 可表示成

$$x(t) = X(t)x(0), \tag{7.2}$$

而 $X(t)$ 是 (7.1) 的一个标准基本解组矩阵，它可以表示成

$$X(t)=F(t)e^{tK}. \tag{7.3}$$

(i) 如果当 $t\to+\infty$ 矩阵 e^{tK} 是有界的，则 (7.1) 的平凡解是稳定；

(ii) 如果当 $t\to+\infty$ 时，矩阵 $e^{tK}\to 0$，则 (7.1) 的平凡解是渐近稳定的.

这样一来，方程组 (7.1) 的平凡解是稳定的，当且仅当它的特征指数有非正的实部；或特征指数是纯虚数，对应的初等因子是简单的；或特征指数是零，对应的初等因子是简单的.

否则，当特征指数中至少有一个的实部是正的；或特征指数中有一个重的纯虚根，对应的初等因子也是重的；或特征指数中有一个零特征指数，对应的初等因子也是重的，则 (7.1) 的平凡解是不稳定的.

方程组 (7.1) 的平凡解是渐近稳定，当且仅当方程的特征指数都具有负实部.

此外由于方程的特征指数 α_ν (即 $|K-\lambda I|=0$ 的根) 和方程的乘数 ρ_ν (即 $|X(T)-\rho I|=0$ 的根) 之间存在着一定的制约关系

$$\rho_\nu=e^{\alpha_\nu T}\ (\nu=1,2,\cdots,n),$$

因此我们亦可以用乘数 ρ_ν 来刻画解的各种稳定性质. 下面我们就给出表格，根据特征指数和乘数的性质来确定解的性质. 从下表看出，要检验周期系统 (7.1) 的平凡解的稳定性、只要有矩阵 K 或矩阵 $X(T)$，或甚至只要知道它们的特征值性质即可.

用逐次逼近法总能定出单值矩阵 $X(T)$，其算出的精确度同系数矩阵 $A(t)$ 算出的精确度一样.

在应用时，常常发生方程组 (7.1) 的系数依赖于某一个参数，因此矩阵 K 和 $X(T)$ 也就依赖于某一个参数. 这些参数将支配着方程解的性质. 适当选取它们的值，就可以保证方程的所有解当 $t\to+\infty$ 时，是有界的；或当 $t\to+\infty$ 时，它们是无界的 (不稳定的平凡解)；或对某一参数 μ 而言，这些解满足估值 $\|x(t)\|\leqslant ce^{\mu t}$

$(0 \leqslant t < +\infty)$ 等等.

解的性质	特征指数α即 $\lvert K-\lambda I\rvert=0$ 根	乘数ρ即方程 $\lvert X(T)-\rho I\rvert=0$ 根
(1) 平凡解稳定 所有解有界 $0\leqslant t<+\infty$	(1) 有非正的实部; (2) 特征指数为零或纯虚根,但对应简单的初等因子	(1) 在单位圆内或单位圆上; (2) 在单位圆上,对应简单的初等因子
(2) 渐近稳定性	负实部	单位圆内
(3) 平凡解的不稳定性	(i) 至少有一特征指数具有正实部; (ii) 或有一对纯虚根,具有重初等因子	至少有一个乘数ρ或在单位圆外;或在单位圆上;在单位圆上的乘数它对应于重初等因子
(4) T-周期解的存在性	至少有一个特征指数 α_v $\alpha_v T=2m\pi i$ (m是一个整数)	至少有一个乘数 $\rho=1$
(5) 非T周期解的存在性 $x(t+T)=-x(t)$	至少有一个特征指数 α_v $\alpha_v T=(2m+1)\pi i$ (m是一个整数)	至少有一个乘数 $\rho=-1$

例: 考虑系数依赖于参数ε的周期线性系统

$$\dot{x}=[C+\varepsilon B(t)]x, \tag{7.4}$$

这里 $B(t)$是一个 $n\times n$、周期为T的连续的周期矩阵函数;除此而外,还假定

$$|C-\lambda I|=0$$

的所有根都具有负实部. 我们的目的就是要定出参数ε的变化范围,从而保证(7.4)的平凡解是渐近稳定的. 这个问题是 Н. Г. 切达耶夫 (Четаев) 在 1955 年首先提出. 为了解决这个问题,我们首先考虑 $\varepsilon=0$ 的情形,即方程(7.4)现在变为常系数系统

$$\dot{x}=Cx. \tag{7.5}$$

由于 $|C-\lambda I|=0$ 的所有根都具有负实部,根据第二篇第四章§2定理知给定一个正定的二次型

$$W(x) = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

必存在一个正定的对称的二次型

$$V = x'Hx = \sum_{s,\sigma=1}^{n} h_{s\sigma}x_s x_\sigma. \text{ 其中 } H' = H \text{ 即 } h_{s\sigma} = h_{\sigma s},$$

使得沿 (7.5) 的相轨线关于 t 的全导数

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.5)} = \dot{x}'Hx + x'H\dot{x} = (Cx)'Hx + x'HCx$$

$$= x'(C'H + HC)x = -W(x) = -\|x\|^2.$$

现在就取 V 作为研究 (7.4) 的李雅普诺夫函数，那末把 V 沿着 (7.4) 的积分曲线求关于 t 的全导数,得

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.4)} = \dot{x}'Hx + x'H\dot{x}$$

$$= \{[C + \varepsilon B(t)]x\}'Hx + x'H[C + \varepsilon B(t)]x$$

$$= x'\{[C' + \varepsilon B'(t)]H + H[C + \varepsilon B(t)]\}x$$

$$= x'\{[HC + C'H] + \varepsilon(HB(t) + B'(t)H)\}x$$

$$= -\|x\|^2 + x'\varepsilon(HB(t) + B'(t)H)x$$

$$= x'[-I + \varepsilon(HB(t) + B'(t)H)]x.$$

因此要使矩阵

$$I + \varepsilon(-HB(t) - B'(t)H) = \Delta(t, \varepsilon), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

是正定的充分而必要的条件，就是矩阵 $\Delta(t, \varepsilon)$ 的所有主子行列式都大于零．即

$$\Delta_{jj}(t, \varepsilon) > 0, \ 0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 (j = 1, 2, \cdots, n),$$

但是当 $\varepsilon = 0$ 时,显见我们有

$$\Delta_{jj}(t, 0) = 1 > 0.$$

因此只要把 ε 取得足够小，使得所有主子行列式在 $0 \leqslant t \leqslant T$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ 时，$\Delta_{jj}(t, \varepsilon) > 0$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$．这一点完全办得到 (注意 $\Delta_{jj}(t, \varepsilon)$ 是 t 和 ε 的连续函数)． 因此当取 $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ 时,就有矩阵 $\Delta(t, \varepsilon)$ 在 $0 \leqslant t \leqslant T$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ 上是正定的.

再由 $\Delta(t, \varepsilon)$ 的连续性知,存在一个 $\delta > 0$, 使得矩阵

$$\Delta(t, \varepsilon) - \delta I$$

的所有主子式在 $0 \leqslant t \leqslant T$，$|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ 上是大于零的，这就意味着

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.4)} = -x'\Delta(t, \varepsilon)x \leqslant -\delta x'x = -\delta \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

根据第一篇第一章 § 3定理知，(7.4) 的平凡解当 $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ 时是渐近稳定。再则由于系统 (7.4) 的线性性，所以这种稳定性也是全局性的。

注意系统中参数值 ε_0 的确定是由保证 $\Delta(t, \varepsilon)$ 正定性的西尔威斯特 (Sylvester) 定理之条件来决定的。即由保证当 $0 \leqslant t \leqslant T$，$|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ 时，$\Delta_{jj}(t, \varepsilon) > 0$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 成立来确切定出 ε_0 之值。

第三篇　非线性系统

第八章　非线性系统李雅普诺夫函数的作法

§1. 对非线性系统而言，李雅普诺夫函数作法的一般评论

上面已经指出，对自治的线性系统而言，作李雅普诺夫函数的方法早就由 A. M. 李雅普诺夫本人指出. 在平衡位置的足够小的邻域内，这个方法也给出了得到非线性系统李雅普诺夫函数的可能性. 困难得多的问题是在相空间的给定区域内，对非线性系统的李雅普诺夫函数的作法问题. 很多数学家和力学家在这方面做了大量的工作. 但是他们仅针对特殊类型的非线性系统，作出了具体的李雅普诺夫函数，解决了一系列的具体的个别问题. 直到现在为止，对于任何一般非线性系统而言，怎样根据一些简单易行的规律、法则来作出李雅普诺夫函数，还是一个有待解决的问题. 因为很遗憾的是，对于非线性系统而言，作李雅普诺夫函数的任何一般方法都还没有.

对于特殊类型的非线性系统作李雅普诺夫函数，从下面的讨论可以看到，很多都是按照对于线性系统的李雅普诺夫函数类似地作出. 直到现在为止，这种简单的推理方法(首先被 A. И. 罗里叶及 И. Г. 马尔金所采用)曾在许多具体问题上被采用过，并且成为解决稳定性问题的最有成效的方法之一. 用这种方法所得出的李雅普诺夫函数的有价值之处，是在于从它们推导出的稳定性条件，是推广了的劳思-赫维茨条件. 这就是说，在线性的情况下，所得的条件变成充分必要条件.

我们指出，对于每个微分方程系统而言，任何正定函数 v 都可以作为李雅普诺夫函数. 事实上，当要求 v 对于 t 的由于给定的系统的导数 $\dot{v}$ 为负定时，总可以确定系统的零解为稳定性的某种条件. 但当不恰当地选择李雅普诺夫函数时，这个条件可以是矛盾的，即不可实现的. 或者所得到的稳定性的充分条件是很少有价值的. 譬如说，它是离开必要条件很远的. 有这样的看法，经验上认为是较好的李雅普诺夫函数应该满足下面的要求：在非线性情况下，借助于这个函数所得到的稳定性的充分条件，应该是在线性情况下的必要条件.

事实甚至是这样的，在线性情况下，不是每一个正定函数都给出稳定性的充分必要条件. 这就是说，当预先给定正定二次型 v 时，要求满足不等式 $\dot{v} \leqslant 0$，在一般情况，我们得不到劳思-赫维茨条件.

但是如果给定了负定型 w，则在渐近稳定的情况下，根据第二篇第四章定理 2.2，我们得到满足方程 $\dot{v} = w$ 的正定函数 v，这就是说，在这种情况下，函数 v 正定性的条件应该与劳思-赫维茨条件相一致.

作为例子，考虑

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

给定 $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，求正定矩阵 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$，注意到 $b_{12} = b_{21}$，根据

$$A'B + BA = C,$$

由

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

得

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21}, & a_{11}b_{12}+a_{21}b_{22} \\ a_{12}b_{11}+a_{22}b_{21}, & a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12}, & a_{12}b_{11}+a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22}, & a_{12}b_{21}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

注意到 B 的对称性，有

$$\begin{pmatrix} 2a_{11}b_{11}+2a_{21}b_{21}, & a_{12}b_{11}+(a_{11}+a_{22})b_{12}+a_{21}b_{22} \\ a_{12}b_{11}+(a_{11}+a_{22})b_{12}+a_{21}b_{22}, & 2a_{12}b_{12}+2a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a_{11}b_{11}+2a_{21}b_{11} = -1, \\ a_{12}b_{11}+(a_{11}+a_{22})b_{12}+a_{21}b_{22} = 0, \\ 2a_{12}b_{12}+2a_{22}b_{22} = -1. \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{21} \\ 0 & 2a_{12} & 2a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

根据克莱姆法则，只有当系数行列式不为零时，才能求得 b_{11}，b_{12}，b_{22} 的唯一解，即要求

$$\det\mathscr{F} = \begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{21} \\ 0 & 2a_{12} & 2a_{22} \end{vmatrix} = 4a_{11}a_{22}(a_{11}+a_{22})$$

$$-4a_{11}a_{12}a_{21}-4a_{12}a_{21}a_{22}$$

$$=4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})(a_{11}+a_{22}) \neq 0.$$

因为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}，\text{所以 } \mathrm{tr}A = a_{11}+a_{22},\ \det A = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

即要求 $\det\mathscr{F} = 4(\mathrm{tr}A)\cdot(\det A) \neq 0$.

由上面线性方程组，我们来解出 (b_{11}, b_{12}, b_{22})，

① 计算

$$\begin{vmatrix} -1 & 2a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}+a_{22} & a_{21} \\ -1 & 2a_{12} & 2a_{22} \end{vmatrix} = -2[(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})+a_{21}^2+a_{22}^2],$$

得

$$b_{11} = -\frac{(\det A + a_{21}^2 + a_{22}^2)}{2(\mathrm{tr}A)(\det A)}$$

② 计算

$$\begin{vmatrix} 2a_{11} & -1 & 0 \\ a_{12} & 0 & a_{21} \\ 0 & -1 & 2a_{22} \end{vmatrix} = 2a_{11}a_{21} + 2a_{22}a_{11},$$

得

$$b_{12} = \frac{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}}{2(\mathrm{tr}A)\cdot(\det A)}.$$

③ 计算

$$\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & -1 \\ a_{12} & a_{11}+a_{22} & 0 \\ 0 & 2a_{12} & -1 \end{vmatrix} = -2[\det A + a_{11}^2 + a_{12}^2],$$

得

$$b_{22} = -\frac{\det A + a_{11}^2 + a_{12}^2}{2(\mathrm{tr}A)(\det A)}.$$

最终我们得到对称的矩阵

$$B = \begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12} \\ b_{21}, & b_{22} \end{pmatrix} = \frac{-1}{2(\mathrm{tr}A)(\det A)}$$

$$\times \begin{pmatrix} \det A + a_{21}^2 + a_{22}^2, & -(a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}) \\ -(a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}), & \det A + a_{11}^2 + a_{12}^2 \end{pmatrix}.$$

要使矩阵 B 是正定的充分必要条件是 B 的所有主子行列式大于零,即

$$b_{11} = -\frac{\det A + a_{21}^2 + a_{22}^2}{2(\mathrm{tr}A)(\det A)} > 0,$$

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = \frac{1}{4(\mathrm{tr}A)^2(\det A)^2}[(\det A + a_{21}^2 + a_{22}^2)$$

$$\times (\det A + a_{11}^2 + a_{12}^2) - (a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22})^2]$$

$$= \frac{1}{4(\mathrm{tr}A)^2(\det A)^2}[(\det A)^2 + (a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2$$

$$+ a_{22}^2)\det A + (a_{21}^2 + a_{22}^2)(a_{11}^2 + a_{12}^2)$$

$$- (a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22})^2] = \frac{1}{4(\mathrm{tr}A)^2(\det A)^2}$$

$$\times [(\det A)^2 + (a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2)(\det A)$$

$$+ (\det A)^2] = \frac{1}{4(\mathrm{tr}A)^2\det A}$$

$$\times [(a_{11} + a_{22})^2 + (a_{12} - a_{21})^2] > 0.$$

这两个不等式成立，也就等价于下列二个不等式成立:

$$\det A > 0 \text{（它等价于要求 } b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0\text{），}$$

$$\mathrm{tr}A < 0.$$

这就是说，要使矩阵 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ 是正定的充分必要条件，就是满足

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0, \qquad (1.2)$$

$$\mathrm{tr}A = a_{11} + a_{22} < 0.$$

注意当满足这二个条件时，前面解线性方程组求 b_{11}, b_{12}, b_{21} 时，所要求的条件

$$\det \mathscr{F} = 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{11} + a_{22}) \neq 0$$

自然得到满足。

以上条件 (1.2) 正好与使系统 (1.1) 的特征方程的根具有负实部的劳思-赫维茨条件相一致。

以上说明了这样的事实，按照给定的导数来作出李雅普诺夫函数，从方法上讲是有其一定的优越性。

经验证明，最成功的李雅普诺夫函数可在那种情况下得到，即当它可以给出物理解释时，而当所研究的动力系统有作为典型的确定的物理模型时，这个函数是可以作出的。远在分析力学萌芽

时期，这个方法已被含糊地利用过[1]，对于保守系统而言，寻找总能量 H (H 等于这个系统的动能和位能之和)作为广义坐标的函数，对于非保守系统而言，上面所找到的函数 H 就可以取为李雅普诺夫函数。然后再在系统中列入对应于机械能量的吸收或耗散的因素。我们在下面列举几个简单的例子来说明。

例 1：研究方程

$$\ddot{x} + f(x) = 0. \tag{1.3}$$

这里 $f(x)$ 对所有的 x 是可微的。且假设 $xf(x) > 0$，当 $x \neq 0$ 时；$f(0) = 0$，令 $F(x) = \int_0^x f(x)dx$。

方程 (1.3) 描写了一个单位质点在恢复力 $f(x)$ 作用下的运动情况，引进 $y = \dot{x}$，方程 (1.3) 等价于系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -f(x). \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

质点的动能是 $\frac{y^2}{2}$，而其位能为 $F(x)$，根据能量守恒定律有

$$E(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + F(x) = k^2. \tag{1.5}$$

公式 (1.5) 也可以直接从 (1.4) 得到，因为

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{(1.4)} = y\dot{y} + F'(x)\dot{x} = y(-f(x)) + f(x)(y) = 0.$$

系统 (1.4) 只有一个孤立奇点 (0, 0)。现在我们就可以取

$$V(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + F(x)$$

作为李雅普诺夫函数，因为 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1.4)} = 0$，因此原点是稳定的。

事实上，$E(x,y) = k^2$ 为首次积分，利用表示式

$$y = \pm\sqrt{2(k^2 - F(x))},$$

我们容易得出他们是围绕原点的卵形线（图 1），所以原点是稳定的，但不是渐近稳定的。

例 2：研究微分方程

$$\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = 0. \tag{1.6}$$

这里 $\varphi(0) = f(0) = 0$. 显然,这个方程等价于系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -f(x) - \varphi(y). \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

从力学的观点来看,方程(1.6)有简单的解释. 即可以认为,它描写了质点在有阻尼(非线性地依赖于速度 $\dot{x}$)的介质内,在非线性恢复力 $f(x)$ 作用下的振动.

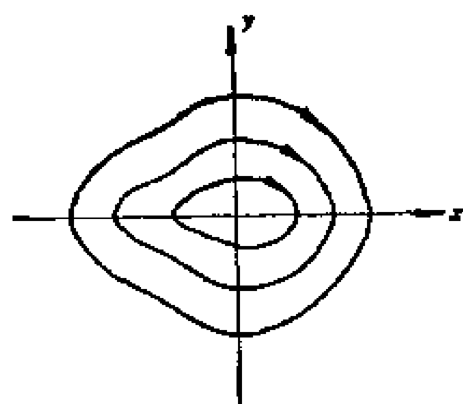


图 1

当取质点的质量等于1时,可以写出总能量为

$$V = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(x)dx.$$

这里右端的第一个被加项对应于动能,而第二个被加项是位能.

如果介质的阻尼消失($\varphi(y) = 0$),那末系统(1.7)允许第一积分 $V =$ 常量,它对应于著名的能量守恒定律. 但是由于阻尼的存在,在振动过程中,机械能量转化成热能. 因此沿着系统(1.7)的轨道,函数 V 应该是减少的. 容易算出由于系统(1.7),有 $\dot{V} = -\varphi(y)y$.

如果当 $y \neq 0$ 时,条件 $\varphi(y)y > 0$ 满足,则得到 $\dot{V} \leqslant 0$.

为了使函数 V 是正定的,必须要求,当 $x \neq 0$ 时,不等式 $f(x)x > 0$ 满足.

为了利用第一篇第一章定理3.5或3.6,应当假定

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_0^x f(x)dx = \infty,$$

或者,附加保证系统(1.7)的轨道有界性的某些条件.

最后,必须指出,在直线 $y = 0$ 上(这里函数 $\dot{V} = 0$),没有整条轨线(除零平衡位置外),如果沿着 $y \equiv 0$ 的轨道,那末也有 $\dot{y} \equiv 0$. 于是由系统(1.7)的第二个方程得到 $f(x) = 0$. 但是因为条件 $f(x)x > 0$ 满足,所以 $x = 0$ 是函数 $f(x) = 0$ 的唯一的零

点，那末得到 $x\equiv 0$.

例 3：我们研究系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= m_i y_i, \qquad\qquad i=1,2,\cdots,n, \\ \dot{y}_i &= -\lambda_i(y_i) - f_i(x_i) - \sum_{k=1}^{n} \varphi_{ik}(x_i - x_k). \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

这里 $\lambda_i(y_i)y_i > 0$，当 $y_i \neq 0$ 时；$f_i(x)x > 0$，$\varphi_{ik}(x)x > 0$，当 $x \neq 0$ 时；$\varphi_{ik}(x) = -\varphi_{ik}(-x)$，$\varphi_{ik}(x)=\varphi_{ki}(x)$，$\lambda_i(0)=f_i(0)=\varphi_{ik}(0)=0$，$m_i$ 是正的常量。显然，函数

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i} f_i(x)dx + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\int_0^{x_i-x_k}\varphi_{ik}(x)dx$$

是正定函数，并且

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} m_i\lambda_i(y_i)y_i < 0, \quad 当 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \neq 0.$$

如果取描写 n 个质点 P_i（具有质量 m_i）的振动的系统作为系统 (1.8) 的机械模型时，那末，上面所述的函数 V 的构造就成为十分显然的了。如果假设点 P_i 受到恢复力 $f_i(x_i)$ 的作用，也受到表示系统的另外的点在点 P_i 的运动上起影响的形如 $\varphi_{ik}(x_i - x_k)$ 的力的作用。这时函数 V 简单地是系统 (1.8) 的哈密尔顿函数，$\frac{dV}{dt}<0$，因为在系统 (1.8) 中，函数 $\lambda_i(y_i)$ 表示了促使机械能量耗散的力.

但是一般说来，当所研究的系统的阶数为 2 时，这种物理模型比较容易作出，如果系统的阶数大于 2，这个方法会遇到一定的困难。我们再重复说明，直到现在为止，对一般非线性系统而言，任何通用的作李雅普诺夫函数的方法是没有的。我们在下面将举出一些例子，对一些具体的方程而言，是怎样成功地作出李雅普诺夫函数的。有些方法对于我们解决一些实际问题，将是一种很好的启发。

在介绍一系列具体方程，怎样成功地作出李雅普诺夫函数，以解决系统的稳定性问题以前，我们先介绍一下著名的爱泽曼问题[2]. 因为这个问题说明了非线性系统与线性系统之间存在着本质的差异.

与线性系统

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j+Fx_k,\\\frac{dx_i}{dt}&=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\quad i=2,\cdots,n,\end{aligned}\right\}\tag{1.9}$$

同时，我们研究非线性系统

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j+f(x_k),\ f(0)=0\\\frac{dx_i}{dt}&=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\quad i=2,\cdots,n.\end{aligned}\right\}\tag{1.10}$$

假设我们已知，对满足条件

$$\alpha<F<\beta$$

的所有 F 而言，系统（1.9）的零解是渐近稳定的. 提出这样的问题：如果满足条件

$$\alpha<\frac{f(x_k)}{x_k}<\beta\qquad(x_k\neq 0),\tag{1.11}$$

那末系统（1.10）的零解是否是全局稳定的？换句话说，如果曲线 $y=f(x)$ 的图形位于直线 $y=\alpha x$ 及 $y=\beta x$ 之间，那末，这对于保证系统（1.10）的零解的全局稳定性是否是足够的？这就是著名的爱泽曼问题. 它是关于全局稳定性很多研究的源泉.

H. H. 克拉索夫斯基[3]对于二阶方程组的情形举出了反例. 即虽然条件（1.11）满足，但并不能保证零解的全局稳定性.

B. A. 蒲利斯[4]对三阶方程组进行了研究. 指出甚至满足比条件（1.11）更严格的条件，即如果满足 $\alpha_1<\frac{f(x_i)}{x_i}<\beta_1$，其中 $\alpha_1>\alpha$，$\beta_1<\beta$，还不能保证零解的全局稳定性.

§2. 特殊非线性系统李雅普诺夫函数的作法

（一）类比法

M. A. 爱泽曼问题提法的本身就表明了这样的思想. 如何根据其所对应的线性系统的李雅普诺夫函数，类似地来作出非线性系统的李雅普诺夫函数. И. Г. 马尔金[5]曾用这样的思想方法对带有一个非线性项的二阶系统作出了李雅普诺夫函数. 首先找出其相应的线性系统的形为二次型的李雅普诺夫函数，随后对非线性系统选取类似的李雅普诺夫函数. 这个方法应用极为广泛，是作李雅普诺夫函数有效方法之一. 下面我们将列举几个例子详细地说明这个方法的实质.

例1：与系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by,\\ \dot{y} &= cx + dy\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

同时，我们研究系统[5]

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + by,\ f(0) = 0,\\ \dot{y} &= cx + dy.\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

这里利用第二篇第四章公式 (3.6)，从条件

$$\dot{V} = -2(a + d)(bc - ad)x^2$$

出发，对于系统 (2.1) 作出二次型的李雅普诺夫函数. 当假定

$$V = V_{11}x^2 + 2V_{12}xy + V_{22}y^2$$

时，容易求出未定系数 V_{11}, V_{12}, V_{22}, 由计算结果，我们得到函数

$$V = (dx - by)^2 + (ad - bc)x^2 \tag{2.3}$$

对于系统 (2.1) 的劳思-赫维茨条件为 $a + d < 0$, $ad - bc > 0$. 显然这些条件保证了 V 的正定性及 $\dot{V}$ 的负常性.

以函数 (2.3) 为基础，对系统 (2.2) 作出李雅普诺夫函数. 系统 (2.2) 与系统 (2.1) 不同之点，仅在于用非线性函数 $f(x)$ 来代替 (2.1) 中线性函数 ax. 在表示式 (2.3) 中，系数 a 与 x^2 组合，如果将表示式 ax^2 考虑为积分 $2\int_0^x axdx$，由此可以看出，很自然的想

法是这样的：可以类似地取函数

$$V = (dx - by)^2 + 2d\int_0^x f(x)dx - bcx^2$$

作为系统（2.2）的李雅普诺夫函数.

取函数 V 关于 t 的由于系统（2.2）的导数后，我们得到

$$\dot{V} = -2\left(\frac{f(x)}{x} + d\right)\left(bc - \frac{f(x)}{x}d\right)x^2.$$

因为 $V = (dx - by)^2 + 2\int_0^x (df(x) - bcx)dx$,

那末函数 V 定号的条件为

a. $d\dfrac{f(x)}{x} - bc > 0$,　　当 $x \neq 0$ 时.

条件 a 连同条件

b. $\dfrac{f(x)}{x} + d < 0$,　　当 $x \neq 0$ 时,

保证了 $\dot{V}$ 的常负性.

显然,集合 $x = 0$（这里 $\dot{V} = 0$）不包含整条轨线. 如果条件

c. $\int_0^x [df(x) - bcx]dx \to \infty$,　　当 $|x| \to \infty$ 时

满足，则它对保证函数 V 是无限大的这一点是足够的.

基于第一篇第一章定理 3.5，条件 a, b, c, 保证了系统（2.2）的零解的全局稳定性.

H. H. 克拉索夫斯基[3] 曾指出过，如果条件 c 不满足，那末在任何初始扰动下,可以引起稳定性性质的丧失.

例 2：与系统（2.1）同时,我们研究下面的系统[3]

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x) + by, \\ \dot{y} &= f_2(x) + dy, \quad f_1(0) = f_2(0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

取李雅普诺夫函数为

$$V = (dx - by)^2 + 2\int_0^x [df_1(x) - bf_2(x)]dx,$$

由于系统（2.4），我们有

$$\frac{dV}{dt} = -2\left(\frac{f_1(x)}{x} + d\right)(bf_2(x) - df_1(x))x,$$

我们得到稳定性的充分条件：

a. $(bf_2(x) - df_1(x))x < 0$, 当 $x \neq 0$ 时，

b. $\frac{f_1(x)}{x} + d < 0$, 当 $x \neq 0$ 时，

c. $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left\{\int_0^x [df_1(x) - bf_2(x)]\, dx\right\} = +\infty$.

H. H. 克拉索夫斯基[6] 曾证明了，在条件 a 及 b 满足的情况下，条件

$$\lim_{|x|\to\infty}\left\{(f_1(x) + dx)\operatorname{sgn}x - \int_0^x [df_1(x) - bf_2(x)]dx\right\} = -\infty$$

是对于系统 (2.11) 的零解为全局稳定性的充分必要条件.

例 3：与系统 (2.1) 同时，研究系统[5]

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} = ax + f(y), \\ &\dot{y} = cx + dy, \qquad f(0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

对于系统 (2.1) 作出函数 V，它的由于这个系统所取的导数为

$$\dot{V} = 2(a + d)(ad - bc)y^2.$$

根据第二篇第四章公式 (3.6)，经过不太复杂的计算以后，我们得到

$$V = (cx - ay)^2 + (ad - bc)y^2.$$

现在对于系统 (2.5) 作出李雅普诺夫函数

$$V = (cx - ay)^2 + 2\int_0^y (ady - cf(y))dy.$$

由于 (2.5)，我们得到

$$\dot{V} = 2(a + d)\left[ad - c\frac{f(y)}{y}\right]y^2,$$

全局稳定性的条件：

a. $a + d < 0$,

b. $ad - c\frac{f(y)}{y} > 0$,

c. $\int_0^y (ady - cf(y))dy \to \infty$, 当 $|y| \to \infty$ 时。

例 4: 我们研究方程

$$\ddot{x} + \varphi(x)\dot{x} + f(x) = 0, \tag{2.6}$$

这个方程等价于系统

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} = y, \\ &\dot{y} = -f(x) - \varphi(x)y, \quad f(0) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

其对应的线性系统为

$$\begin{aligned} &\dot{x} = y, \\ &\dot{y} = -bx - ay. \end{aligned} \tag{2.8}$$

对系统 (2.8) 而言,根据前节讨论,作出李雅普诺夫函数为

$$V = \frac{y^2}{2} + b\frac{x^2}{2},$$

并且 $\dot{V} = -2ay^2$.

现在我们指出, V 中不包含参数 a, 因此对于系统

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} = y, \\ &\dot{y} = -bx - \varphi(x)y \end{aligned}\right\}$$

而言,这个函数 V 也可以用,但对系统 (2.7) 就不能用了.

为了得到系统 (2.7) 的李雅普诺夫函数,必须找到在 V 的表达式中的项 bx^2 的类似项. 但是从对系统 (1.3) 李雅普诺夫函数作法的动力学方法中,我们已经知道,从力学的观点来看,量 bx (或 $f(x)$) 表示恢复力,而 $\frac{1}{2}bx^2$ (即 $\int_0^x bxdx$) 则对应于位能. 因此很自然地可以取函数

$$V = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x f(x)dx \tag{2.9}$$

作为系统 (2.7) 的李雅普诺夫函数. 显然,由于系统 (2.7),我们得到

$$\dot{V} = -\varphi(x)y^2,$$

方程 (2.6) 平凡解全局稳定性的条件为

a. $f(x)x > 0$, 当 $x \neq 0$ 时,

b. $\varphi(x) > 0$,

c. $\int_0^x f(x)dx \to \infty$,　　当 $|x| \to \infty$ 时。　　(2.10)

容易验证，集合 $\dot{V} = 0$（即直线 $y = 0$）不包含除坐标原点以外的整条轨线。

如果条件 c 不满足，那末一般说来，我们仅能得到大范圍稳定性的结果。同时作用区域一般说来可以不与全平面相重合，这时应该要求补充这个区域形状的研究（将在本篇第十二章中作详细介绍）。

附带说明一点：如果对方程 (2.6) 引进变量代换

$$y = \dot{x} + \int_0^x \varphi(x)dx$$

（即列娜变换），我们得到系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y - \int_0^x \varphi(x)dx, \\ \dot{y} &= -f(x). \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

重新利用前面的李雅普诺夫函数 (2.9)，由于系统 (2.11)，我们得到

$$\dot{V} = -f(x)\int_0^x \varphi(x)dx,$$

因此方程 (2.6) 的零解全局稳定性的条件为：

a. $f(x)x > 0$　　当 $x \neq 0$ 时，

b. $x\int_0^x \varphi(x)dx > 0$,　　当 $x \neq 0$ 时，　　(2.12)

c. $\int_0^x f(x)dx \to \infty$,　　当 $|x| \to \infty$ 时。

比较条件 (2.10) 与 (2.12)，说明后面的方法更好，因为可以用更弱的条件 $x\int_0^x \varphi(x)dx > 0$ 来代替条件 $\varphi(x) > 0$。

例 5：我们仍然来研究方程 (2.6)

$$\ddot{x} + \varphi(x)\dot{x} + f(x) = 0.$$

假设

a. $xf(x) > 0$, 对所有 $x \neq 0$,

b. $\varphi(x) > 0$, 对所有 $x \neq 0$,

c. $|\Phi(x)| = \left|\int_0^x \varphi(\xi)d\xi\right| \to \infty$, 当 $|x| \to \infty$ 时.

与上面例子相比较,容易看出,这里在 $f(x)$ 上加上了较弱的条件,而在阻尼 $\varphi(x)$ 上加上了一个较强的条件.

我们仍然采用以前所讨论的李雅普诺夫函数

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{2}y^2 + F(x).$$

它的对于 t 的由于系统 (2.7) 的全导数为

$$\dot{V} = -\varphi(x)y^2.$$

这里指出,V 是正定的,$\dot{V} \leqslant 0$, 并且在集合 $\dot{V} = 0$ (即直线 $y = 0$) 上不包含除坐标原点以外的整条轨线. 如果我们能证明,系统 (2.7) 的每条正半轨线是有界的,那末,我们就可以利用第一篇第一章定理 3.6, 得出系统 (2.7) 的零解是全局稳定性的结论.

我们考虑由

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + F(x) < l$$

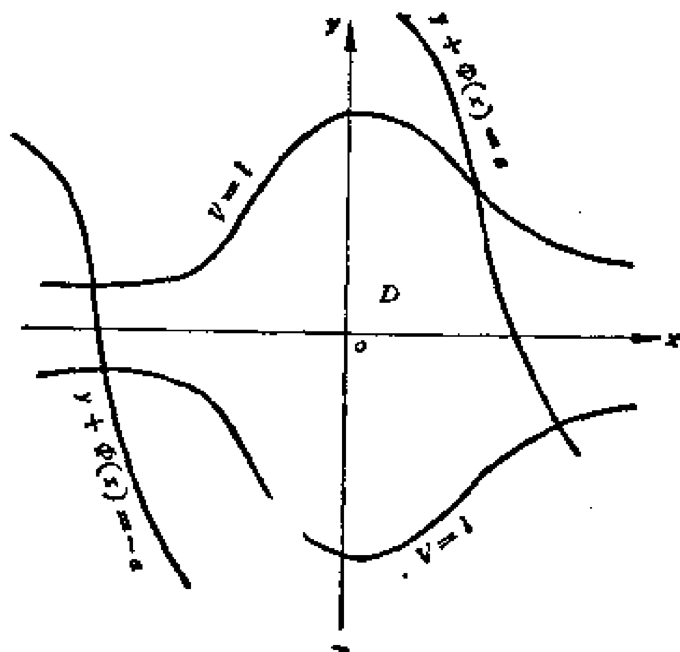


图 2

及

$$[y+\Phi(x)]^2 < a^2$$

所界限的区域D（见图2）．容易看出，对任何l及a而言，这是一个有界区域，并且我们总可以选取a足够大，使得区域D的边界部分$y+\Phi(x)=a$位于右半平面（即$x>0$），而D的边界部分

$$y+\Phi(x)=-a$$

则位于左半平面（即$x<0$）．

我们选取如此大的正数l及a，使得任意点$P_0(x_0, y_0)$位于区域D内，我们要证明通过点P_0的轨线，当t增加时，不能离开区域D．

因为$\dot{V}\leqslant 0$，所以轨道上的点若要从区域D内离开，就必须要通过这个区域的边界部分$y+\Phi(x)=a$及$y+\Phi(x)=-a$，即存在这样的瞬时T，使得

$$y(T)+\Phi(x(T))=a \quad 及 \quad y(T)+\Phi(x(T))=-a.$$

注意到

$$\frac{d}{dt}[y+\Phi(x)]^2=-2[y+\Phi(x)]f(x).$$

沿着区域D的边界$y+\Phi(x)=-a$或$y+\Phi(x)=a$的部分，我们有

$$\frac{d}{dt}[y+\Phi(x)]^2=-2a|f(x)|<0,$$

这样就证明了系统（2.7）的每条正半轨线都是有界的．因此，如果条件a，b，c，满足，则系统（2.7）的平凡解是全局稳定的．

对于二阶系统稳定性的研究，一般说来，是比较容易讨论的，其原因是因为其相空间是一个平面，故可以进行定性的研究．下面进一步讨论三阶方程，我们将对一些具有典型的方程进行详细的讨论，这样，使读者能更熟练地掌握其处理问题时所用方法的实质．

例6：研究方程

$$\dddot{x}+a\ddot{x}+\varphi(\dot{x})+f(x)=0, \tag{2.13}$$

这里 a 是常量；在任何自变量值的情况下，$f(x)$ 是连续可微的，$\varphi(y)$ 是连续的函数，且 $\varphi(0)=f(0)=0$。

方程 (2.13) 等价于系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z - ay, \\ \dot{z} &= -f(x) - \varphi(y). \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

其所对应的线性系统为

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z - ay, \\ \dot{z} &= -cx - by. \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

对系统 (2.15) 来作出李雅普诺夫函数，使

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.15)} = (c - ab)y^2.$$

根据第二篇第四章公式 3.6，不难算出

$$V = \frac{ac}{2}x^2 + cxy + \frac{b}{2}y^2 + \frac{z^2}{2}, \tag{2.16}$$

对于非线性系统 (2.14)，我们作出其李雅普诺夫函数为

$$V = a\int_0^x f(x)dx + f(x)y + \int_0^y \varphi(y)dy + \frac{z^2}{2}. \tag{2.16$'$}$$

这个函数的由于非线性系统 (2.14) 所取的导数为

$$\dot{V} = \left[f'(x) - a\frac{\varphi(y)}{y}\right]y^2.$$

我们可以证明下面的定理：

定理 2.1：如果 $a > 0$，并且函数 $f(x)$，$\varphi(x)$ 满足下列条件：

a. $f(x)x > 0$，　　　　当 $x \neq 0$ 时，

b. $a\dfrac{\varphi(y)}{y} - f'(x) > 0$，　　　　当 $y \neq 0$ 时，

c. $\lim\limits_{r\to\infty} W(x, y) = \infty$。

这里

$$W(x, y) = a\int_0^x f(x)dx + f(x)y + \int_0^y \varphi(y)dy, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2},$$

那末系统 (2.14) 的零解 $x = y = z = 0$ 在任意初始扰动下是渐近稳定的。

现在来证明定理。我们研究李雅普诺夫函数 (2.16)′,显然,当 $y \neq 0$ 时,有 $\dot{v} < 0$,且当 $y = 0$ 时,有 $\dot{v} = 0$. 首先证明,集合 $y = 0$ 不包含系统 (2.14) 的整条轨线 (除零平衡位置以外). 事实上,如果存在了这样的轨线 $x = \phi_1(t)$, $y = \phi_2(t)$, $z = \phi_3(t)$, 因为 $\phi_2 \equiv 0$, 则从系统 (2.14) 的第二个方程,就有 $\phi_3(t) = 0$, 且从第三个方程,并考虑到条件 a 时,得到 $\phi_1(t) = 0$.

如果W是正定的,于是V是 x, y, z 的正定函数,那末我们就可以利用第一篇第一章定理 3.5, 下面我们来证明W的正定性.

显然,函数W可以表为

$$W(x, y) = \frac{(2\Phi(y) + yf(x))^2}{4\Phi(y)} + \frac{4aF(x)\Phi(y) - y^2f^2(x)}{4\Phi(y)},$$

这里

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx, \quad \Phi(y) = \int_0^y \varphi(y)dy.$$

我们指出,当 $y \neq 0$ 时, $\Phi(y) > 0$, 事实上,因为 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处改变正负号,那末,对于某些 x 值, $f'(x)$ 取正值,而从定理的条件 b 可以看出,这些数值不超过值 $a\dfrac{\varphi(y)}{y}$ 的下界,这就保证了 $\dfrac{\varphi(y)}{y}$ 是正的. 因此, $\Phi(y)$ 也是正的.

下面,我们只要证明,当 $x \neq 0$, $y \neq 0$ 时,函数

$$u(x, y) = 4aF(x)\Phi(y) - y^2f^2(x)$$

总是正的,这样 $W(x, y)$ 就是正定的了. 我们注意到, $u(x, y)$ 也可以写成下面形式

$$u(x, y) = 4\int_0^x f(x)\left[\int_0^y \left(a\frac{\varphi(y)}{y} - f'(x)\right) y dy\right]dx.$$

条件 b 保证了里面的积分是正的,可是又由条件 a 得出 $u(x, y)$ 是正的.

于是,函数 $W(x, y)$ 是自变量 x, y 的正定函数,因此,函数

$V = W + \frac{z^2}{2}$ 也是自变量 x, y, z 的正定函数。

例 7：研究方程

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + cx = 0, \tag{2.17}$$

这里 $\varphi(y)$ 是连续函数，$\varphi(0) = 0$。这个方程是例 6 中的方程的特殊情形，但是正如 B. A. 浦利斯[7]所指出的那样，前面定理中条件 c 的要求，在这里是多余的。

定理 2.2：如果 $a > 0, c > 0$，并且当 $y \neq 0$ 时，函数 $\varphi(y)$ 满足条件 $\frac{\varphi(y)}{y} > \frac{c}{a}$，那末方程(2.17)的零解在任意初始扰动的情形下是渐近稳定的。

为了证明定理，我们写出 (2.17) 的等价系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= -cx - \varphi(y) - az. \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

显然，在函数 (2.16) 中，变 z 为 $z + ay$，变 $f(x)$ 为 cx，那末就得到了对这个系统 (2.18) 而言的李雅普诺夫函数，这个函数为

$$V = \frac{ac}{2}x^2 + cxy + \int_0^y \varphi(y)dy + \frac{(z + ay)^2}{2}, \tag{2.19}$$

并且，由于系统 (2.18)，有

$$\dot{V} = \left(c - a\frac{\varphi(y)}{y}\right)y^2.$$

不重复前面定理的推理，我们仅指出，系统 (2.18) 的每条正半轨线是有界的。这就给出了应用第一篇第一章定理 3.6 的可能性。

我们取如此大的正数 l 及 N，使得任意点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 位于由不等式

$$V < l, \qquad |y| < N \tag{2.20}$$

所确定的区域 D 内。显然，区域 D 是有界的区域。我们要证明，通过点 P_0 的轨线，当 $t > 0$ 时，不离开这个区域。

事实上，因为 $\dot{V} \leqslant 0$，那末、轨线上的点若要从区域 D 内离开，

就必须通过这个区域边界的平面部分，即应该有这样的瞬时 T，使得有 $|y(T)| = N$.

但是从不等式 $V < l$ 及从 (2.19) 得出

$$-\sqrt{2l} < z + ay < \sqrt{2l}. \tag{2.21}$$

如果 $y = N$，那末从不等式 (2.21) 的右边部分，我们得到

$$z < -aN + \sqrt{2l}.$$

如果 $y = -N$，那末从这个不等式的左边部分，我们得到

$$z > aN - \sqrt{2l}.$$

这就是说，当 N 足够大时，有

$$z\,\mathrm{sgn}y = \frac{dy}{dt}\mathrm{sgn}y < 0.$$

由此得出，系统 (2.18) 的轨线交区域 D 的边界的平面部分自外向内。因此系统 (2.18) 的每条正半轨线是有界的. 这里所引进讨论的方法，是属于 C. H. 西马诺夫[8] 的，这种正半轨线有界性的证明的技巧，是很有意思的。在各种不同的场合常常被利用。为了使读者能熟悉这种手法，我们再举一个类似的例子如下：

例 8：研究方程[8]

$$\dddot{x} + f(x, \dot{x})\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0, \tag{2.22}$$

这里 b, c 是常量，对所有自变量的值，函数 $f(x, y)$ 是连续的，并且有关于 x 的连续的偏导数.

方程 (2.22) 等价于系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= -cx - by - f(x, y)z. \end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

我们研究其所对应的线性系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= -cx - by - az. \end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

对它作出李雅普诺夫函数，使其由于系统 (2.24) 所取的导数为

$$\dot{V} = -b(ab - c)z^2.$$

根据第二篇第四章公式 3.6，不难算出

$$2V=(bz+cy)^2+b(cx+by)^2+c(ab-c)y^2.$$

对于非线性系统 (2.23)，我们取函数

$$2V=(bz+cy)^2+b(cx+by)^2+c\left(2b\int_0^y f(x,y)\,y\,dy-cy^2\right) \tag{2.25}$$

作为其李雅普诺夫函数，它的由于系统 (2.23) 的导数为

$$\dot V=-b\,(bf(x,y)-c)z^2+bcy\int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}\,y\,dy. \tag{2.26}$$

我们可以得到下面的定理.

定理 2.3：如果 $b>0$，$c>0$，而函数 $f(x,y)$ 在任何自变量值的情况下满足条件

a. $f(x,y)>\frac{c}{b}$,

b. $y\frac{\partial f}{\partial x}\leqslant 0$.

那末系统 (2.23) 的零解，在任何初始扰动下是渐近稳定的.

现在我们来证明定理. 显然，由于条件 a，函数 V 是正定的，而且，由于条件 a 及 b，导数 $\dot V$ 是负常的.

我们考虑由不等式

$$V(x,y,z)<l,\quad |y|<N$$

所给出的区域 D.

显然，区域 D 是有界的. 当取空间的任意点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 作为初始点以后，我们可以选取如此大的数 l 及 N，使得点 P_0 位于区域 D 内，这个等价于不等式

$$V(x_0,y_0,z_0)<l,\quad |y_0|<N.$$

当点 $P(x(t),y(t),z(t))$ 按照自己的轨道运动时，随着时间的增长，它只能通过区域 D 边界的平面部分 $y=+N$ 或 $y=-N$ 离开区域 D. 因为由于不等式 $\dot V\leqslant 0$，所以等式 $V(x(t),y(t),z(t))=l$ 是不可能满足的.

由于 (2.25)，从不等式 $V(x,y,z)<l$ 得出

$$-\sqrt{l} < bz + cy < \sqrt{l},$$

当 $y = N$ 时，由上面不等式的右边部分得到 $bz < -cN + \sqrt{l}$.
而当 $y = -N$ 时，由上面不等式的左边部分得到 $bz > cN - \sqrt{l}$.

这样一来，当N足够大时，在D的平面边界上，当 $y = N$ 时，有不等式 $\dot{y} = z < 0$，而当 $y = -N$ 时，有不等式 $\dot{y} > 0$. 这就是说，随着时间的增加，点P仍保留在区域D内. 因此，系统 (2.23) 的每条轨线都是有界的.

因为在集合 $z = 0$ 上（这里可以有等式 $\dot{V} = 0$），没有整条轨线（除零平衡位置以外），故从第一篇第一章定理3.6直接得到全局稳定性.

例 9：E. A. 巴尔巴欣[9]对更普遍的三阶方程

$$\dddot{x} + \phi(x, \dot{x})\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 \tag{2.27}$$

进行了研究. 这里函数 $\phi(x, y)$, $f(x, y)$ 对所有 x 及 y 值是连续的，并且对 x 是连续可微的. 此外，还假设 $f(0, 0) = 0$.

方程 (2.27) 等价于系统

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} = y, \\ &\dot{y} = z, \\ &\dot{z} = -f(x, y) - \phi(x, y)z. \end{aligned}\right\} \tag{2.28}$$

我们作李雅普诺夫函数为

$$V = a\int_0^x f(x, 0)dx + \int_0^y f(x, y)dy + \frac{(z + ay)^2}{2} + a\int_0^y (\phi(x, y) - a)ydy. \tag{2.29}$$

对这个函数的由于系统 (2.28) 所取的导数为

$$\dot{V} = ay\,[f(x, 0) - f(x, y)] + y\int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}dy + [a - \phi(x, y)]z^2 + ay\int_0^y \frac{\partial \phi}{\partial x}ydy. \tag{2.30}$$

当我们引进下面的表示式

$$F(x) = \int_0^x f(x, 0)dx, \quad \Phi(x, y) = \int_0^y [f(x, y) - f(x, 0)]dy,$$

$$W(x, y) = a\int_0^x f(x, 0)dx + \int_0^y f(x, y)dy$$
$$= aF(x) + yf(x, 0) + \Phi(x, y),$$
$$u(x, y) = 4aF(x)\Phi(x, y) - y^2f^2(x, 0)$$

之后,我们写出下面的定理.

定理 2.4: 如果可以找到这样的正数 a, 使得满足条件:

a. $a[f(x, y) - f(x, 0)]y > y\int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}dy$, 当 $y \neq 0$ 时,

b. $f(x, 0)x > 0$, 当 $x \neq 0$ 时,
   $\Phi(0, y) > 0$, 当 $y \neq 0$ 时,

c. $u(x, y) > 0$, 当 $xy \neq 0$ 时,

d. $\phi(x, y) \geqslant a$,

e. $y\frac{\partial \phi}{\partial x} \leqslant 0$, 当 $y \neq 0$ 时,

f. $\lim\limits_{|x|\to\infty} W(x, y) = \infty$, 对任意固定的 y 值,

则系统 (2.28) 的零解在任意初始扰动下是稳定的.

证: 我们取 (2.29) 为李雅普诺夫函数,显然, 当 $y \neq 0$ 时,有 $\dot{V} \leqslant 0$, 容易指出, 集合 $\dot{V} = 0$ 不包含除 $O(0, 0, 0)$ 以外的整条轨线. 事实上, 如果 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ 是系统 (2.28) 的整个位于集合 $\dot{V} = 0$ 上的解, 则应该有恒等式 $y(t) \equiv 0$, 由系统 (2.28) 的第二个方程得出 $z(t) = \dot{z}(t) = 0$, 而从这个系统的第三个方程得出 $f(x(t), 0) = 0$, 由此, 并注意到定理的条件 b, 我们得出 $x(t) \equiv 0$.

下面我们来证明, 函数 V 是正定的, 因为由于条件 b, 当 $x \neq 0$ 时,有 $F(x) > 0$, 则表示式

$$W(x, y) = a\left[(F(x))^{1/2} + \frac{yf(x, 0)}{2a(F(x))^{1/2}}\right]^2 + \left[\Phi(x, y) - \frac{y^2f^2(x, 0)}{4aF(x)}\right] \tag{2.31}$$

是正定的, 由条件 c 得出表示式 (2.31) 式中第二个方括号是非负

的．如果 $x \neq 0$，则对任何 y，$W(x, y) > 0$，如果 $x = 0$，$y \neq 0$，则由于条件 b，$W(0, y) > 0$．这样一来，函数 $W(x, y)$ 是变量 x 及 y 的正定函数．而由关系式 (2.29) 所给出的函数 V 是变量 x，y，z 的正定函数．

为了利用第一篇第一章定理 3.6，应该证明，当 $t \to \infty$ 时，系统 (2.28) 的所有轨线是有界的，为此，我们作出由下面不等式所确定的区域 D：

$$V < l, \quad |y| < N, \tag{2.32}$$

对任意点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 而言，我们总可以选取足够大的正数 l 及 N，使得点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 位于区域 D 内．

我们进一步指出，区域 D 是有界区域，从 (2.32) 的第一个不等式得出不等式

$$(ay + z)^2 \leqslant 2l, \tag{2.33}$$

从不等式 (2.33) 可以得出坐标 z 的有界性，从不等式 $W(x, y) \leqslant l$，且由于定理的条件 f，可以得出坐标 x 的有界性．

我们指出，通过点 P_0 的轨线，当 $t > 0$ 时，不能离开区域 D．事实上，因为 $\dot{V} \leqslant 0$，所以轨线如果要离开区域 D，只能通过这个区域边界的平面部分，即应该有这样的瞬时 T，满足 $|y(T)| = N$．但由不等式 (2.33) 得出，对足够大的值 N，$y(T)$ 的正负号应该与 $z(T) = y(T)$ 的正负号相反．

例如，如果 $y(T) = N$，则由 (2.33) 得到

$$z \leqslant -aN + \sqrt{2l},$$

如果 $y(T) = -N$，则有

$$z \geqslant aN - \sqrt{2l}.$$

这样一来，系统 (2.28) 的轨线是由外向内地与区域 D 的平面部分相交．这样，我们就证明了系统 (2.28) 的轨线在 $t > 0$ 情形下是有界的，因此我们就可以利用第一篇第一章定理 3.6，得出系统 (2.28) 的平凡解在任意初始扰动下是稳定的结论．

（二）变量分离方法

研究方程[30]

$$\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + g(\dot{x})f(x) = 0, \tag{2.34}$$

其等价系统为

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -g(y)f(x) - \varphi(y). \end{aligned}\right\} \tag{2.35}$$

为了作出李雅普诺夫函数，这里利用变量分离法(参看[11])，寻找形如

$$V = F(x) + \Phi(y)$$

的函数 V，由于系统 (2.35)，有

$$\dot{V} = F'(x)y - \Phi'(y)[g(y)f(x) + \varphi(y)],$$

现在要求 $\dot{V}$ 与函数 V 有同样的结构，即要求恒满足条件

$$F'(x)y - \Phi'(y)g(y)f(x) = 0.$$

当分离变量时，我们得到

$$\frac{F'(x)}{f(x)} = \frac{\Phi'(y)g(y)}{y}.$$

如果等式两边表示式的每一个是常量，例如等于 1，这样等式能成立，由此立即得到

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx, \quad \Phi(y) = \int_0^y \frac{y}{g(y)}dy,$$

即

$$V = \int_0^x f(x)dx + \int_0^y \frac{ydy}{g(y)},$$

$$\dot{V} = -y\frac{\varphi(y)}{g(y)},$$

故系统 (2.35) 零解全局稳定性的条件为

a. $f(x)x > 0$, 当 $x \neq 0$ 时，

b. $g(y) > 0$, 当 $y \neq 0$ 时，

c. $\varphi(y)y > 0$, 当 $y \neq 0$ 时，

d. $\int_0^x f(x)dx \to \infty$, 当 $|x| \to \infty$ 时，

e. $\int_0^y \frac{ydy}{g(y)} \to \infty$, 当 $|y| \to \infty$ 时。

下面的方法是变量分离方法的进一步发展(参看[11]).

研究系统

$$\dot{x}_i=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}f_k(\sigma_k), \qquad i=1,\cdots,n, \tag{2.36}$$

其中 $f_k(\sigma_k)\sigma_k>0$, 当 $\sigma_k\neq 0$ 时,

$$\sigma_k=\sum_{m=1}^{n} a_{km}x_m, \qquad k=1,\cdots,n,$$

a_{km} 是常量, $f_k(0)=0$, p_{ik} 可以是坐标、参数及时间的函数.

正定函数

$$V=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\sigma_i} f_i(\sigma)d\sigma,$$

它的由于系统 (2.36) 的导数有下面形式

$$\dot{V}=2\sum_{m,k=1}^{n} b_{km}f_k(\sigma_k)f_m(\sigma_m),$$

其中

$$b_{km}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_{ki}P_{im}+a_{mi}P_{ik}).$$

这样一来,如果

$$\sum_{m,k=1}^{n} b_{km}u_ku_m$$

是负定的或负常的, 则 $\dot{V}$ 也是负定的或负常的. 众所周知, 薛尔维斯特尔准则及常负的准则(参看[12], 第 47 页),容易运用到具有变系数的二次型的情形,因此这些准则可以顺利地应用.

作为例子,我们对于同步电动机过渡过程方程组[23]

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\Delta\theta}{dt}=s,\\
&\frac{ds}{dt}=\sin\theta_0-\sin(\theta_0+\Delta\theta)-\eta\Delta i\sin(\theta_0+\Delta\theta)\\
&\qquad\qquad+\xi(\sin 2\theta_0-\sin 2(\theta_0+\Delta\theta)),\\
&\frac{d\Delta i}{dt}=\eta s\sin(\theta_0+\Delta\theta)-\alpha\Delta i,
\end{aligned}\right\}$$

作出李雅普诺夫函数，这里 η, ξ 是常量，$\Delta\theta$ 是转动角度的扰动，Δi 是电流强度的扰动，它是在电动机上由于去掉负载而发生的.

在这种情况下，取简单的单位矩阵作为 (a_{ik})，得到

$$(p_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -\eta\sin(\theta_0 + \Delta\theta) \\ 0 & \eta\sin(\theta_0 + \Delta\theta) & -\alpha \end{pmatrix},$$

这样一来，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d\Delta\theta}{dt} \\ \dfrac{ds}{dt} \\ \dfrac{d\Delta i}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -\eta\sin(\theta_0 + \Delta\theta) \\ 0 & \eta\sin(\theta_0 + \Delta\theta) & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

故有

$$f_1(\sigma_1) = f_1(\Delta\theta) = -[\sin\theta_0 - \sin(\theta_0 + \Delta\theta)] + \xi[\sin 2\theta_0 - \sin 2(\theta_0 + \Delta\theta)],$$

$$f_2(\sigma_2) = f_2(s) = s, \qquad f_3(\sigma_3) = f_3(\Delta i) = \Delta i,$$

故

$$V = \int_0^{\Delta\theta} [\sin(\theta_0 + \Delta\theta) - \sin\theta_0 + \xi(\sin 2(\theta_0 + \Delta\theta) - \sin 2\theta_0)]\, d\theta + \frac{s^2}{2} + \frac{(\Delta i)^2}{2},$$

$$\dot{V} = -\alpha(\Delta i)^2.$$

如果找到对 σ_k 而言的适当的表示式，所提出的方法，在线性情形给出了稳定性的充分必要条件，这由每个正定二次型，用线性变换可以化为正则型（即变量的平方和）得到，这个方法的困难在于 σ_k 及矩阵 (p_{ik}) 的选择.

（三）J. A. 沃尔克（Walker）及 L. G. 克拉克（Clark）对非线性自治系统给出了作李雅普诺夫函数的积分方法[14]

考虑系统

$$\frac{d^n x}{dt^n} + g\left(x, \dot{x}, \cdots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right) = 0, \tag{2.37}$$

其等价系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = -g(x_1, \cdots, x_n). \end{cases} \tag{2.38}$$

积分方法的步骤如下：

(1) $$\frac{\partial H}{\partial x_1} = h_1(x_1, \cdots, x_n),$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_2} = h_2(x_1, \cdots, x_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_{n-2}} = h_{n-2}(x_1, \cdots, x_n)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_{n-1}} = g(x_1, \cdots, x_n),$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_n} = x_n + h_n(x_1, \cdots, x_n),$$

这里 $h_i = \int \frac{\partial}{\partial x_i} g(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) dx_{n-1}$.

(2) $$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1} &= \frac{\partial H}{\partial x_1} + f_1, \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} &= \frac{\partial H}{\partial x_2} + f_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} &= \frac{\partial H}{\partial x_n} + f_n, \end{aligned} \tag{2.39}$$

f_i 是未确定的函数，满足

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

(3) $$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

$$= x_2 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \cdots + \left(-g(x_1, \cdots, x_n)\frac{\partial V}{\partial x_n}\right),$$

使 $\frac{dV}{dt}$ 为负定或者为负半定，来确定 $f_1, \cdots, f_n$.

（4）用方程（2.39）的线积分来确定 V.

$$V = \int_0^{x_1} \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1, 0, \cdots, 0)dx_1$$
$$+ \int_0^{x_2} \frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1, x_2, 0, \cdots 0)\, dx_2 + \cdots$$
$$+ \int_0^{x_n} \frac{\partial V}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_n)dx_n.$$

例1：考虑巴尔巴欣[10]方程

$$\dddot{x} + a_1\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = 0, \tag{2.40}$$

$$\varphi(\dot{x}) = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0, \quad f(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

其等价系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -a_1x_3 - \varphi(x_2) - f(x_1) = -g(x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

（1）$\frac{\partial H}{\partial x_1} = h_1 = \int \frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, x_2, x_3)dx_2$

$$= \int \frac{df(x_1)}{dx_1} dx_2 = x_2 \frac{df(x_1)}{dx_1},$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_2} = a_1x_3 + \varphi(x_2) + f(x_1),$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_3} = x_3 + \int \frac{\partial}{\partial x_3} g(x_1, x_2, x_3)dx_2 = x_3 + a_1x_2.$$

（2）$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial H}{\partial x_1} + f_1 = x_2\frac{df(x_1)}{dx_1} + f_1,$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{\partial H}{\partial x_2} + f_2 = a_1x_3 + \varphi(x_2) + f(x_1) + f_2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3} = \frac{\partial H}{\partial x_3} + f_3 = x_3 + a_1x_2 + f_3,$$

这里 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$.

(3) $$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\frac{\partial V}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt}$$

$$=\left(x_2\frac{df(x_1)}{dx_1}+f_1\right)x_2+(a_1x_3+\varphi(x_2)+f(x_1)$$

$$+f_2)x_3-(x_3+a_1x_2+f_3)(a_1x_3+\varphi(x_2)$$

$$+f(x_1))=-a_1^2x_2x_3-a_1x_2f(x_1)$$

$$-x_2^2\left[a_1\frac{\varphi(x_2)}{x_2}-\frac{df(x_1)}{dx_1}\right]+x_2f_1+x_3f_2$$

$$-f_3(a_1x_3+\varphi(x_2)+f(x_1)),$$

如果假定

$$a_1\frac{\varphi(x_2)}{x_2}-\frac{df(x_1)}{dx_1}>0.$$

并选取

$$f_1=a_1f(x_1),\ f_2=a_1^2x_2,\ f_3=0,$$

则有

$$\frac{dV}{dt}=-x_2^2\left[a_1\frac{\varphi(x_2)}{x_2}-\frac{df(x_1)}{dx_1}\right]$$

是常负的.

(4) $$V=\int_0^{x_1}\frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1,0,0)dx_1+\int_0^{x_2}\frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1,x_2,0)dx_2$$

$$+\int_0^{x_3}\frac{\partial V}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)dx_3=\int_0^{x_1}a_1f(x_1)dx_1$$

$$+\int_0^{x_2}(\varphi(x_2)+f(x_1)+a_1^2x_2)dx_2$$

$$+\int_0^{x_3}(a_1x_2+x_3)dx_3=a_1\int_0^{x_1}f(V)dV$$

$$+\int_0^{x_2}\varphi(u)du+x_2f(x_1)+\frac{1}{2}a_1^2x_2^2+a_1x_2x_3$$

$$+\frac{1}{2}x_3^2=\frac{1}{2}(a_1x_2+x_3)^2+\int_0^{x_2}\varphi(u)du$$

$$+x_2f(x_1)+a_1\int_0^{x_1}f(V)dV,$$

如果假设 $a_1>0$, $\frac{f(x_1)}{x_1}>0$, 并且当 $x\to\infty$ 时有 $V\to\infty$, 则系

统(2.40)的平凡解是渐近稳定的.

例 2: 考虑

$$\dddot{x}+b\ddot{x}+(x+c\dot{x})^m=0,$$

首先将此方程写成

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=x_3,\\ \dot{x}_3=-bx_3-(x_1+cx_2)^m=-g(x_1,x_2,x_3).\end{cases}\tag{2.41}$$

(1) $\dfrac{\partial H}{\partial x_1}=h_1=\displaystyle\int\frac{\partial}{\partial x_1}g(x_1,x_2,x_3)dx_2$

$$=\int m(x_1+cx_2)^{m-1}dx_2=\frac{1}{c}(x_1+cx_2)^m,$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_2}=bx_3+(x_1+cx_2)^m,$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_3}=x_3+\int\frac{\partial}{\partial x_3}g(x_1,x_2,x_3)dx_2=x_3+bx_2.$$

(2) $\dfrac{\partial V}{\partial x_1}=\dfrac{1}{c}(x_1+cx_2)^m+f_1,$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2}=bx_3+(x_1+cx_2)^m+f_2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3}=x_3+bx_2+f_3.$$

(3) $\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{\partial V}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dt}+\dfrac{\partial V}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dt}+\dfrac{\partial V}{\partial x_3}\dfrac{dx_3}{dt}$

$$=x_2\left[\frac{1}{c}(x_1+cx_2)^m+f_1\right]+x_3[bx_3$$

$$+(x_1+cx_2)^m+f_2]-[bx_3$$

$$+(x_1+cx_2)^m](x_3+bx_2+f_3)$$

$$=\left(\frac{1}{c}-b\right)x_2(x_1+cx_2)^m-b^2x_2x_3+x_2f_1$$

$$+x_3f_2-f_3[bx_3+(x_1+cx_2)^m].$$

如果取

$$f_1=f_1',$$

$$f_2 = \left[-b + \frac{1}{c}\right]x_3 + f_2',$$

$$f_3 = \left[-b + \frac{1}{c}\right]x_2 + f_3',$$

这里 f_i' 满足 $\dfrac{\partial f_i'}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j'}{\partial x_i}$,

则

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{1}{c} - b\right)x_2(x_1 + cx_2)^m - b^2x_2x_3 + x_2f_1'$$

$$+ x_3\left[\left(-b + \frac{1}{c}\right)x_3 + f_2'\right]$$

$$- \left[\left(-b + \frac{1}{c}\right)x_2 + f_3'\right][bx_3 + (x_1 + cx_2)^m]$$

$$= -\left(b - \frac{1}{c}\right)x_3^2 - \frac{b}{c}x_2x_3 + x_2f_1' + x_3f_2'$$

$$- f_3'[bx_3 + (x_1 + cx_2)^m].$$

如果取

$$f_1' = 0,$$

$$f_2' = \frac{b}{c}x_2,$$

$$f_3' = 0,$$

并设 $b > \dfrac{1}{c}$, 则

$$\dot{V} = -x_3^2\left(b - \frac{1}{c}\right)$$

是常负的.

(4) $$V = \int_0^{x_1}\frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1, 0, 0)dx_1 + \int_0^{x_2}\frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1, x_2, 0)dx_2$$

$$+ \int_0^{x_3}\frac{\partial V}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3)dx_3 = \int_0^{x_1}\frac{1}{c}x_1^m dx_1$$

$$+ \int_0^{x_2}\left[(x_1 + cx_2)^m + \frac{b}{c}x_2\right]dx_2$$

$$+\int_0^{x_3}\left[x_3+bx_2+\left(-b+\frac{1}{c}\right)x_2\right]dx_3$$

$$=\frac{1}{c(m+1)}x_1^{m+1}+\frac{1}{c(m+1)}(x_1+cx_2)^{m+1}$$

$$+\frac{1}{2}\left(x_3+\frac{x_2}{c}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{1}{c^2}[bc-1]x_2^2,$$

如果 $c>0$, m 是奇数，且 $b>\frac{1}{c}$，则系统 (2.41) 的平凡解是全局稳定的.

例 3：考虑

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=x_3,\\ \dot{x}_3=-3x_1^2x_3-2x_2-6x_1x_2^2-x_1^3.\end{cases}\tag{2.42}$$

(1) $$\frac{\partial H}{\partial x_1}=\int\frac{\partial}{\partial x_1}g(x_1,x_2,x_3)dx_2=\int(6x_1x_3+6x_2^2+3x_1^2)dx_2$$

$$=6x_1x_2x_3+2x_2^3+3x_1^2x_2,$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_2}=3x_1^2x_3+2x_2+6x_1x_2^2+x_1^3,$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_3}=x_3+\int\frac{\partial}{\partial x_3}g(x_1,x_2,x_3)dx_2=x_3+3x_1^2x_2.$$

(2) $$\frac{\partial V}{\partial x_1}=6x_1x_2x_3+2x_2^3+3x_1^2x_2+f_1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2}=3x_1^2x_3+2x_2+6x_1x_2^2+x_1^3+f_2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3}=x_3+3x_1^2x_2+f_3.$$

(3) $$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\frac{\partial V}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt}$$

$$=\frac{\partial V}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial V}{\partial x_2}x_3-(3x_1^2x_3+2x_2+6x_1x_2^2+x_1^3)$$

$$\times\frac{\partial V}{\partial x_3}=(6x_1x_2x_3+2x_2^3+2x_1^2x_2+f_1)x_2$$

$$+(3x_1^2x_3+2x_2+6x_1x_2^2+x_1^3+f_2)x_3$$

$$
\begin{aligned}
&-(x_3+3x_1^2x_2+f_3)(3x_1^2x_3+2x_2+6x_1x_2^2+x_1^3)\\
=&(6x_1x_2^2-9x_1^4x_2)x_3+(2x_2^3-18x_1^3x_2-3x_1^5)x_2\\
&-3x_1^2x_2^2+x_2f_1+x_3f_2-f_3(3x_1^2x_3+2x_3\\
&+6x_1x_2^2+x_1^3).
\end{aligned}
$$

如果取

$$
\begin{aligned}
f_1&=(-2x_2^3+18x_1^3x_2^2+3x_1^5),\\
f_2&=(-6x_1x_2^2+9x_1^4x_2),\\
f_3&=0,
\end{aligned}
$$

则 $\dot{V}=-3x_1^2x_2^2$ 是负常的。

(4) $$V=\int_0^{x_1}\frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1,0,0)\,dx_1+\int_0^{x_2}\frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1,x_2,0)\,dx_2+\int_0^{x_3}\frac{\partial V}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)\,dx_3=\frac{1}{2}(x_3+3x_1^2x_2)^2+\left(x_2+\frac{1}{2}x_1^3\right)^2+\frac{1}{4}x_1^6.$$

这是全平面正定的李雅普诺夫函数，故系统 (2.42) 的零解是全局渐近稳定的。

§3. 具有分离变量的任意阶非线性系统的全局稳定性[15],[16]

研究自治的向量微分方程

$$x'=f(x)\qquad (f(0)=0),\tag{3.1}$$

这里 $f(x)$ 有如下形式

$$f(x)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}f_{1j}(x_j)\\ \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}f_{nj}(x_j)\end{pmatrix}$$

或者将 (3.1) 写成系统

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^{n} f_{sj}(x_j), \qquad s = 1, \cdots, n, \tag{3.2}$$

如果 $f_{sj}(x_j)$ 是线性函数，即

$$f_{sj}(x_j) = a_{sj}x_j,$$

那么系统 (3.2) 的零解的全局渐近稳定性的充分必要条件是系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的所有特征值具有负实部.

李森林给出了非线性系统 (3.2) 的零解全局稳定性的充分条件，下面介绍他的工作.

设常数

$$a_s > 0, \ b_s > 0, \ s = 1, \cdots, n.$$

定义函数

$$\varphi_s(x_s) = \begin{cases} a_s, & \text{当 } x_s \geqslant 0, \\ -b_s, & \text{当 } x_s < 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

定理 3.1: 设 $f_{sj}(x_j)$ 连续，并保证 (3.2) 的解的唯一性，$f_{sj}(0) = 0$，且存在 $\varphi_s(x_s)$ 使有

$$\sum_{s=1}^{n} \varphi_s(x_s) f_{sj}(x_j) < 0, \quad \text{当 } x_j \neq 0, j = 1, \cdots, n, \tag{3.4}$$

则 (3.2) 的零解为全局稳定.

在证明定理之前我们先指出以下事实，如果我们固定 $x_j = x_j^0 \neq 0$，并让剩下的 x_s $(s \neq j)$ 变动，那么和

$$\sum_{s=1}^{n} \varphi_s(x_s) f_{sj}(x_j)$$

显然最多有 $2(n-1)$ 个不同的负值，这是由于当 $x_s (s \neq j)$ 取种种数值时，而 $\varphi_s(x_s)$ 只可能取 a_s 或 $-b_s$，所以我们得到

$$\varphi_j(x_j^0) f_{jj}(x_j^0) + \sum_{s \neq j} \varphi_s(x_s) f_{sj}(x_j^0) \leqslant -k_j(x_j^0) < 0. \tag{3.5}$$

证: 作函数

$$V(\boldsymbol{x}) = V(x_1, \cdots, x_n) = \varphi_1(x_1)x_1 + \cdots + \varphi_n(x_n)x_n, \quad (3.6)$$

由 (3.3) 知 $\varphi_s(x_s)x_s > 0$, 当 $x_s \neq 0$ 时; 且 $V(x)$ 为 $x_1, \cdots, x_n$ 的无限大正定函数, 而 $V(\boldsymbol{x})$ 为 $x_1, \cdots, x_n$ 的一次式, 故易知 $V(x)$ 为 $x_1, \cdots, x_n$ 的连续函数.

我们考虑系统 (3.2) 的任意的一个非零解

$$\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}^0, t_0) \ [\boldsymbol{x}(t_0; \boldsymbol{x}^0, t_0) = \boldsymbol{x}^0 \neq 0],$$

首先我们要证明

$$V[\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)] < V(\boldsymbol{x}^0), \quad 当 t > t_0. \quad (3.7)$$

因为由方程 (2)

$$\left.\frac{dx_s}{dt}\right|_{t=t_0} = f_{s1}(x_1^0) + \cdots + f_{sn}(x_n^0) = l_s, \quad s = 1, \cdots, n,$$

故

$$\lim_{t \to t_0} \frac{x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0) - x_s^0}{t - t_0} = l_s.$$

故对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta$ 时,

有

$$l_s - \varepsilon < \frac{x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0) - x_s^0}{t - t_0} < l_s + \varepsilon,$$

即

$$x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0) < x_s^0 + (l_s + \varepsilon)(t - t_0). \quad (3.8)$$

$$x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0) > x_s^0 + (l_s - \varepsilon)(t - t_0). \quad (3.9)$$

而当 $x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0) > 0$, 则 $\varphi_s(x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)) = a_s > 0$. 由 (3.8) 有

$$\varphi_s[x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)]x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0) < \varphi_s[x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)]x_s^0 + (l_s + \varepsilon)(t - t_0)\varphi_s[x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)].$$

当 $x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0) < 0$, 则 $\varphi_s[x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)] = -b_s < 0$, 由 (3.9) 有

$$\varphi_s[x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)]x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0) < \varphi_s[x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)]x_s^0 + (l_s - \varepsilon)(t - t_0)\varphi_s[x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)],$$

因此, 上面两个不等式可以写成 ($\varepsilon_s = \pm\varepsilon$)

$$\varphi_s[x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)]x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0) < \varphi_s[x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)]x_s^0$$

$$+ (l_s + \varepsilon_i)(t - t_0)\varphi_s[x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)],$$

故

$$V[\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)] < \sum_{s=1}^{n} \varphi_s[x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)]x_s^0$$

$$+ (t - t_0)\sum_{s=1}^{n} \varphi_s[x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)](l_s + \varepsilon_i).$$

由于 $x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)$ 为 t 之连续函数，故若 $x_s^0 \neq 0$，则在 t_0 附近 $x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0) \neq 0$. 现在选取 δ，使得当 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta$ 时，每个非零分量 x_j^0 的正负号与相应分量 $x_j(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)$ 的正负号一致，即

$$\varphi_j(x_j(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)) = \varphi_j(x_j^0).$$

而

$$\sum_{s=1}^{n} \varphi_s[x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)]l_s = \sum_{s=1}^{n} \varphi_s[x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)]$$

$$\times [f_{s1}(x_1^0) + \cdots + f_{sn}(x_n^0)]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \varphi_s[x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)]f_{sj}(x_j^0)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\varphi_j(x_j^0)f_{jj}(x_j^0) + \sum_{s \neq j} \varphi_s[x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)]f_{sj}(x_j^0) \right]$$

$$\leqslant \sum_{j} - k_j(x_j^0).$$

（这里和号是对所有 $x_j^0 \neq 0$ 之 j 取的）. 故

$$V[x(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)] < \sum_{s=1}^{n} \varphi_s(x_s^0)x_s^0 + (t - t_0)$$

$$\times \left\{- \sum_{j} k_j(x_j^0) + \sum_{s=1}^{n} \varphi_s[x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)\varepsilon_i \right\},$$

而 $k_j(x_j^0) > 0$ 为定数，且 ε_i 可以任意小. 又 $\varphi_s[x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)]$ 有界 $(s = 1, \cdots, n)$. 故可选取 ε_i，使

$$- \sum_{j} k_j(x_j^0) + \sum_{s=1}^{n} \varphi_s[x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)]\varepsilon_i < 0,$$

因此，存在 T，使得

$$V[x(t;\ \boldsymbol{x}^0,\ t_0)] < V(\boldsymbol{x}^0),\quad t_0 < t \leqslant T.$$

下面要证明，对任何 $t > t_0$，(3.7) 式均成立。用反证法，若 (3.7) 式不成立，则存在 $t_2 > t_0$，使

$$V[x(t;\ \boldsymbol{x}^0,\ t_0)] < V(\boldsymbol{x}^0),\qquad \text{当 } t_0 < t < t_2,$$

$$V[x(t_2;\ \boldsymbol{x}^0,\ t_0)] = V(\boldsymbol{x}^0).$$

由于 $V[\boldsymbol{x}(t;\ \boldsymbol{x}^0,\ t_0)]$ 为 t 之连续函数，故在 $(t_0,\ t_2)$ 内存在 t_1，使在 $[t_0,\ t_2]$ 上，$V[\boldsymbol{x}(t;\ \boldsymbol{x}^0,\ t_0)]$ 有最小值

$$V[\boldsymbol{x}(t_1;\ \boldsymbol{x}^0,\ t_0)],\quad t_0 < t_1 < t_2.$$

我们设

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}(t_1;\ \boldsymbol{x}^0,\ t_0),\quad \boldsymbol{x}(t;\ \boldsymbol{x}',\ t_1) = \boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}^0,\ t_0),$$

如前指出

$$V[\boldsymbol{x}(t;\ \boldsymbol{x}^0,\ t_0)] = V[\boldsymbol{x}(t;\ \boldsymbol{x}',\ t_1)] < V(\boldsymbol{x}'),\ t_1 < t \leqslant t_1 + \delta_1,$$

此与 $V[\boldsymbol{x}(t_1;\ \boldsymbol{x}^0,\ t_0)]$ 为最小值矛盾，所以 (3.7) 式成立。

$$\text{记 } \lambda' = \min_s (a_s,\ b_s),\ \lambda'' = \max_s (a_s,\ b_s),$$

从函数 $V[\boldsymbol{x}(t;\ \boldsymbol{x}^0,\ t_0)]$（对 $t \geqslant \tau$）是 t 的单调减少函数直接得出：(3.2) 的平凡解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 是稳定的，这是因为

$$|\boldsymbol{x}(t;\ \boldsymbol{x}^0,\ t_0)| \leqslant \frac{1}{\lambda'} V(\boldsymbol{x}(t;\ \boldsymbol{x}^0,\ t_0))$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda'} V(\boldsymbol{x}(t_0;\ \boldsymbol{x}^0,\ t_0))$$

$$\leqslant \sqrt{n}\,\frac{\lambda''}{\lambda'}|\boldsymbol{x}^0| \leqslant \varepsilon \quad (t \geqslant t_0),$$

只要我们取

$$|\boldsymbol{x}^0| \leqslant \delta(\varepsilon) = \frac{\lambda'\varepsilon}{\lambda''\sqrt{n}},$$

从这个估计我们可以得出解 $x(t;\ x^0,\ t_0)$ 对 $t \geqslant t_0$ 都是有界的结论；极限

$$\lim_{t\to\infty} V[\boldsymbol{x}(t;\ \boldsymbol{x}^0,\ t_0)] = V_0 \geqslant 0$$

存在。

因为解有一个非空的 ω 极限集，故也存在一个 ω 极限轨线 $x_0(t)$，并且对每个固定的 t，我们可以找到一个单调增加的发散序列 $\{t_k\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}(t_k;\ \boldsymbol{x}^0,\ t_0) = \boldsymbol{x}_0(t),$$

也有

$$\lim_{k\to\infty} V[\boldsymbol{x}(t_k;\ \boldsymbol{x}^0,\ t_0)] = V[\boldsymbol{x}_0(t)].$$

因此，对所有 t，有

$$V[\boldsymbol{x}_0(t)] = V_0.$$

这就得出 $\boldsymbol{x}_0(t) \equiv \boldsymbol{0}$ 及 $V_0 = 0$. 因为函数 $V[\boldsymbol{x}(t;\ \boldsymbol{x}^0,\ t_0)]$ 沿着每个非平凡解是严格减少的，直接得出

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t;\ \boldsymbol{x}^0,\ t_0) = 0.$$

定理 3.1 证毕。

例： 当 $n = 2$ 时，(3.2) 为

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_{11}(x_1) + f_{12}(x_2), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_{21}(x_1) + f_{22}(x_2). \end{cases} \tag{3.10}$$

设常数 $a_s > 0,\ b_s > 0,\qquad s = 1,\ 2.$

定义函数

$$\varphi_1(x_1) = \begin{cases} a_1, & \text{当 } x_1 \geqslant 0, \\ -b_1, & \text{当 } x_1 < 0; \end{cases}$$

$$\varphi_2(x_2) = \begin{cases} a_2, & \text{当 } x_2 \geqslant 0, \\ -b_2, & \text{当 } x_2 < 0. \end{cases}$$

设系统 (3.10) 满足定理 3.1 的条件，取

$$V(x_1,\ x_2) = \varphi_1(x_1)x_1 + \varphi_2(x_2)x_2,$$

有 $V(0,\ 0) = 0$, $V(x_1,\ x_2) > 0$, 当 x_1, x_2 不同时为零时。且具有无限大性质，实际上

$$V(x_1, x_2) = \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = c, & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \\ -b_1x_1 + a_2x_2 = c, & x_1 < 0,\ x_2 \geqslant 0, \\ -b_1x_1 - b_2x_2 = c, & x_1 < 0,\ x_2 < 0, \\ a_1x_1 - b_2x_2 = c, & x_1 \geqslant 0,\ x_2 < 0. \end{cases}$$

对不同的 c 而言，以上定义的 $V(x_1, x_2) = c$ 为围绕原点的一族闭曲线，每条闭曲线由四条直线组成（如图 3 所示），如果 $c_1 > c_2$，则 $V(x_1, x_2) = c_1$ 包含

$$V(x_1, x_2) = c_2$$

在其内。设 $x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0)(s=1,2)$ 为当 $t = t_0$ 时通过点 $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ 的解，当 t 增加时 $V(x_s(t; \boldsymbol{x}^0, t_0))$ 不断减少，最后趋于零，即系统 (3.10) 的零解是全局渐近稳定的。

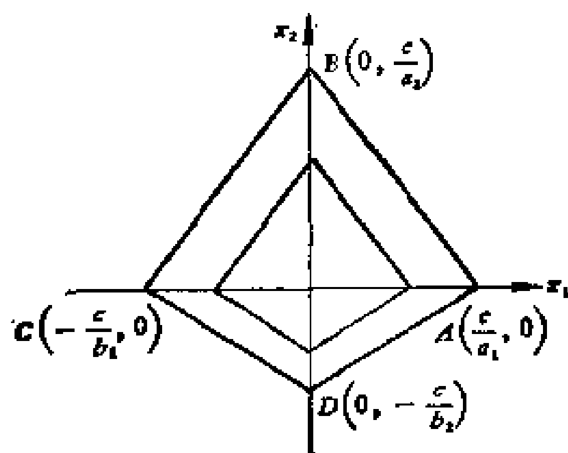


图 3

定理 3.2: 设 $f_{sj}(x_j)$ 为 x_j 的连续函数，$f_{sj}(0) = 0$，并保证 (3.2) 的解的唯一性，且 $x_jf_{jj}(x_j) < 0$，当 $x_j \neq 0$，$j = 1, \cdots, n$，并存在常数 $a > 0$，使

$$\left|\frac{f_{sj}(x_j)}{f_{jj}(x_j)}\right| \leqslant \frac{a^{j-s}}{n}, \quad s, j = 1, 2, \cdots, n,\ s \neq j,$$

则 (3.2) 的零解为全局稳定。

证: 只须在 (3.3) 中之 a_s 换为 a^s，b_s 换为 a^s. 则当 $x_j \neq 0$，有

$$\sum_{s=1}^{n} \varphi_s(x_s)f_{sj}(x_j) = \varphi_j(x_j)f_{jj}(x_j) + \sum_{s \neq j} \varphi_s(x_s)f_{sj}(x_j)$$

$$= |\varphi_j(x_j)f_{jj}(x_j)| \left\{-1 + \sum_{s \neq j} \frac{\varphi_s(x_s)f_{sj}(x_j)}{|\varphi_j(x_j)f_{jj}(x_j)|}\right\}$$

$$\leqslant |\varphi_j(x_j)f_{jj}(x_j)| \left\{-1 + \sum_{s \neq j} \left|\frac{\varphi_s(x_s)}{\varphi_j(x_j)}\right| \left|\frac{f_{sj}(x_j)}{f_{jj}(x_j)}\right|\right\}$$

$$\leqslant |\varphi_j(x_j)f_{jj}(x_j)| \left\{-1 + \sum_{s \neq j} a^{s-j} \frac{a^{j-s}}{n}\right\}$$

$$= -n^{-1}|\varphi_j(x_j)f_{jj}(x_j)| < 0,$$

故 (3.4) 成立. 由定理 3.1 即得定理 3.2 的结果.

将定理 3.1 用到线性系统,

$$x' = Ax, \qquad A = (a_{ij}), \quad i, j = 1, \cdots, n, \tag{3.11}$$

得出了使矩阵 A 的所有特征值具有负实部的一个充分条件.

定理 3.3: 设

$$a_{jj} < 0, \qquad j = 1, \cdots, n,$$

并存在 $a_j > 0$, $b_j > 0$ $(j = 1, \cdots, n)$, 使满足下列不等式

$$a_j a_{jj} + \sum_{s \neq j}^{n} \varphi_s(x_s) a_{sj} < 0,$$

$$-b_j a_{jj} + \sum_{s \neq j} \varphi_s(x_s) a_{sj} > 0 \tag{3.12}$$

$$(j = 1, \cdots, n),$$

则 $|a_{sj} - \lambda\delta_{sj}| = 0$ 的根均具有负实部.

证: 我们用 $x_j \neq 0$ 乘 (3.12) 中相应不等式,即

$$当\ x_j > 0,\ a_j a_{jj} x_j + \sum_{s \neq j}^{n} \varphi_s(x_s) a_{sj} x_j < 0,$$

$$当\ x_j < 0,\ -b_j a_{jj} x_j + \sum_{s \neq j}^{n} \varphi_s(x_s) a_{sj} x_j < 0.$$

注意到 $\varphi_j(x_j)$ 的定义(由 (3.3)), 即

$$当\ x_j \neq 0,\ 有 \sum_{s=1}^{n} \varphi_s(x_s) a_{sj} x_j < 0, \quad j = 1, \cdots, n,$$

即 (3.4) 成立. 由定理3.1知系统 (3.11) 的零解为全局稳定, 因而 $|a_{sj} - \lambda\delta_{sj}| = 0$ 的根均具有负实部.

定理 3.4: 设在 (3.11) 中有

$$a_{jj} < 0,\ j = 1, \cdots, n,\ 令$$

$$a = \max_{j=2,\cdots,n} \left\{ \max_{s=1,\cdots,n-1} \left| \frac{n a_{sj}}{a_{jj}} \right|^{\frac{1}{j-s}} \right\},\ j > s,$$

$$\frac{1}{b}=\max_{j=1,\cdots,n-1}\left\{\max_{s=2,\cdots,n}\left|\frac{na_{sj}}{a_{jj}}\right|^{\frac{1}{s-j}}\right\},\ s>j,$$

且 $b\geqslant a>0$，则 $|a_{sj}-\lambda\delta_{sj}|=0$ 的根均具有负实部。

证：由假设

$$a\geqslant\left|\frac{na_{sj}}{a_{jj}}\right|^{\frac{1}{j-s}},\ \text{即}\ \frac{a^{j-s}}{n}\geqslant\left|\frac{a_{sj}}{a_{jj}}\right|,\ j>s,j=2,\cdots,n,$$

$$\frac{1}{b}\geqslant\left|\frac{na_{sj}}{a_{jj}}\right|^{\frac{1}{s-j}},\ \text{即}\ \frac{b^{j-s}}{n}\geqslant\left|\frac{a_{sj}}{a_{jj}}\right|,\ s>j,j=1,\cdots,n-1.$$

取 $\alpha_s=a^s$，$b_s=a^s$，$s=1,\cdots,n$，则

$$\alpha_j a_{jj}+\sum_{s\neq j}\varphi_s(x_s)a_{sj}\leqslant a^j a_{jj}+\sum_{s\neq j}|\varphi_s(x_s)||a_{sj}|$$

$$=a^j|a_{jj}|\left\{-1+\sum_{s\neq j}\frac{a^s}{a^j}\left|\frac{a_{sj}}{a_{jj}}\right|\right\}$$

$$=a^j|a_{jj}|\left\{-1+\sum_{s=1}^{j-1}a^{s-j}\left|\frac{a_{sj}}{a_{jj}}\right|+\sum_{s=j+1}^{n}a^{s-j}\left|\frac{a_{sj}}{a_{jj}}\right|\right\}$$

$$\leqslant a^j|a_{jj}|\left\{-1+\sum_{s=1}^{j-1}a^{s-j}\frac{a^{j-s}}{n}+\sum_{s=j+1}^{n}a^{s-j}\frac{b^{j-s}}{n}\right\}$$

$$\leqslant a^j|a_{jj}|\left\{-1+\frac{j-1}{n}+\sum_{s=j+1}^{n}a^{s-j}\frac{a^{j-s}}{n}\right\}$$

$$(\because\ a\leqslant b,\ s>j,\ \text{故}\ a^{j-s}\geqslant b^{j-s})$$

$$=a^j|a_{jj}|\left\{-1+\frac{j-1}{n}+\frac{n-j}{n}\right\}<0,$$

同理可证

$$-b_j a_{jj}+\sum_{s\neq j}\varphi_s(x_s)a_{sj}>0,$$

故(3.12)满足，由定理3.3，即得所求的结论。

以 $|a_{sj}|$ 表实数 a_{sj} 的绝对值，作行列式

$$A=\begin{vmatrix}a_{11}, & |a_{21}| & \cdots & |a_{n1}|\\ |a_{12}|, & a_{22} & \cdots & |a_{n2}|\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ |a_{1n}| & |a_{2n}| & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}, \tag{3.13}$$

令 A_{sj} 表在 A 中 (s, j) 元的余因子，例如 A_{13} 为 A 中 $(1, 3)$ 元即 $|a_{31}|$ 的余因子。

定理 3.5: 设在 (3.13) 中之 A, A_{1j} 满足条件 $AA_{1j} < 0$ $(j = 1, \cdots, n)$，则方程 $|a_{sj} - \lambda\delta_{sj}| = 0$ 的根均具有负实部。

证: 我们只须证明存在 $a_s > 0$, $b_s > 0$ $(s = 1, \cdots, n)$，使 (3.12) 成立即可。

今任取 $\delta_1 > 0$，然后再选择足够小的 $\delta_s > 0$ $(s=2, \cdots, n)$，使得 $-\delta_1 A_{1s} - \delta_2 A_{2s} - \cdots - \delta_n A_{ns}$ 的符号与 $-\delta_1 A_{1s}$ 的符号相同 $(s = 1, \cdots, n)$。由于 $A_{1s} \neq 0$，而 A_{is} 均为有限数，故如此之 $\delta_2, \cdots, \delta_n$ 是存在的。

作方程组

$$
\begin{aligned}
a_1 a_{11} + a_2|a_{21}| + \cdots + a_n|a_{n1}| &= -\delta_1, \\
a_1|a_{12}| + a_2 a_{22} + \cdots + a_n|a_{n2}| &= -\delta_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_1|a_{1n}| + a_2|a_{2n}| + \cdots + a_n a_{nn} &= -\delta_n,
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

其解为

$$
a_s = \frac{1}{A}(-\delta_1 A_{1s} - \delta_2 A_{2s} - \cdots - \delta_n A_{ns}) \quad (s = 1, \cdots, n). \tag{3.15}
$$

由于 $\delta_s (s = 2, \cdots, n)$ 的选择，及 $AA_{1s} < 0$, $s = 1, \cdots, n$，故得 $a_s > 0$，今取 $b_s = a_s$ $(s = 1, \cdots, n)$，则有

$$
a_j a_{jj} + \sum_{s \neq j} \varphi_s(x_s)\, a_{sj} \leqslant a_j a_{jj} + \sum_{s \neq j} a_s |a_{sj}| = -\delta_j < 0.
$$

又可证

$$
-a_j a_{jj} + \sum_{s \neq j} \varphi_s(x_s) a_{sj} > 0,
$$

亦即 (3.12) 成立，由定理 3.3 得 $|a_{sj} - \lambda\delta_{sj}| = 0$ 之根均具有负实部。

当 $x_j \neq 0$，令

$$
\left|\frac{f_{sj}(x_j)}{f_{jj}(x_j)}\right| \leqslant a_{sj} \quad (s, j = 1, \cdots, n) \text{ 但 } s \neq j,
$$

且

$$A^* = \begin{vmatrix} -1 & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & -1 & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & -1 \end{vmatrix}, \tag{3.16}$$

在 A^* 中其(1,5)元的余因子以 A^*_{1s} 记之。例如 A^*_{13} 乃(1,3)元即 a_{31} 的余因子。

定理 3.6: 设 $f_{sj}(x_j)$ 连续，$f_{sj}(0)=0$，当 $x_j \neq 0$，$x_j f_{jj}(x_j)<0$ $(s, j=1,\cdots,n)$，并保证(3.2)的解 的存在与唯一性，且 $A^* A^*_{1s}<0$ $(s=1,\cdots,n)$，则(3.2)的零解为全局稳定。

证: 我们只需证明，能找到 $a_s>0$，$b_s>0$ $(s=1,\cdots,n)$ 使(3.4)成立即可。今 $A^*A^*_{1s}<0$，故由定理 3.5 的证法，知对任给 $\delta_1>0$，可以找到 $\delta_s>0(s=2,\cdots,n)$，使

$$a_j(-1)+\sum_{s\neq j} a_s a_{sj} = -\delta_j,$$

其中

$$a_s = \frac{1}{A^*}(-\delta_1 A^*_{1s} - \cdots - \delta_n A^*_{ns}) > 0 \quad (s=1,\cdots,n),$$

并取 $b_s = a_s$，又因 $x_j\varphi_j(x_j)>0$，$x_j f_{jj}(x_j)<0$，故当 $x_j \neq 0$ 时，

$$\varphi_j(x_j) f_{jj}(x_j) < 0 \quad (j=1,\cdots,n),$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n} \varphi_s(x_s) f_{sj}(x_j) &= \varphi_j(x_j) f_{jj}(x_j) + \sum_{s\neq j} \varphi_s(x_s) f_{sj}(x_j) \\ &\leqslant |\varphi_j(x_j) f_{jj}(x_j)| \left\{-1+\sum_{s\neq j}\left|\frac{\varphi_s(x_s)}{\varphi_j(x_j)}\right| \left|\frac{f_{sj}(x_j)}{f_{jj}(x_j)}\right|\right\} \\ &\leqslant |\varphi_j(x_j) f_{jj}(x_j)| \left\{-1+\sum_{s\neq j}\frac{a_s}{a_j} a_{sj}\right\} \\ &= |\varphi_j(x_j) f_{jj}(x_j)| \frac{1}{a_j}\left\{a_j(-1)+\sum_{s\neq j} a_s a_{sj}\right\} \\ &= \frac{1}{a_j}|\varphi_j(x_j) f_{jj}(x_j)| \{-\delta_j\} < 0.\end{aligned}$$

当 $x_j \neq 0$，$j=1,\cdots,n$。故(3.4)成立。亦即(3.2)的零解为全局稳定。

第九章　有广义能量函数的系统

§1. 能量度量算法

沃尔 (Wall)[17][18] 的能量度量算法简单地可以归纳成下面六步:

第一步. 将所描写的系统写成一阶联立微分方程组

$$\dot{x}_i = F_i(\boldsymbol{x}), \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{1.1}$$

这里 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$.

第二步. 将方程组 (1.1) 写成如下形式

$$\frac{dx_i}{dx_j} = \frac{F_i(\boldsymbol{x})}{F_j(\boldsymbol{x})}, \qquad j > i. \tag{1.2}$$

这里共有 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个方程.

第三步. 再将以上方程组写成

$$F_j(\boldsymbol{x})dx_i = F_i(\boldsymbol{x})dx_j, \quad j > i. \tag{1.3}$$

第四步. 用适当的代换及加法, 将以上方程组 (1.3) 化为

$$w = w_1(\boldsymbol{x})dx_1 + w_2(\boldsymbol{x})dx_2 + \cdots + w_n(\boldsymbol{x})dx_n = 0, \tag{1.4}$$

显然, 这里的 $w_1(\boldsymbol{x}), \cdots, w_n(\boldsymbol{x})$ 由 (1.3) 中 dx_i 前面的系数决定.

第五步.

$$V(\boldsymbol{x}) = \int_0^{x_1} w_1(\tau_1, 0\cdots 0)\, d\tau_1 + \int_0^{x_2} w_2(x_1, \tau_2, 0\cdots 0)d\tau_2 + \cdots + \int_0^{x_n} w_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, \tau_n)d\tau_n. \tag{1.4*}$$

第六步. 算出函数 $V(\boldsymbol{x})$ 的全导数

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \cdots + \frac{\partial V(x)}{\partial x_n}\dot{x}_n$$

$$= \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} F_1(\boldsymbol{x}) + \cdots + \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} F_n(\boldsymbol{x}).$$

由所得的 $V(\boldsymbol{x})$ 及 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$，再利用稳定性的有关定理，可以得出系统平凡解稳定性的结论.

为了熟练掌握这个方法，下面举出三个例子：

例 1：考虑方程

$$\ddot{x} + \dot{x} - xf(x) = 0. \tag{1.5}$$

第一步．将方程 (1.5) 写成下面的一阶方程组

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 &&= F_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 f(x_1) - x_2 &&= F_2(x_1, x_2). \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

第二步．将 (1.6) 写成

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{x_1 f(x_1) - x_2}. \tag{1.7}$$

第三步．将 (1.7) 写成

$$-(x_1 f(x_1) - x_2)dx_1 + x_2 dx_2 = 0. \tag{1.8}$$

第四步．由 (1.8) 得出

$$w_1(x_1, x_2) = -x_1 f(x_1) + x_2,$$
$$w_2(x_1, x_2) = x_2.$$

第五步．

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{x_1} w_1(\tau_1, 0)d\tau_1 + \int_0^{x_2} w_2(x_1, \tau_2)d\tau_2 \\ &= -\int_0^{x_1} \tau_1 f(\tau_1)d\tau_1 + \int_0^{x_2} \tau_2 d\tau_2 \\ &= -\int_0^{x_1} \tau_1 f(\tau_1)d\tau_1 + \frac{1}{2} x_2^2. \end{aligned}$$

第六步．算出

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = -x_2^2.$$

应用拉萨尔 (Lassalle) 及莱夫谢茨 (Lefschetz) 的定理 VIII[19]，如果

$$-\int_0^{x_1} \tau_1 f(\tau_1)d\tau_1 > 0,$$

则系统 (1.6) 的平凡解是渐近稳定的.

例 2: 考虑更一般的方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)\frac{dx}{dt}+g(x)=0. \tag{1.9}$$

第一步. 将方程 (1.9) 写成

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=x_2 &&=F_1(x_1,x_2),\\ \frac{dx_2}{dt}&=-f(x_1)x_2-g(x_1)&&=F_2(x_1,x_2).\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

第二步. 将 (1.10) 写成

$$\frac{dx_1}{dx_2}=\frac{x_2}{-f(x_1)x_2-g(x_1)}. \tag{1.11}$$

第三步. 由 (1.11) 得

$$[f(x_1)x_2+g(x_1)]dx_1+x_2dx_2=0.$$

第四步. $w_1(x_1,x_2)=f(x_1)x_2+g(x_1)$, $w_2(x_1,x_2)=x_2$.

第五步.

$$\begin{aligned}V(x_1,x_2)&=\int_0^{x_1}w_1(\tau_1,0)\,d\tau_1+\int_0^{x_2}w_2(x_1,\tau_2)d\tau_2\\ &=\int_0^{x_1}g(\tau_1)d\tau_1+\frac{1}{2}x_2^2.\end{aligned}$$

显然这里 $V(x_1,x_2)$ 恰为系统 (1.9) 的总能量.

第六步.

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2=-f(x_1)x_2^2,$$

所以,只要满足

① $\int_0^x g(\tau_1)d\tau_1>0$, 当 $x\neq 0$ 时,

② $\int_0^x g(\tau_1)d\tau_1\to\infty$, 当 $x\to\infty$ 时,

③ $f(x)>0$,

则系统 (1.10) 的平凡解是全局稳定的.

例 3: 考虑方程

$$\dddot{x} + (1 + \dot{x}^2)\ddot{x} + \dot{x} + x = 0. \tag{1.12}$$

第一步．将方程 (1.12) 写成下面的方程组

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= x_3, \\
\dot{x}_3 &= -x_2^2 x_3 - x_3 - x_2 - x_1.
\end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

第二步．由 (1.13) 得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dx_2} &= \frac{x_2}{x_3}, \\
\frac{dx_2}{dx_3} &= \frac{x_3}{-x_2^2 x_3 - x_3 - x_2 - x_1}, \\
\frac{dx_1}{dx_3} &= \frac{x_2}{-x_2^2 x_3 - x_3 - x_2 - x_1}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

第三步．再将 (1.14) 写成

$$x_3 dx_1 - x_2 dx_2 = 0, \tag{a}$$

$$x_3 dx_3 + (x_2^2 x_3 + x_3 + x_2 + x_1) dx_2 = 0, \tag{b}$$

$$x_2 dx_3 + (x_2^2 x_3 + x_3 + x_2 + x_1) dx_1 = 0. \tag{c}$$

由 (a) 式得 $x_3 dx_1 = x_2 dx_2$ 代入 (c) 式，得

$$x_2 dx_3 + (x_2^3 + x_2) dx_2 + (x_2 + x_1) dx_1 = 0, \tag{d}$$

由 (b) + (d) 得

$$\begin{aligned}
(x_2 + x_1) dx_1 + (x_2^2 x_3 + 2x_2 + x_1 + x_2^3 + x_3) dx_2& \\
+ (x_2 + x_3) dx_3 = 0&.
\end{aligned}$$

第四步．因此，

$$\begin{aligned}
w_1(\boldsymbol{x}) &= x_1 + x_2, \\
w_2(\boldsymbol{x}) &= x_2^2 x_3 + 2x_2 + x_1 + x_2^3 + x_3, \\
w_3(\boldsymbol{x}) &= x_3 + x_2.
\end{aligned}$$

第五步．

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{x_1} \tau_1 d\tau_1 + \int_0^{x_2} (x_1 + 2\tau_2 + \tau_2^3) d\tau_2 + \int_0^{x_3} (x_2 + \tau_3) d\tau_3 \\
&= \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{4} x_2^4.
\end{aligned}$$

第六步．$\dot{V} = -x_2^2 x_3^2$

由拉萨尔及莱夫谢茨定理 VIII[29]，得出系统是全局稳定的．

由以上作法，可以指出，这里所作出的V与下面的因素有关：

1. 与第一步中状态变量的选择有关，
2. 与第四步中代换的选择有关，
3. 与第五步中积分线路的选择有关。

§2. 矩 阵 形 式

斯图尔特 (Stewart)[20][21] 指出，能量度量算法的步骤可以由矩阵式子表示出来，这种矩阵表示式被称为算子变换方法。现在简单地陈述如下：

先考虑能量度量算法的前四步：

第一步．将系统写成

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1, \\ &\cdots\cdots \\ \dot{x}_n &= F_n. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

第二步．

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dx_2} = \dfrac{F_1}{F_2}, \quad \dfrac{dx_2}{dx_3} = \dfrac{F_2}{F_3}, \\ \cdots \dfrac{dx_{n-2}}{dx_{n-1}} = \dfrac{F_{n-2}}{F_{n-1}}, \quad \dfrac{dx_{n-1}}{dx_n} = \dfrac{F_{n-1}}{F_n}, \\ \dfrac{dx_1}{dx_3} = \dfrac{F_1}{F_3}, \quad \dfrac{dx_2}{dx_4} = \dfrac{F_2}{F_4}, \\ \cdots \dfrac{dx_{n-2}}{dx_n} = \dfrac{F_{n-2}}{F_n}, \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ \dfrac{dx_1}{dx_{n-1}} = \dfrac{F_1}{F_{n-1}}, \quad \dfrac{dx_2}{dx_n} = \dfrac{F_2}{F_n}, \\ \dfrac{dx_1}{dx_n} = \dfrac{F_1}{F_n}. \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

第三步．

$$
\left.\begin{array}{l}
-F_2dx_1+F_1dx_2=0,\\
-F_3dx_1+F_1dx_3=0,\\
\vdots\\
-F_ndx_1+F_1dx_n=0,\\
-F_3dx_2+F_2dx_3=0,\\
-F_4dx_2+F_2dx_4=0,\\
\vdots\\
-F_ndx_2+F_2dx_n=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
-F_ndx_{n-1}+F_{n-1}dx_n=0.
\end{array}\right\} \quad (2.3)
$$

第四步中算式要求通过这 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个方程的代换及加法，化为一个式子 (1.4)，沃尔曾指出，选择特殊的代换可以成功地作出李雅普诺夫函数．因此，这对决定系统的稳定性是非常有用的．算子变换方法可以使这些代换用一个直接的方法作出，但是为了清楚起见，我们先暂缓对它们的讨论，而首先考虑方程 (2.3) 的加法．

容易验证，方程 (2.3) 的左边部分的和可以写成

$$
[1,\cdots,1]\begin{bmatrix} 0 & F_1dx_2 & \cdots & F_1dx_n \\ -F_2dx_1 & 0 & \cdots & F_2dx_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -F_ndx_1 & -F_ndx_2 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}=0. \quad (2.4)
$$

注意 1: 在 (2.4) 式中，左边乘 $[1,\cdots,1]$ 的作用在于把每个列相加，结果为 $[-F_2dx_1-\cdots-F_ndx_1,\cdots,F_1dx_n+\cdots+F_{n-1}dx_n]$(*)，然后在右边乘上 $\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ 等于把所有(*)的元素相加，所以 (2.4) 式体现了 (2.3) 式左边部分的和．

注意 2: 矩阵中所出现的 0，表示"Fdx"在 (2.3) 中是不出现

的.

现在我们不难看出 (2.4) 式可以写成

$$[F_1, \cdots, F_n]\begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ -1 & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} = 0. \tag{2.5}$$

令
$$T = \begin{bmatrix} 0 & & -1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

则 (2.5) 式可以写成

$$F'T'dx = 0, \tag{2.7}$$

由于 (1.4), 上式可以写成

$$w'dx = 0. \tag{2.8}$$

这样, 由前四步所引出的 w, 我们可以由 F 通过矩阵变换直接确定

$$w = TF. \tag{2.9}$$

至于第五步,就是以前所取的积分,如果我们定义一个特殊的积分运算

$$I_i[h(x)] = \int_0^{x_i} h(x_1, \cdots, x_{i-1}, \tau_i, 0, \cdots, 0)d\tau_i, \tag{2.10}$$

则 (1.4)* 式可以写成

$$V(x) = I_1 w_1 + \cdots + I_n w_n, \tag{2.11}$$

或者,用矩阵形式写为

$$V(x) = I'w, \tag{2.12}$$

将 (2.9) 代入 (2.11) 中,得

$$V(x) = I'TF, \tag{2.13}$$

这样, 就可以从系统直接来作出李雅普诺夫函数. 这里 F 由第一步决定, I' 由第五步决定, 至于第二、三和四步, 可以由 T 作一些变化而得到. 这在以后将进一步提到.

第六步写成

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \dot{x}_1 \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} + \cdots + \dot{x}_n \frac{\partial V(x)}{\partial x_n}, \tag{2.14}$$

如果我们定义一个偏微分运算 D,

$$D_i[h(\boldsymbol{x})] = \frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}, \tag{2.15}$$

则 (2.14) 式可以写成

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = (\dot{x}_1 D_1 + \cdots + \dot{x}_n D_n) V(x), \tag{2.16}$$

或者,其矩阵形式为

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \dot{x}' D V. \tag{2.17}$$

以 (2.1) 及 (2.13) 代入,得

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = F' D V = F' D I' T F, \tag{2.18}$$

这样,可以直接从 $V(\boldsymbol{x})$ 或系统的 F 给出 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$.

总结,如果 n 阶系统为

$$F = \begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ F_n(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix},$$

则

$$V(\boldsymbol{x}) = I' T F,$$
$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = F' D I' T F.$$

这里

$$T = \begin{bmatrix} 0 & & -1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix},$$

并且 I 是由 (2.10) 所定义的特别的积分向量, D 是由 (2.15) 所定义的微分算子向量.

以下我们作出例子,怎样作出 T 的变形,以便得到李雅普诺夫函数.

例: 考虑

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -(x_2^2 + 1)x_3 - x_2 - x_1. \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

沃尔得到

$$V = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{4}x_2^4, \qquad (2.20)$$

$$\dot{V} = -(x_2x_3)^2.$$

这样，就决定了系统是全局稳定的.

但如果利用没有变形的 T. 我们得到

$$V = I'TF = [I_1, I_2, I_3]\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -(x_2^2+1)x_3 - x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2,$$

$$\dot{V} = -(x_2x_3)x_2^2 - x_2^2x_3^2.$$

虽然 V 是正定的，但要求 $\dot{V}$ 是负的，仅当 $x_2x_3 > 0$，这就比沃尔方法增加了不必要的限制，$x_2x_3 > 0$.

但如果取

$$T^* = \begin{bmatrix} 0 & -(x^2+1) & -1 \\ (x^2+1) & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

给出

$$V = I'T^*F = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{4}x_2^4,$$

$$\dot{V} = -x_2^2x_3^2,$$

这就与沃尔所得的结果相一致.

在线性系统中的应用.

劳思-赫维茨条件已经给出了线性系统全局稳定性的充分必要条件，人们有理由期望，作李雅普诺夫函数的方法可以在线性情形给出劳思-赫维茨准则，一般 n 阶线性系统写成

$$\dot{x} = Ax, \qquad (2.21)$$

这里 A 是常量矩阵

$$F = Ax. \qquad (2.22)$$

将 (2.22) 代入 (2.12) 及 (2.18)，我们给出线性系统的李雅普诺夫函数

$$V = I'TAx, \tag{2.23}$$

$$\dot{V} = x'A'DV = x'A'DI'TAx. \tag{2.24}$$

因为对于线性系统，T 及 A 都是常量矩阵，我们定义

$$Q = TA.$$

(2.23) 式可以写成

$$V = [I_1, \cdots, I_n]\begin{bmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{n1} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= [I_1, \cdots, I_n]\begin{bmatrix} Q_{11}x_1 + \cdots + Q_{1n}x_n \\ \cdots\cdots \\ Q_{n1}x_1 + \cdots + Q_{nn}x_n \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

使用单位向量来完成求和，(2.25) 积分后其矩阵形式为

$$V = [1, \cdots, 1]\begin{bmatrix} \frac{Q_{11}}{2}x_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ Q_{21}x_1x_2 & \frac{Q_{22}}{2}x_2^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{n1}x_1x_n & Q_{n2}x_2x_n & \cdots & \frac{Q_{nn}}{2}x_n^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{2.26}$$

但是 (2.26) 可以写成

$$V = x'\begin{bmatrix} \frac{Q_{11}}{2} & & & \\ & \ddots & 0 & \\ Q_{21} & & \ddots & \\ \cdots & & & \\ Q_{n1} & \cdots & Q_{nn-1} & \frac{1}{2}Q_{nn} \end{bmatrix}x, \tag{2.27}$$

因为 V 是纯量，我们可以转置 (2.27)，得到

$$V = x'\begin{bmatrix} \frac{Q_{11}}{2} & \cdots & Q_{n1} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \frac{Q_{nn}}{2} \end{bmatrix}x. \tag{2.28}$$

将(2.27)式加(2.28)式，得到

$$2V = x'\begin{bmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{n1} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix} x = x'Q_0x, \tag{2.29}$$

这里 Q_0 可以从 Q 去掉上半个矩阵的元素，再由下半矩阵反射而得. 所以 Q_0 是一个对称矩阵.

$$\begin{aligned} 2\dot{V} &= \dot{x}'Q_0x + x'Q_0\dot{x} \\ &= x'A'Q_0x + x'Q_0Ax \\ &= x'(A'Q_0 + Q_0A)x. \end{aligned} \tag{2.30}$$

如果我们定义

$$C_0 = -[A'Q_0 + Q_0A], \tag{2.31}$$

则(2.30)式成为

$$2\dot{V} = -x'C_0x.$$

(2.31)式是李雅普诺夫第二方法用于线性系统的著名关系式. 通常的方法是假定 C_0 为最简单的形式(例如是单位矩阵)，然后解联立方程(2.31)来确定 Q_0 的未知元素. C_0 的适当选取保证了 $\dot{V}$ 的负定性，但是所求出的 Q_0 必须验证是正定的. 这个方法通常是对低阶系统而言的，随着 n 的增加，计算量就增大. 并且对于不同的 C_0，需要解不同的联立方程，而算子变换方法允许直接地作出 Q_0，随后算出 C_0. 以上是介绍沃尔等一系列的工作.

上面例子已经指出，如果 T^* 取得合适，那末就可以得到比用 T 时更好的李雅普诺夫函数. 用矩阵 T，体现了方程(2.3)中每个方程对作出李雅普诺夫函数时都起了同等的作用. 为了针对具体问题能得出最佳的李雅普诺夫函数，必须表现为方程(2.3)中每个方程所起的作用不同. 下面我们可以得出一个反对称矩阵，这个反对称矩阵中的元素，正好是乘在方程组(2.3)中每个方程前面的因子(一般为 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数). 适当地挑选反对称矩阵中的元素，即适当地选择乘在方程组(2.3)中每个方程前面的因子(即对每个方程适当地加权)，可以得出较好的李雅普诺夫函数. 下面先讨论 $n = 3$ 的情形，

当 $n=3$ 时，$\frac{n}{2}(n-1)=3$，故有三个联立方程

$$\left.\begin{array}{lr}-F_2dx_1+F_1dx_2 \qquad\qquad =0, & ① \\ -F_3dx_1 \qquad\qquad +F_1dx_3=0, & ② \\ \qquad\qquad -F_3dx_2+F_2dx_3=0. & ③\end{array}\right\} \tag{2.32}$$

如果将 (2.32) 中的① + ② + ③，可以写成

$$[1,1,1]\begin{bmatrix}-F_2dx_1 & F_1dx_2 & 0 \\ -F_3dx_1 & 0 & F_1dx_3 \\ 0 & -F_3dx_2 & F_2dx_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=0,$$

即

$$[F_1,F_2,F_3]\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dx_1\\dx_2\\dx_3\end{bmatrix}=0. \tag{2.33}$$

如果在 (2.32) 中 $a_1(\boldsymbol{x})\times$ ① $+a_2(\boldsymbol{x})\times$ ② $+a_3(\boldsymbol{x})\times$ ③ (这里 a_1, a_2, a_3 为 x_1, x_2, x_3 的函数)，可以写成

$$[a_1(\boldsymbol{x}),a_2(\boldsymbol{x}),a_3(\boldsymbol{x})]\begin{bmatrix}-F_2dx_1 & F_1dx_2 & 0 \\ -F_3dx_1 & 0 & F_1dx_3 \\ 0 & -F_3dx_2 & F_2dx_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=0,$$

即

$$[F_1,F_2,F_3]\begin{bmatrix}0 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dx_1\\dx_2\\dx_3\end{bmatrix}=0. \tag{2.34}$$

$$\text{记 } T^*=\begin{bmatrix}0 & -a_1 & -a_2 \\ a_1 & 0 & -a_3 \\ a_2 & a_3 & 0\end{bmatrix}$$

(2.34) 写成

$$[F_1,F_2,F_3]T'(a_1,a_2,a_3)\begin{bmatrix}dx_1\\dx_2\\dx_3\end{bmatrix}=0, \text{ 故 } w=T^*F.$$

这样一来，在方程 (2.32) 中每个方程上所乘的系数 a_i 可以体现在矩阵 T^* 中，我们称方程 (2.34) 为加权公式。

当 $n=4$ 时，$\frac{n}{2}(n-1)=6$，即有六个联立方程

$$\frac{dx_1}{dx_2}=\frac{F_1}{F_2},\quad \frac{dx_2}{dx_3}=\frac{F_2}{F_3},\quad \frac{dx_3}{dx_4}=\frac{F_3}{F_4},$$

$$\frac{dx_1}{dx_3}=\frac{F_1}{F_3},\quad \frac{dx_2}{dx_4}=\frac{F_2}{F_4},$$

$$\frac{dx_1}{dx_4}=\frac{F_1}{F_4},$$

即

$$\left.\begin{array}{llll}
-F_2dx_1+F_1dx_2 & & =0, & ① \\
-F_3dx_1 \qquad\qquad +F_1dx_3 & & =0, & ② \\
-F_4dx_1 & +F_1dx_4 & =0, & ③ \\
\qquad -F_3dx_2+F_2dx_3 & & =0, & ④ \\
\qquad -F_4dx_2 & +F_2dx_4 & =0, & ⑤ \\
\qquad\qquad -F_4dx_3 & +F_3dx_4 & =0. & ⑥
\end{array}\right\}\quad(2.35)$$

如果将 (2.35)中的① + ② + ③ + ④ + ⑤ + ⑥，可以写成

$$[1,1,1,1,1,1]\begin{bmatrix}
-F_2dx_1 & F_1dx_2 & 0 & 0 \\
-F_3dx_1 & 0 & F_1dx_3 & 0 \\
-F_4dx_1 & 0 & 0 & F_1dx_4 \\
0 & -F_3dx_2 & F_2dx_3 & 0 \\
0 & -F_4dx_2 & 0 & F_2dx_4 \\
0 & 0 & -F_4dx_3 & F_3dx_4
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=0,$$

即

$$[F_1,F_2,F_3,F_4]\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 0 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 0 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & 0
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dx_1\\dx_2\\dx_3\\dx_4\end{bmatrix}=0.\quad(2.36)$$

如果在 (2.35) 中 $a_1(x)\times$ ① $+a_2(x)\times$ ② $+\cdots+a_6(x)\times$ ⑥（这里 a_i 是 $x_1,\cdots,x_4$ 的函数），则可以写成

$$[a_1(x), a_2(x), \cdots, a_6(x)]\begin{bmatrix} -F_2dx_1 & F_1dx_2 & 0 & 0 \\ -F_3dx_1 & 0 & F_1dx_3 & 0 \\ -F_4dx_1 & 0 & 0 & F_1dx_4 \\ 0 & -F_3dx_2 & F_2dx_3 & 0 \\ 0 & -F_4dx_2 & 0 & F_2dx_4 \\ 0 & 0 & -F_4dx_3 & F_3dx_4 \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

其加权公式为

$$[F_1, F_2, F_3, F_4]\begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & 0 & a_4 & a_5 \\ -a_2 & -a_4 & 0 & a_6 \\ -a_3 & -a_5 & -a_6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ dx_4 \end{bmatrix} = 0,$$

令

$$T^* = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & 0 & a_4 & a_5 \\ -a_2 & -a_4 & 0 & a_6 \\ -a_3 & -a_5 & -a_6 & 0 \end{bmatrix},$$

上式写成

$$[F_1, F_2, F_3, F_4]T^*\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ dx_4 \end{bmatrix} = 0, \tag{2.37}$$

故 $w = T^*F$. 即 (2.35) 中每个方程所乘的系数也包含在矩阵 T^* 中，对一般 n 的情形，反对称矩阵 T^* 中包含有 $\frac{n}{2}(n-1)$ 个元素，正好与方程的个数相同.

例 1： 考虑方程组

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 && = F_1, \\
\dot{x}_2 &= x_3 && = F_2, \\
\dot{x}_3 &= -(x_2^2+1) - x_3 - x_2 - x_1 && = F_3.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.38)
$$

根据加权公式

$$
[F_1, F_2, F_3]\begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}
$$

$$
= [x_2, x_3, -(x_2^2+1)x_3 - x_2 - x_1]\begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \{-a_1x_3 + a_2[(x_2^2+1)x_3 + x_2 + x_1]\}dx_1 \\
&\quad + \{a_1x_2 + a_3[(x_2^2+1)x_3 + x_2 + x_1]\}dx_2 \\
&\quad + \{a_2x_2 + a_3x_3\}dx_3,
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
V = &\int_0^{x_1} a_2(\tau_1, 0, 0)\tau_1 d\tau_1 \\
&+ \int_0^{x_2}[a_1(x_1\tau_2, 0)\tau_2 + a_3(x_1, \tau_2, 0)(\tau_2 + x_1)]d\tau_2 \\
&+ \int_0^{x_3}\{a_2(x_1, x_2\tau_3)x_2 + a_3(x_1, x_2, \tau_3)\tau_3\}d\tau_3.
\end{aligned}
$$

在最简单的情形，可取 $a_1 = a_2 = a_3 = 1$，则

$$
V = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2,
$$

$$
\frac{dV}{dt} = -(x_2x_3)x_2^2 - x_2^2x_3^2.
$$

为了使得在 $\frac{dV}{dt}$ 中不出现 $-(x_2x_3)x_2^2$ 这一项，我们可以取：$a_1 = 1 + x_2^2$，$a_2 = a_3 = 1$，这样一来，得到

$$
V = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{4}x_2^4,
$$

$$
\frac{dV}{dt} = -x_2^2x_3^2.
$$

根据这样来选择 V，可以得出系统(2.38)全局稳定性的结论.

例 2: 考虑线性系统

$$\dddot{x} + a_3\ddot{x} + a_2\dot{x} + a_1 x = 0, \tag{2.39}$$

劳思-赫维茨条件为

$$a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0,\ a_2 a_3 - a_1 > 0.$$

将(2.39)写成方程组

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3. \end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

根据加权公式

$$[x_2,\ x_3,\ -a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3]\begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ -\beta_1 & 0 & \beta_3 \\ -\beta_2 & -\beta_3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = 0,$$

这里因为系统是常系数线性系统，故可以取 β_1, β_2, β_3 为常量.

$$\begin{aligned} &[-\beta_1 x_3 + \beta_2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)]dx_1 \\ &+ [\beta_1 x_2 + \beta_3(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)]dx_2 \\ &+ [\beta_2 x_2 + \beta_3 x_3]dx_3 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{x_1} \beta_2 a_1 \tau_1 d\tau_1 + \int_0^{x_2} [\beta_1 \tau_2 + \beta_3 a_1 x_1 + \beta_3 a_2 \tau_2]\, d\tau_2 \\ &\quad + \int_0^{x_3} [\beta_2 x_2 + \beta_3 \tau_3] d\tau_3 \\ &= \frac{1}{2}\beta_2 a_1 x_1^2 + \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_3 a_2)x_2^2 + \beta_3 a_1 x_1 x_2 \\ &\quad + \beta_2 x_2 x_3 + \frac{1}{2}\beta_3 x_3^2, \end{aligned}$$

$$\frac{dV}{dt} = (\beta_3 a_1 - a_2\beta_2)x_2^2 + (\beta_1 - \beta_2 a_2)x_2 x_3 + (\beta_2 - \beta_3 a_3)x_3^2.$$

现要求 $\dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{1}{a_2}(a_2 a_3 - a_1)x_3^2$,

故要求 β_1, β_2, β_3 满足以下方程组

$$\left.\begin{aligned} -a_2\beta_2 + a_1\beta_3 &= 0, \\ \beta_1 - a_3\beta_2 &= 0, \\ \beta_2 - a_3\beta_3 &= -\frac{1}{a_2}(a_2a_3 - a_1). \end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

由 (2.41) 求出

$$\beta_1 = \frac{a_1a_3}{a_2},\ \beta_2 = \frac{a_1}{a_2},\ \beta_3 = 1,$$

故

$$V = \frac{1}{2}\frac{a_1^2}{a_2}x_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{a_1a_3}{a_2} + a_2\right)x_2^2$$

$$+ a_1x_1x_2 + \frac{a_1}{a_2}x_2x_3 + \frac{1}{2}x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{a_1^2}{a_2} & \frac{a_1}{2} & 0 \\ \frac{a_1}{2} & \frac{1}{2}\left(\frac{a_1a_3}{a_2} + a_2\right) & \frac{1}{2}\frac{a_1}{a_2} \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{a_1}{a_2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

要求 V 为正定,即

① $\dfrac{a_1^2}{a_2} > 0 \Rightarrow a_2 > 0,$

② $\dfrac{a_1^2}{a_2}\left(\dfrac{a_1a_3}{a_2} + a_2\right) - a_1^2 > 0$

即 $\dfrac{a_1^3a_3}{a_2^2} > 0 \Rightarrow a_1a_3 > 0,$

③ $\dfrac{a_1^2}{a_2}\left(\dfrac{a_1a_3}{a_2}\right) - \dfrac{a_1}{a_2}\dfrac{a_1^2}{a_2}\dfrac{a_1}{a_2} > 0,$

$\dfrac{a_1^3a_3}{a_2^2} - \dfrac{a_1^4}{a_2^3} > 0,$

即

$$\frac{a_1^2}{a_2^2}\left(a_1a_3 - \frac{a_1^2}{a_2}\right) > 0,$$

$$a_1\left(a_3-\frac{a_1}{a_2}\right)>0.$$

故共得三个式子

$$a_2>0, \tag{I}$$

$$a_1a_3>0, \tag{II}$$

$$a_1\left(a_3-\frac{a_1}{a_2}\right)>0. \tag{III}$$

$\frac{dV}{dt}$ 要求负常，故 $a_3-\frac{a_1}{a_2}>0.$ (IV)

由 (IV) 及 (III)，得 $a_1>0$,

再由 (II)，　　得 $a_3>0$.

所以与劳思-赫维茨条件相重合.

沃尔[22]对变系数非线性方程也给出了作李雅普诺夫函数的方法，其作法与上述的类似，这里不再叙述.

§3. 应用例子

应用能量度量算法立即可得出下面一些系统的李雅普诺夫函数:

1. $\ddot{x}+f(x)=0$,

(1) $\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-f(x),\end{cases}$

(2) $\frac{dx}{dy}=\frac{y}{-f(x)}$,

(3) $-f(x)dx=ydy$,

(4) $w=f(x)dx+ydy=0$,

(5) $V=\int_0^x f(x)dx+\int_0^y ydy=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x f(x)dx.$

这与本篇第八章§1中例1所作的李雅普诺夫函数相同.

2. $\ddot{x}+\varphi(\dot{x})+f(x)=0$,

(1) $\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-f(x)-\varphi(y),\end{cases}$　$f(0)=\varphi(0)=0$,

(2) $\frac{dx}{dy}=\frac{y}{-f(x)-\varphi(y)}$,

(3) $(-f(x)-\varphi(y))dx=ydy$,

(4) $w=(f(x)+\varphi(y))dx+ydy=0$,

(5) $V=\int_0^x(f(x)+\varphi(0))dx+ydy=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x f(x)dx$.

这与本篇第八章§1中例2所作的李雅普诺夫函数相同.

3. $\ddot{x}+\varphi(\dot{x})+g(\dot{x})f(x)=0$,

(1) $\begin{cases}\dot{x}=y, & \varphi(0)=0,\\ \dot{y}=-\varphi(y)-g(y)f(x), & g(y)>0,\end{cases}$

(2) $\frac{dx}{dy}=\frac{y}{-\varphi(y)-g(y)f(x)}$,

(3) $(-\varphi(y)-g(y)f(x))dx=ydy$,

$\left(-\frac{\varphi(y)}{g(y)}-f(x)\right)dx=\frac{y}{g(y)}dy$,

(4) $w=\left(f(x)+\frac{\varphi(y)}{g(y)}\right)dx+\frac{y}{g(y)}dy$,

(5) $V=\int_0^x f(x)dx+\int_0^y\frac{y}{g(y)}dy$.

所得李雅普诺夫函数与用变量分离方法所得李雅普诺夫函数相同[10](本篇第八章§2).

4. $\ddot{x}-f(x,\dot{x})=0$,

(1) $\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=f(x,y),\end{cases}$

(2) $\frac{dx}{dy}=\frac{y}{f(x,y)}$,

(3) $f(x,y)dx=ydy$,

(4) $w=-f(x,y)dx+ydy$,

(5) $V=-\int_0^x f(x,0)dx+\frac{1}{2}y^2$.

这与[9]中所得李雅普诺夫函数相同.

5. 对于同步电动机的过渡过程方程组作出李雅普诺夫函数

$$\frac{d\Delta\theta}{dt} = s,$$

$$\frac{ds}{dt} = \sin\theta_0 - \sin(\theta_0 + \Delta\theta) - \eta\Delta i\sin(\theta_0 + \Delta\theta)$$

$$+ \xi(\sin 2\theta_0 - \sin(2\theta_0 + \Delta\theta)),$$

$$\frac{d\Delta i}{dt} = \eta s\sin(\theta_0 + \Delta\theta) - \alpha\Delta i.$$

令 $\Delta\theta = x_1$, $s = x_2$, $\Delta i = x_3$, 则以上方程组可以写成

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 = F_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = [\sin\theta_0 - \sin(\theta_0 + x_1)] + \xi(\sin 2\theta_0$$

$$- \sin(2\theta_0 + x_1)) - \eta x_3\sin(\theta_0 + x_1) = F_2,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \eta\sin(\theta_0 + x_1)x_2 - \alpha x_3 = F_3.$$

根据加权公式

$$[F_1, F_2, F_3]\begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}$$

$$= (-a_1F_2 - a_2F_3)dx_1 + (a_1F_1 - a_3F_3)dx_2$$

$$+ (a_2F_1 + a_3F_2)dx_3 = w_1(x_1, x_2, x_3)dx_1$$

$$+ w_2(x_1, x_2, x_3)dx_2 + w_3(x_1, x_2, x_3)dx_3,$$

则

$$V = \int_0^{x_1} w_1(\tau_1, 0, 0)d\tau_1 + \int_0^{x_2} w_2(x_1, \tau_2, 0)d\tau_2$$

$$+ \int_0^{x_3} w_3(x_1, x_2, \tau_3)d\tau_3,$$

可以取 $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{x_3}{x_2}$, $a_3 = 0$,

得出

$$
V = \int_0^{x_1} \{[\sin(\theta_0 + x_1) - \sin\theta_0] + \xi[\sin 2(\theta_0 + x_1) - \sin 2\theta_0]\} dx_1 + \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2} x_3^2.
$$

这与[13]中所得的结果一致，可以用来解决稳定性问题.

第十章 右方为二次多项式的系统[23]

§1. 引 言

V. I. 阿诺德 (Arnold)[24] 于1976年曾提出如下的问题：如果一个向量场是由具有固定次数、带有有理系数的多项式来给定，那末要问是否能给出一个判定准则的算法，来定出此向量场中之驻定点的稳定性？众所周知，这是著名的 A. M. 李雅普诺夫所研究的运动稳定性问题．这个问题与平面定性理论的全局定性结构的研究密切相关．阿诺德在提出这个问题时并没有指出这个问题已经解决到什么程度，同时，他仅泛泛地提到李雅普诺夫定理只解决了特征根实部不为零的情形．事实上，在李雅普诺夫的著名博士论文[25]中，不仅解决了特征根实部不为零的情形，而且也研究了特征根中有一个零根、一对纯虚根和二个零根的三种临界情形．在这三种临界情形中的前二种，广泛地受到了后继者们的重视．很多专著中都有详细介绍[26,27]，并且对具有时滞的动力系统在第一、二临界情形也作了很多研究[28]，也许由于第三临界情形难度较大，除李雅普诺夫原著外，很少见到介绍与研究．可是李雅普诺夫在第三临界情形的研究中所提供的方法，对于就 $n=2$ 情形完全解决阿诺德所提问题还是极其有益的．再则为了使我们的理论研究工作对广大的实际工作者有所裨益，用简单的判定准则的算法就能判定奇点的稳定与否，这样便于大家的考查．这就是促使我们就 $n=2$ 的情形来研究解决阿诺德问题的另一个原因．

考虑方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax+by+\alpha_1x^2+\alpha_2xy+\alpha_3y^2,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=cx+dy+\beta_1x^2+\beta_2xy+\beta_3y^2.\end{cases}\tag{1.1}$$

设 $p = -(a + d)$，$q = ad - bc$，

众所周知，在参数 (p, q) 平面上，由直线 $p = 0$，$q = 0$ 及抛物线 $p^2 = 4q$ 把整个 (p, q) 平面划分成五块区域及四条边界：

I. $q < 0$;

II. $p > 0$, $q > 0$, $p^2 - 4q > 0$;

III. $p > 0$, $q > 0$, $p^2 - 4q < 0$;

IV. $p < 0$, $q > 0$, $p^2 - 4q < 0$;

V. $p < 0$, $q > 0$, $p^2 - 4q > 0$;

VI. $p > 0$, $q > 0$, $p^2 - 4q = 0$;

VII. $p < 0$, $q > 0$, $p^2 - 4q = 0$;

VIII. $p = 0$, $q > 0$;

IX. $q = 0$.

对应于区域 I—V 和两条边界 VI、VII 上的参数值，有关系统 (1.1) 的奇点稳定性问题早已解决. 即当 $q < 0$ 或 $q > 0$, $p < 0$ 时为不稳定；当 $p > 0$, $q > 0$ 时为渐近稳定. 较复杂的是 VIII 及 IX 这两条边界的情形. 对应于边界 VIII 上的参数值来讨论 (1.1) 的奇点 (0, 0) 的稳定性问题，就是大家所熟悉的中心焦点判定问题，这个问题理论上已被 H. H. 巴乌京 (Баутин)[29] 所解决，但巴乌京是先由方程 (1.1) 经过平移和转轴后化到他所讨论的方程组的形式：

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = -\eta - \lambda_3\xi^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)\xi\eta + \lambda_6\eta^2, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \xi + \lambda_2\xi^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)\xi\eta - \lambda_2\eta^2. \end{cases} \tag{1.2}$$

由 (1.2) 中的系数 $\lambda_i (i = 2, 3, 4, 5, 6)$ 所满足的关系来决定 (1.2) 的零解的稳定性. 我们利用巴乌京的方法，得出了由系统 (1.1) 的系数直接决定其零解稳定性的判定准则之算法. 至于边界 IX 的情形，那就更复杂了，因为在这种情况下奇点 (0, 0) 是高次奇点. 下面我们分别来处理边界 IX 和边界 VIII 的情形. 最后，我们给出由系统 (1.1) 的系数，来确定系统 (1.1) 的零解稳定

性的判定准则算法的表格.

下面分别讨论 $q=0$ 及 $p=0$, $q>0$ 两种情形.

§2. $q=0$ 情 形

考虑系统 (1.1), $q=ad-bc=0$, 故奇点 (0, 0) 为高次奇点,分别讨论下列各种情况:

1. $a=b=0$, $c^2+d^2\neq 0$, 这时又分两种情况: $d=0$ 及 $d\neq 0$.

(甲) $d=0$, $c\neq 0$, 这时系统 (1.1) 为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\alpha_1x^2+\alpha_2xy+\alpha_3y^2, \\ \dfrac{dy}{dt}=cx+\beta_1x^2+\beta_2xy+\beta_3y^2. \end{cases} \tag{2.1}$$

其线性部分的特征方程之根为两个零根. 系统 (2.1) 经非奇异线性变换

$$\begin{cases} u=y, \\ v=cx \end{cases} \tag{2.2}$$

后化为

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=v+Au^2+Buv+Cv^2, \\ \dfrac{dv}{dt}=Lu^2+Muv+Nv^2. \end{cases} \tag{2.3}$$

其中
$$A=\beta_3,\ B=\frac{\beta_2}{c},\ C=\frac{\beta_1}{c^2},$$

$$L=\alpha_3c,\ M=\alpha_2,\ N=\frac{\alpha_1}{c}.$$

关于系统 (2.3) 的零解的稳定性问题, 李雅普诺夫本人已经解决, 所得的结论是: 不管 (2.3) 中的系数怎么样, 系统 (2.3) 的零解总是不稳定的[25], 故对系统 (2.1) 而言, 不管 (2.1) 中的系数怎么样, (2.1) 的零解总是不稳定的.

（乙）$d \neq 0$，这时系统(1.1)为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 xy + \alpha_3 y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + \beta_1 x^2 + \beta_2 xy + \beta_3 y^2. \end{cases} \tag{2.4}$$

首先讨论 $d<0$ 情形，这时(2.4)的线性部分的特征方程的根为 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = d < 0$，即有一个零根及一个负根，为第一临界情形，由

$$cx + dy + \beta_1 x^2 + \beta_2 xy + \beta_3 y^2 = 0, \tag{2.5}$$

根据稳函数存在定理，可解出

$$y = u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i. \tag{2.6}$$

为此，将(2.6)代入(2.5)得

$$cx + d\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i\right) + \beta_1 x^2 + \beta_2 x\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i\right) + \beta_3\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i\right)^2 = 0.$$

令 x^k 前的系数为 0，来定出 $c_i (i = 1, 2, \cdots)$，即

由 $c + c_1 d = 0$，　　得 $c_1 = -\dfrac{c}{d}$，

$c_2 d + \beta_1 + \beta_2 c_1 + \beta_3 c_1^2 = 0$，得 $c_2 = -\dfrac{1}{d}(\beta_1 + \beta_2 c_1 + \beta_3 c_1^2)$，

$c_3 d + \beta_2 c_2 + \beta_3 (2c_1 c_2) = 0$，得 $c_3 = -\dfrac{1}{d}[\beta_2 c_2 + \beta_3 (2c_1 c_2)]$.

……………………

一般，有

$$c_{2k-1} = -\frac{1}{d}\left[\beta_2 c_{2k-2} + \beta_3\left(2\sum_{i=1}^{k-1} c_i c_{2k-1-i}\right)\right],$$

$$c_{2k} = -\frac{1}{d}\left[\beta_2 c_{2k-1} + \beta_3\left(2\sum_{i=1}^{k-1} c_i c_{2k-i} + c_k^2\right)\right].$$

注意 $c_k(k \geqslant 3)$ 的每项中都包含 c_2 的因子，故当 $c_2 = 0$ 时，$c_k = 0\ (k \geqslant 3)$.

又

$$
\begin{aligned}
Z(x, 0) &= \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x u(x) + \alpha_3 u^2(x) \\
&= \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i\right) + \alpha_3\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i\right)^2 \\
&= A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 c_1 + \alpha_3 c_1^2 = \alpha_1 - \frac{c}{d}\alpha_2 + \frac{c^2}{d^2}\alpha_3 \\
&= \frac{1}{d^2}(\alpha_1 d^2 - cd\alpha_2 + c^2\alpha_3) = \frac{1}{d^2}A_2^*,
\end{aligned}
$$

$$(A_2^* = \alpha_1 d^2 - cd\alpha_2 + c^2\alpha_3),$$

$$A_3 = \alpha_2 c_2 + 2\alpha_3 c_1 c_2 = \frac{1}{d}c_2(d\alpha_2 - 2c\alpha_3) = \frac{1}{d}A_3^*$$

$$(A_3^* = c_2 A_{31}^*,\ A_{31}^* = d\alpha_2 - \alpha c\alpha_3),$$

$$A_4 = \alpha_2 c_3 + \alpha_3 c_2^2 + 2\alpha_3 c_1 c_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

根据李雅普诺夫定理知:

(I) 如果 $A_2^* \neq 0$ (即 $A_2 \neq 0$)，则(2.4)的零解不稳定.

(II) 如果 $A_2^* = 0$, $A_3^* > 0$ (即 $A_2 = 0$, $A_3 < 0$)，则 (2.4) 的零解为渐近稳定.

(III) 如果 $A_2^* = 0$, $A_3^* < 0$ (即 $A_2 = 0$, $A_3 > 0$)，则 (2.4) 的零解不稳定.

(IV) 如果 $A_2^* = 0$ (即 $A_2 = 0$)，$c_2 = 0(A_3^* = 0)$，则不仅 $A_3 = 0$，并且所有 $A_i = 0(i \geqslant 4)$，这是因为

$$
\left.
\begin{aligned}
A_{2k-1} &= \alpha_2 c_{2k-2} + \alpha_3 \sum_{i=1}^{k-1} 2c_i c_{2k-1-i}, \\
A_{2k} &= \alpha_2 c_{2k-1} + \alpha_3 \sum_{i=1}^{k-1} 2c_{i-1} c_{i+1} + \alpha_3 c_k^2.
\end{aligned}
\right\} \quad (k \geqslant 2)
$$

故 $A_i(i \geqslant 3)$ 中都包含 c_2 的因子，因此当 $c_2 = 0$ 时，$A_i = 0$ $(i \geqslant 3)$，即 $Z(x, 0) \equiv 0$，故 (2.4) 的零解为稳定但非渐近稳定。

(V) 如果 $A_2^* = 0$，$c_2 \neq 0$，$A_{31}^* = 0$，$\alpha_3 \neq 0$，这时

$$A_4 = \alpha_2 c_3 + 2\alpha_3 c_1 c_3 + \alpha_3 c_2^2 = \alpha_3 c_2^2 \neq 0,$$

故系统 (2.4) 的零解不稳定。

(VI) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$，显然 (2.4) 的零解稳定但非渐近稳定。

以上是讨论 $d < 0$ 的情形，当 $d > 0$ 时，因为 (2.4) 的线性部分的特征方程有一个正根，故系统 (2.4) 的零解一定是不稳定的。

2. $c = d = 0$，$a^2 + b^2 \neq 0$，这时又分 $a \neq 0$ 及 $a = 0$ 两种情况。

(甲) $a = 0$，这时系统 (1.1) 为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = by + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 xy + \alpha_3 y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta_1 x^2 + \beta_2 xy + \beta_3 y^2. \end{cases} \tag{2.7}$$

作非奇异线性变换

$$\begin{cases} u = y, \\ v = x. \end{cases} \tag{2.8}$$

系统 (2.7) 经变换 (2.8) 后化为

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \beta_3 u^2 + \beta_2 uv + \beta_1 v^2, \\ \dfrac{dv}{dt} = bu + \alpha_3 u^2 + \alpha_2 uv + \alpha_1 v^2, \end{cases} \tag{2.9}$$

即化为系统 (2.1) 的形式，故系统 (2.9) 的零解总是不稳定的，所以系统 (2.7) 的零解也总是不稳定的。

(乙) $a < 0$，这时系统 (1.1) 为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 xy + \alpha_3 y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta_1 x^2 + \beta_2 xy + \beta_3 y^2. \end{cases} \tag{2.10}$$

同样系统 (2.10) 经变换 (2.8) 后化为

$$
\begin{cases}
\dfrac{du}{dt} = \beta_3 u^2 + \beta_2 uv + \beta_1 v^2, \\
\dfrac{dv}{dt} = bu + av + \alpha_3 u^2 + \alpha_2 uv + \alpha_1 v^2.
\end{cases}
$$

根据对系统 (2.4) 的讨论，得出如下结论：

(I) 若 $B_1 = \beta_1 b^2 - \beta_2 ab + \beta_3 a^2 \neq 0$，则 (2.10) 的零解不稳定.

(II) 若 $B_1 = 0$ (记 $B_2 = \alpha_1 b^2 - \alpha_2 ba + \alpha_3 a^2$，$B_3 = a\beta_2 - 2b\beta_1$)，且 $B_2 B_3 < 0$，则 (2.10) 的零解不稳定.

(III) 若 $B_1 = 0$，$B_2 B_3 > 0$，则 (2.10) 的零解渐近稳定.

(IV) 若 $B_1 = 0$，$B_2 = 0$，则 (2.10) 的零解稳定但非渐近稳定.

(V) 若 $B_1 = 0$，$B_2 \neq 0$，$B_3 = 0$，$\beta_1 \neq 0$，则 (2.10) 的零解不稳定.

(VI) 若 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$，则 (2.10) 的零解稳定但非渐近稳定.

至于 $a > 0$ 情形，因为系统 (2.10) 的线性部分的特征方程有一个正根，故系统 (2.10) 的零解总是不稳定的.

3. $a^2 + b^2 \neq 0$，$c^2 + d^2 \neq 0$ ($a \neq 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$，$d \neq 0$)，$c = ka$，$d = kb$，这时系统 (1.1) 写成

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = ax + by + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 xy + \alpha_3 y^2, \\
\dfrac{dy}{dt} = kax + kby + \beta_1 x^2 + \beta_2 xy + \beta_3 y^2.
\end{cases}
\tag{2.11}
$$

其线性部分的特征方程之根为 $\lambda = 0$，$\lambda = a + kb$.

(甲) $a = -kb$，这时有两个零根，我们可以证明系统 (2.11) 的零解总是不稳定的，这是因为系统 (2.11) 经非奇异线性变换

$$
\begin{cases}
u = -\dfrac{1}{a} y, \\
v = -kx + y
\end{cases}
\tag{2.12}
$$

后化为 (2.3)，但其中

$$A=-\left(\beta_1\frac{1}{k^2}+\beta_2\frac{1}{k}+\beta_3\right)a,\quad B=-\beta_1\frac{1}{k^2}-\beta_2\frac{1}{k},$$

$$C=\frac{\beta_1}{k^2}(-a),$$

$$L=(-k\alpha_1+\beta_1)\frac{a^2}{k^2}+(-k\alpha_2+\beta_2)\left(\frac{a^2}{k}\right)-a(-k\alpha_3+\beta_3),$$

$$M=2\frac{a}{k^2}(-k\alpha_1+\beta_1)+\frac{a}{k}(-k\alpha_2+\beta_2),$$

$$N=-(k\alpha_1+\beta_1)\frac{1}{k^2}.$$

对系统 (2.3) 而言，不论系数怎样，(2.3) 的零解总是不稳定的，因为变换 (2.12) 是非奇异的，因此系统 (2.11) 的零解也总是不稳定的.

(乙) $a+kb<0$，系统 (2.11) 经非奇异线性变换

$$\begin{cases}u=kx-y,\\ v=y\end{cases}$$

后化为

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=\alpha_1^*u^2+\alpha_2^*uv+\alpha_3^*v^2,\\[2mm] \dfrac{dv}{dt}=C^*u+d^*v+\beta_1^*u^2+\beta_2^*uv+\beta_3^*v^2.\end{cases}\tag{2.13}$$

其中

$$\alpha_1^*=(k\alpha_3-\beta_3),\quad \alpha_2^*=-[2k(k\alpha_3-\beta_3)+(k\alpha_2-\beta_2)],$$

$$\alpha_3^*=[(k\alpha_1-\beta_1)+k(k\alpha_2-\beta_2)+k^3(k\alpha_3-\beta_3)],$$

$$C^*=-b,\ d^*=a+kb<0,\ \beta_1^*=\alpha_3,\ \beta_2^*=(-\alpha_2-2k\alpha_3),$$

$$\beta_3^*=(\alpha_1+k\alpha_2+k^3\alpha_3).$$

根据对系统 (2.4) 的讨论，得出如下结论:

(I) 若 $E_1=b^2(k\alpha_1-\beta_1)-ab(k\alpha_2-\beta_2)+a^2(k\alpha_3-\beta_3)\neq 0$，则系统 (2.11) 的零解不稳定。

(II) 若 $E_1 = 0$ (令 $E_2 = \alpha_1 b^2 - \alpha_2 ba + \alpha_3 a^2$ (即 B_2),

$$E_3 = (k\alpha_2 - \beta_2) - 2\frac{a}{b}(k\alpha_3 - \beta_3),\ E_4 = k\alpha_3 - \beta_3),$$

且 $E_2E_3 > 0$, 则系统 (2.11) 的零解不稳定.

(III) 若 $E_1 = 0$, $E_2E_3 < 0$, 则系统 (2.11) 的零解渐近稳定.

(IV) $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, 则系统 (2.11) 的零解稳定但非渐近稳定.

(V) 若 $E_1 = 0$, $E_2 \neq 0$, $E_3 = 0$, $E_4 \neq 0$, 则系统 (2.11) 的零解不稳定.

(VI) 若 $k\alpha_1 = \beta_1$, $k\alpha_2 = \beta_2$, $k\alpha_3 = \beta_3$, 则系统 (2.11) 的零解稳定但非渐近稳定.

如果 $a + kb > 0$, 系统 (2.11) 的零解一定是不稳定的.

根据行列式的性质知, 上述三种情形都是针对行的性质进行分析的,同样对于列的性质亦有类似上述三种情形的分析.

4. $a = b = c = d = 0$, 此时系统 (1.1) 为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 xy + \alpha_3 y^2 = X(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta_1 x^2 + \beta_2 xy + \beta_3 y^2 = Y(x, y). \end{cases} \tag{2.14}$$

假设 $X_2(x, y)$, $Y_2(x, y)$ 无公因子,又设对于 $0 < x^2 + y^2 \leqslant r^2$, 当 r 足够小时,有

$$X_2^2(x, y) + Y_2^2(x, y) \neq 0,$$

即 $P(0, 0)$ 为 (2.14) 的孤立奇点, 则有下面结论: 不论 (2.14) 中系数怎样, 系统 (2.14) 的零解总是不稳定的.

证: 因为原点 P 的指数 $I(P)$ 为偶数,并且

$$|I(P)| \leqslant 2,$$

即 (2.14) 的原点 $P(0, 0)$ 的指数为 $+2, 0, -2$, 因为其指数不是 $+1$, 则按李雅普诺夫意义为不稳定.

$q = 0$ 的情形全部讨论完毕,参考表 A.

表 A

$q=0$

- $a^2+b^2+c^2+d^2=0$，不稳定
- $a^2+b^2+c^2+d^2\neq 0$
  - $a=b=0,\ c^2+d^2\neq 0$
    - $d\geqslant 0$，不稳定
    - $d<0$
      - $c\neq 0$（接表 I）
      - $c=0$（接表 II）
  - $c=d=0,\ a^2+b^2\neq 0$
    - $a\geqslant 0$，不稳定
    - $a<0$
      - $b\neq 0$（接表III）
      - $b=0$（接表IV）
  - $a=c=0,\ b^2+d^2\neq 0$
    - $d\geqslant 0$，不稳定
    - $d<0$，
      - $b\neq 0$（接表 V）
      - $b=0$（接表 II）
  - $b=d=0,\ a^2+c^2\neq 0$
    - $a\geqslant 0$，不稳定
    - $a<0$，
      - $c\neq 0$（接表 VI）
      - $c=0$（接表 IV）
  - $a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0,\ d\neq 0,\ c=ak,\ d=bk$，
    - $a+bk\geqslant 0$，不稳定
    - $a+bk<0$（接表VII）
  - $a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0,\ d\neq 0,\ b=ak,\ d=ck$
    - $a+kc\geqslant 0$，不稳定
    - $a+kc<0$（接表VIII）

其中

表 I

- $A_2^*\neq 0$，不稳定
- $A_2^*=0$，
  - $A_3^*<0$，不稳定
  - $A_3^*>0$，渐近稳定
  - $A_3^*=0$，
    - $C_2=0$，稳定但非渐近稳定
    - $C_2\neq 0,\ A_{31}^*=0$，
      - $\alpha_3\neq 0$，不稳定
      - $\alpha_3=0$，稳定但非渐近稳定

这里 $A_2^*=\alpha_1 d^2-cd\alpha_2+c^2\alpha_3$，$A_3^*=c_2A_{31}^*$，

$$C_2=-\frac{1}{d}\left(\beta_1-\frac{c}{d}\beta_2+\frac{c^2}{d^2}\beta_3\right),$$

$$A_{31}^*=d\alpha_2-2c\alpha_3.$$

表 II

- $\alpha_1\neq 0$，不稳定
- $\alpha_1=0$，
  - $\beta_1\alpha_2>0$，不稳定
  - $\beta_1\alpha_2<0$，渐近稳定
  - $\beta_1\alpha_2=0$，
    - $\beta_1=0$，稳定但非渐近稳定
    - $\alpha_2=0,\ \beta_1\neq 0$，
      - $\alpha_3\neq 0$，不稳定
      - $\alpha_3=0$，稳定但非渐近稳定

$$
\text{表 III}\begin{cases} B_1 \neq 0, & \text{不稳定} \\ B_1 = 0, & \begin{cases} B_2B_3 < 0, & \text{不稳定} \\ B_2B_3 > 0, & \text{渐近稳定} \\ B_2B_3 = 0, & \begin{cases} B_2 = 0, & \text{稳定但非渐近稳定} \\ B_2 \neq 0,\ B_3 = 0, & \begin{cases} \beta_1 \neq 0, & \text{不稳定} \\ \beta_1 = 0, & \text{稳定但非渐近稳定} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}
$$

这里 $B_1 = \beta_1 b^2 - \beta_2 ba + \beta_3 a^2$, $B_2 = \alpha_1 b^2 - \alpha_2 ba + \alpha_3 a^2$,

$B_3 = a\beta_2 - 2b\beta_1$.

$$
\text{表 IV}\begin{cases} \beta_3 \neq 0, & \text{不稳定} \\ \beta_3 = 0, & \begin{cases} \beta_2\alpha_3 > 0, & \text{不稳定} \\ \beta_2\alpha_3 < 0, & \text{渐近稳定} \\ \beta_2\alpha_3 = 0, & \begin{cases} \alpha_3 = 0, & \text{稳定但非渐近稳定} \\ \beta_2 = 0,\ \alpha_3 \neq 0, & \begin{cases} \beta_1 \neq 0, & \text{不稳定} \\ \beta_1 = 0, & \text{稳定但非渐近稳定} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}
$$

$$
\text{表 V}\begin{cases} D_1 \neq 0, & \text{不稳定} \\ D_1 = 0, & \begin{cases} \beta_1 D_2 > 0, & \text{不稳定} \\ \beta_1 D_2 < 0, & \text{渐近稳定} \\ \beta_1 D_2 = 0, & \begin{cases} \beta_1 = 0, & \text{稳定但非渐近稳定} \\ \beta_1 \neq 0,\ D_2 = 0, & \begin{cases} D_3 \neq 0, & \text{不稳定} \\ D_3 = 0, & \text{稳定但非渐近稳定} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}
$$

这里 $D_1 = \alpha_1 d - \beta_1 b$, $D_2 = \alpha_2 - \dfrac{b}{d}\beta_2$, $D_3 = \alpha_3 d - \beta_3 b$.

$$
\text{表 VI}\begin{cases} F_3 \neq 0, & \text{不稳定} \\ F_3 = 0, & \begin{cases} \alpha_3 F_2 > 0, & \text{不稳定} \\ \alpha_3 F_2 < 0, & \text{渐近稳定} \\ \alpha_3 F_2 = 0, & \begin{cases} \alpha_3 = 0, & \text{稳定但非渐近稳定} \\ \alpha_3 \neq 0,\ F_2 = 0, & \begin{cases} F_1 \neq 0, & \text{不稳定} \\ F_1 = 0, & \text{稳定但非渐近稳定} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}
$$

这里 $F_1 = c\alpha_1 - a\beta_1$, $F_2 = c\alpha_2 - a\beta_2$, $F_3 = a\beta_3 - c\alpha_3$.

$$
\text{表 VII}\begin{cases} E_1 \neq 0, & \text{不稳定} \\ E_1 = 0, & \begin{cases} E_2E_3 > 0, & \text{不稳定} \\ E_2E_3 < 0, & \text{渐近稳定} \\ E_2E_3 = 0, & \begin{cases} E_2 = 0, & \text{稳定但非渐近稳定} \\ E_2 \neq 0,\ E_3 = 0, & \begin{cases} E_4 \neq 0, & \text{不稳定} \\ E_4 = 0, & \text{稳定但非渐近稳定} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}
$$

这里

$$E_1 = (k\alpha_1 - \beta_1)b^2 - (k\alpha_2 - \beta_2)ba + (k\alpha_3 - \beta_3)a^2,$$

$$E_2 = \alpha_1 b^2 - \alpha_2 ba + \alpha_3 a^2,$$

$$E_3 = (k\alpha_2 - \beta_2) - 2\frac{a}{b}(k\alpha_3 - \beta_3),$$

$$E_4 = k\alpha_3 - \beta_3.$$

表 VIII $\begin{cases} L_1 \neq 0, & \text{不稳定} \\ L_1 = 0, & \begin{cases} L_2L_3 > 0, & \text{不稳定} \\ L_2L_3 < 0, & \text{渐近稳定} \\ L_2L_3 = 0, & \begin{cases} L_2 = 0, & \text{稳定但非渐近稳定} \\ L_2 \neq 0,\ L_3 = 0, & \begin{cases} L_4 \neq 0, & \text{不稳定} \\ L_4 = 0, & \text{稳定但非渐近稳定} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$

这里

$$L_1 = \left(\alpha_1 \frac{c}{a} - \beta_1\right)k^2 - \left(\alpha_2 \frac{c}{a} + \beta_2\right)k + \left(\alpha_3 \frac{c}{a} - \beta_3\right),$$

$$L_2 = \beta_1 k^2 - \beta_2 k + \beta_3,$$

$$L_3 = k\left(\alpha_1 - \frac{a}{c}\beta_1\right) - \frac{1}{k}\left(\alpha_3 - \frac{a}{c}\beta_3\right),$$

$$L_4 = c\alpha_3 - a\beta_3.$$

§ 3. $p=0$, $q>0$ 情形

这时系统 (1.1) 的线性部分的特征根为

$$\lambda = \pm i\sqrt{q} = \pm ib_1,$$

即一对纯虚根的情形，巴乌京的方法已完全解决了系统 (1.1) 的零解的稳定性问题，他的方法是这样的：先将系统 (1.1) 经过代换

$$\begin{cases} \xi = -cx + ay, \\ \eta = -b_1 y \end{cases}$$

化为

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= b_1\xi + B_{20}\xi^2 + B_{11}\xi\eta + B_{02}\eta^2, \\ \frac{d\xi}{dt} &= -b_1\eta + A_{20}\xi^2 + A_{11}\xi\eta + A_{02}\eta^2, \end{aligned} \tag{3.1}$$

然后经过适当地转轴，可使 b_1 保持不变，而新的 B_{20} 与 B_{02} 之和等于零，再以 b_1 除方程 (3.1) 的两边，并置 $\tau = b_1 t$，就把 (3.1) 化为

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau} &= -y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6 y^2, \\
\frac{dy}{d\tau} &= x + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

引进极坐标 $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$，由 (3.2) 得

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{d\varphi} &= \rho^2[-\lambda_3\cos^3\varphi + (3\lambda_2 + \lambda_5)\cos^2\varphi\sin\varphi \\
&\quad + (2\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6)\cos\varphi\sin^2\varphi - \lambda_2\sin\varphi] \\
&\quad \times \{1 + \rho[\lambda_2\cos^3\varphi + (3\lambda_3 + \lambda_4)\cos^2\varphi\sin\varphi \\
&\quad - (3\lambda_2 + \lambda_5)\cos\varphi\sin^2\varphi - \lambda_6\sin^3\varphi]\}^{-1} \\
&= \frac{\rho^2 A(\varphi)}{1 + \rho B(\varphi)} = \rho^2 R_2 + \rho^3 R_3 + \cdots.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中

$$\begin{aligned}
&R_2 = A(\varphi),\ R_3 = -A(\varphi)B(\varphi),\ \cdots, \\
&R_k = (-1)^k A(\varphi)B(\varphi)^{k-2}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

如所周知，(3.3) 的满足初条件 $\rho(0) = \rho_0$ 的解 $\rho(\varphi)$ 可展开为：

$$\rho = \rho_0 v_1(\varphi, \lambda_i) + \rho_0^2 v_2(\varphi, \lambda_i) + \cdots, \tag{3.5}$$

其中 $v_k(\varphi, \lambda_i)$ 满足条件

$$v_1(0, \lambda_i) = 1,\ v_k(0, \lambda_i) = 0,\ 当\ k \geqslant 2.$$

以 (3.5) 代入 (3.3)，比较 ρ 的同次幂系数，可以决定诸 v_k 的方程为

$$\frac{dv_1}{d\varphi} = 0,\quad \frac{dv_2}{d\varphi} = v_1^2 R_2,\quad \frac{dv_3}{d\varphi} = 2v_1 v_2 R_2 + v_1^3 R_3 + \cdots,$$

························

为了决定系统 (3.2) 的零解稳定性与否，我们作后继函数，

$$\rho(\rho_0, 2\pi) = \rho_0 v_1(2\pi, \lambda_i) + \rho_0^2 v_2(2\pi, \lambda_i) + \cdots,$$

其中

$$
\begin{aligned}
&v_1(2\pi, \lambda_i) = 1, \\
&v_2(2\pi, \lambda_i) = 0, \\
&v_3(2\pi, \lambda_i) = \bar{v}_3, \\
&v_4(2\pi, \lambda_i) = \bar{v}_3\theta_4^{(3)}, \\
&v_5(2\pi, \lambda_i) = \bar{v}_5 + \bar{v}_3\theta_5^{(3)}, \\
&v_6(2\pi, \lambda_i) = \bar{v}_5\theta_6^{(5)} + \bar{v}_3\theta_6^{(3)}, \\
&v_7(2\pi, \lambda_i) = \bar{v}_7 + \bar{v}_5\theta_7^{(5)} + \bar{v}_3\theta_7^{(3)}, \\
&v_k(2\pi, \lambda_i) = \bar{v}_7\theta_k^{(7)} + \bar{v}_5\theta_k^{(5)} + \bar{v}_3\theta_k^{(3)}.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

(3.6) 中

$$
\begin{cases}
\bar{v}_3 = -\dfrac{\pi}{4}\lambda_5(\lambda_3 - \lambda_6), \\
\bar{v}_5 = \dfrac{\pi}{24}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6), \\
\bar{v}_7 = \dfrac{25}{32}\pi\lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)^2(-\lambda_3\lambda_6 + 2\lambda_6^2 + \lambda_2^2),
\end{cases}
\tag{3.7}
$$

又 $\theta_k^{(j)}$ 为 λ_i 的整函数.

注意以下性质:

1. 如果 $v_{2k+1} = 0$, 则有 $v_{2k+2} = 0$,

2. 如果 $\bar{v}_3 = \bar{v}_5 = \bar{v}_7 = 0$, 则有 $v_k(2\pi, \lambda_i) = 0$, $k \geqslant 2$. 这时原点是中心.

容易验证,当

$$
\begin{cases}
\lambda_3 - \lambda_6 = 0, \\
\lambda_2 = \lambda_5 = 0, \\
\lambda_4 = \lambda_5 = 0, \\
\lambda_5 = \lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6 = \lambda_3\lambda_6 - 2\lambda_6^2 - \lambda_2^2 = 0
\end{cases}
$$

时,有 $\rho(\rho_0, 2\pi) = \rho_0$, 故原点为中心.

因为 $\rho(\rho_0, 2\pi) = \rho_0 + \bar{v}_3\rho_0^3 + \cdots$, 故当 $\bar{v}_3 < 0$, 即 $\lambda_5(\lambda_3 - \lambda_6) > 0$ 时, 对足够小的 ρ_0 而言, 有 $\rho(\rho_0, 2\pi) < \rho_0$, 即系统 (3.2) 的零解为渐近稳定;如果 $\bar{v}_3 > 0$, 即 $\lambda_5(\lambda_3 - \lambda_6) < 0$ 时,对足够小的 ρ_0 而言, 有 $\rho(\rho_0, 2\pi) > \rho_0$, 即系统 (3.2) 的零解为不稳定; 如

果 $\lambda_5=0$，有 $\bar{v}_3=0$，则有 $\rho(\rho_0,2\pi)=\rho_0+\bar{v}_5\rho_0^5+\cdots$，所以如果 $\lambda_5=0$，$\bar{v}_5<0$，即 $\lambda_5=0$，$\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6)<0$，对足够小的 ρ_0 而言，有 $\rho(\rho_0,2\pi)<\rho_0$，即系统 (3.2) 的零解为渐近稳定；如果 $\lambda_5=0$，$\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6)>0$，对足够小的 ρ_0 而言，有 $\rho(\rho_0,2\pi)>\rho_0$，这时系统 (3.2) 的零解不稳定；如果 $\lambda_5=0$，$\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6=0$，则有 $\bar{v}_5=0$，而 $\rho(\rho_0,2\pi)=\rho_0+\bar{v}_7\rho_0^7+\cdots$，所以当 $\lambda_5=0$，$\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6=0$，$\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)\cdot(-\lambda_3\lambda_6+2\lambda_6^2+\lambda_2^2)<0$ 时，系统 (3.2) 的零解为渐近稳定；如果当 $\lambda_5=0$，$\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6=0$，$\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)(-\lambda_3\lambda_6+2\lambda_6^2+\lambda_2^2)>0$，系统 (3.2) 的零解为不稳定. 总结以上结论，得下表：

表 B

$$
\begin{matrix} p=0 \\ q>0 \end{matrix}
\begin{cases}
\bar{v}_3\neq 0, \begin{cases} \lambda_5(\lambda_3-\lambda_6)>0, & \text{稳定焦点} \\ \lambda_5(\lambda_3-\lambda_6)<0, & \text{不稳定焦点} \end{cases} \\
\bar{v}_3=0, \begin{cases} \lambda_3=\lambda_6, \ \text{中心}, \\
\begin{matrix}\lambda_3\neq\lambda_6, \\ \lambda_5=0,\end{matrix} \begin{cases}
\bar{v}_5\neq 0, \begin{cases} \lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_4+5\lambda_5-5\lambda_6)>0, \\ \quad \text{不稳定焦点} \\ \lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_4+5\lambda_5-5\lambda_6)<0, \\ \quad \text{稳定焦点} \end{cases} \\
\bar{v}_5=0, \begin{cases} \lambda_2=0, \ \text{中心} \\ \lambda_4=0, \ \text{中心} \\
\begin{matrix}\lambda_2\neq 0, \lambda_4\neq 0, \\ \lambda_4+5\lambda_3- \\ 5\lambda_6=0,\end{matrix} \begin{cases}
\bar{v}_7\neq 0, \begin{cases} \lambda_2\lambda_4(\lambda_3\lambda_6-2\lambda_6^2-\lambda_2^2)>0, \\ \quad \text{稳定焦点} \\ \lambda_2\lambda_4(\lambda_3\lambda_6-2\lambda_6^2-\lambda_2^2)<0, \\ \quad \text{不稳定焦点} \end{cases} \\
\bar{v}_7=0, \ \text{中心}
\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
\tag{3.8}
$$

其中 $\bar{v}_3$, $\bar{v}_5$, $\bar{v}_7$ 由 (3.7) 式给出.

以上是从系统 (3.2) 的系数来判定系统 (3.2) 的零解的稳定性，怎样直接从 (1.1) 的系数来判定系统 (1.1) 零解的稳定性，在巴乌京的文章中没有具体给出，我们下面先将系统 (1.1) 经变换化到系统 (3.1)，然后根据：1. $B_{20}+B_{02}=0$；2. $B_{20}+B_{02}\neq 0$，$A_{20}+A_{02}=0$；3. $B_{20}+B_{02}\neq 0$，$A_{20}+A_{02}\neq 0$ 各种情况给出由系统(1.1)的系数直接来判定其零解稳定性的准则，详细演算由下面给出.

考虑系统 (1.1)，设 $p = -(a+d) = 0$，$q = ad - bc > 0$，记 $q = b_1^2$. 故 (1.1) 的线性部分之根是一对纯虚根 $\lambda_{1,2} = \pm b_1 i$，对 (1.1) 作代换

$$\begin{cases} \xi = -cx + ay, \\ \eta = \qquad -b_1 y \end{cases}$$

后，对所得的新方程两端用 b_1 除，再令 $b_1 t = \tau$，即得

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= -\eta + A_{20}\xi^2 + A_{11}\xi\eta + A_{02}\eta^2, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= \xi + B_{20}\xi^2 + B_{11}\xi\eta + B_{02}\eta^2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

这里

$$\begin{aligned} &B_{20} = -\frac{1}{c^2}\beta_1, \quad B_{11} = -\frac{2a}{c}\beta_1 - \frac{1}{bc}\beta_2, \\ &B_{02} = -\frac{1}{b_1^2}\left[\beta_1\frac{a^2}{c^2} + \beta_2\frac{a}{c} + \beta_3\right], \\ &A_{20} = \frac{1}{b_1c^2}(a\beta_1 - c\alpha_1), \\ &A_{11} = \frac{1}{b_1^2}\left[\frac{2(a\beta_1 - c\alpha_1)}{c^2} + \frac{a\beta_2 - c\alpha_2}{c}\right], \\ &A_{02} = \frac{1}{b_1^3}\left[(a\beta_1 - c\alpha_1)\frac{a^2}{c^2}\right. \\ &\qquad \left. + (a\beta_2 - c\alpha_2)\frac{a}{c} + (a\beta_3 - c\alpha_3)\right]. \end{aligned} \tag{$*$}$$

对 (3.9) 进行转轴，适当转角度 α，使得新得到的 $B_{20} + B_{02} = 0$，这样就使得 (3.9) 变成 (3.2)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = -y - \lambda_3x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6y^2, \\ \dfrac{dy}{d\tau} = x + \lambda_2x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2y^2. \end{cases}$$

其中

$$
\begin{aligned}
-\lambda_3 &= A_{20}\cos^3\alpha - (B_{20}+A_{11})\cos^2\alpha\sin\alpha \\
&\quad + (B_{11}+A_{02})\cos\alpha\sin^2\alpha - B_{02}\sin^3\alpha, \\
\lambda_6 &= A_{02}\cos^3\alpha + (A_{11}-B_{02})\cos^2\alpha\sin\alpha \\
&\quad + (A_{20}-B_{11})\cos\alpha\sin^2\alpha - B_{20}\sin^3\alpha, \\
\lambda_2 &= B_{20}\cos^3\alpha + (A_{20}-B_{11})\cos^2\alpha\sin\alpha \\
&\quad + (B_{02}-A_{11})\cos\alpha\sin^2\alpha + A_{02}\sin\alpha, \\
\lambda_4 &= (B_{11}+2A_{20})\cos\alpha-(A_{11}+2B_{02})\sin\alpha, \\
\lambda_5 &= (A_{11}-2B_{20})\cos\alpha+(B_{11}-2A_{02})\sin\alpha.
\end{aligned} \qquad (**)
$$

下面就来回答如何选取坐标轴旋转的角度 α，使得方程 (3.9) 过渡到我们所要的形式 (3.2)，然后就可应用以上所介绍的巴乌京的结果，这里分两种情形来讨论：

I. $B_{20}+B_{02}=0$.

(1) 若 $A_{20}+A_{02}=0$，此时 $\lambda_6-\lambda_3=0$，故方程 (3.2) 的原点是中心. 此时在 (3.9) 中有

$$
\lambda_3=-A_{20},\ \lambda_6=A_{02},\ \lambda_2=B_{20},\ \lambda_4=B_{11}+2A_{20},
$$
$$
\lambda_5=A_{11}-2B_{20}. \tag{3.10}
$$

这已经是具有方程 (3.2) 的形式 (故取 $\alpha=0$)，把 A_{20}, A_{02}, B_{20}, B_{02} 和原方程 (1.1) 的系数之间的关系(由(*)式决定)代入 $B_{20}+B_{02}=0$, $A_{20}+A_{02}=0$，即得确定 (1.1) 的原点是中心的关系式.

(2) 若 $A_{02}+A_{20}\neq 0$，(3.2) 中有 $-\lambda_3+\lambda_6\neq 0$，这时将 (3.10) 中的 $\lambda_i(i=1,\cdots,5)$ 代入 (3.8)，并利用(*)式，即可得判定 (1.1) 的奇点是中心或焦点的关系式.

(II) $B_{20}+B_{02}\neq 0$.

(1) $A_{20}+A_{02}=0$，此时方程 (3.9) 经变换

$$
\begin{cases} x=-\eta, \\ y=\xi \end{cases}
$$

后化为

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{d\tau}=-y+B_{02}x^2-B_{11}xy+B_{20}y^2, \\[2mm]
\dfrac{dy}{d\tau}=x+A_{02}x^2-A_{11}xy+A_{20}y^2.
\end{cases}
$$

所以$-\lambda_3 = B_{02}$, $2\lambda_2 + \lambda_5 = -B_{11}$, $\lambda_6 = B_{20}$, $\lambda_2 = A_{02}$, $2\lambda_3 + \lambda_4 = -A_{11}$, 将这些系数代入(3.8)式，并利用(＊)式，可得判定(1.1)的原点稳定性的关系式.

(2) $A_{20} + A_{02} \neq 0$.

作变换
$$\begin{cases} x = \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha, \\ y = \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha \end{cases}$$
后，系统(3.9)化为(3.2)，这两个系统的系数之间关系由(＊＊)决定.

其中
$$\frac{\sin\alpha}{B_{20} + B_{02}} = \frac{-\cos\alpha}{A_{20} + A_{02}}$$
$$= \frac{1}{[(A_{20} + A_{02})^2 + (B_{20} + B_{02})^2]^{\frac{1}{2}}} = K,$$
$$\alpha = \tan^{-1}\left[-\frac{(B_{20} + B_{02})}{(A_{20} + A_{02})}\right],$$

$\lambda_6 - \lambda_3 = -[(A_{20} + A_{02})^2 + (B_{20} + B_{02})^2]K \neq 0$, 将(＊＊)中的$\lambda_i$代入(3.8)式，并利用(＊)式，可得判定(1.1)之原点为中心或焦点的关系式.

综合以上所述，我们可以利用表B来决定当$p = 0$, $q > 0$时系统(1.1)的零解的稳定与否. 表B中λ_i根据下列情况取值.

(3.9)中系数满足之关系	表B中$\lambda_i(i = 2, \cdots, 6)$应取之值
1. $B_{20} + B_{02} = 0$	$\lambda_2 = B_{20}$, $2\lambda_3 + \lambda_4 = B_{11}$, $-\lambda_3 = A_{20}$, $\lambda_6 = A_{02}$, $2\lambda_2 + \lambda_5 = A_{11}$
2. $B_{20} + B_{02} \neq 0$ $A_{02} + A_{20} = 0$	$-\lambda_3 = B_{02}$, $2\lambda_2 + \lambda_5 = -B_{11}$, $\lambda_6 = -B_{20}$, $\lambda_2 = A_{02}$, $2\lambda_3 + \lambda_4 = -A_{11}$
3. $B_{20} + B_{02} \neq 0$ $A_{20} + A_{02} \neq 0$	$-\lambda_3 = A_{20}\cos^3\alpha - (B_{20} + A_{11})\cos^2\alpha\sin\alpha + (B_{11} + A_{02})\cos\alpha\sin^2\alpha - B_{02}\sin^3\alpha$ $\lambda_6 = A_{02}\cos^3\alpha + (A_{11} - B_{02})\cos^2\alpha\sin\alpha + (A_{20} - B_{11})\cos\alpha\sin^2\alpha - B_{20}\sin^3\alpha$ $\lambda_2 = B_{20}\cos^3\alpha + (A_{20} - B_{11})\cos^2\alpha\sin\alpha + (B_{02} - B_{11})\cos\alpha\sin^2\alpha + A_{02}\sin^3\alpha$ $\lambda_4 = (B_{11} + 2A_{20})\cos\alpha - (A_{11} + 2B_{02})\sin\alpha$ $\lambda_5 = (A_{11} - 2B_{20})\cos\alpha + (B_{11} - 2A_{02})\sin\alpha$ $\frac{\sin\alpha}{B_{20} + B_{02}} = \frac{\cos\alpha}{A_{20} + A_{02}} = [(A_{20} + A_{02})^2 + (B_{20} + B_{02})^2]^{-1/2} = K$

§4. 右方为二次多项式的系统(续)

(一) 问题与解法

在前面已就方程右方为二次多项式的方程组的稳定性判据，即 $n=2$ 的阿诺德问题作了完整的解答.

在这个解答中，有关中心与焦点的判定用了巴乌京的结果：考虑方程组

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\lambda_1 x-y-\lambda_3 x^2+(2\lambda_2+\lambda_5)xy+\lambda_6 y^2,\\ \frac{dy}{dt}&=x+\lambda_1 y+\lambda_2 x^2+(2\lambda_3+\lambda_4)xy-\lambda_2 y^2.\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

化为极坐标

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi, \tag{4.2}$$

求出对于初值的级数解有形式：

$$\rho=\rho(\varphi,\ \lambda_i)=\sum_{n=1}^{\infty}\rho_0^n v_n(\varphi,\lambda_i), \tag{4.3}$$

其中

$$v_1(0,\lambda_i)=1,\ v_n(0,\lambda_i)=0\ (n>1),$$

即

$$\rho(0,\lambda_i)=\rho_0.$$

巴乌京计算得

$$\begin{aligned}
&v_1(2\pi,\lambda_i)=e^{2\pi\lambda_1},\\
&v_2(2\pi,\lambda_i)=\lambda_1\theta_2^{(1)},\\
&v_3(2\pi,\lambda_i)=\bar v_3+\lambda_1\theta_3^{(1)},\\
&v_4(2\pi,\lambda_i)=\bar v_3\theta_4^{(3)}+\lambda_1\theta_4^{(1)},\\
&v_5(2\pi,\lambda_i)=\bar v_5+\bar v_3\theta_5^{(3)}+\lambda_1\theta_5^{(1)},\\
&v_6(2\pi,\lambda_i)=\bar v_5\theta_6^{(5)}+\bar v_3\theta_6^{(3)}+\lambda_1\theta_6^{(1)},\\
&v_7(2\pi,\lambda_i)=\bar v_7+\bar v_5\theta_7^{(5)}+\bar v_3\theta_7^{(3)}+\lambda_1\theta_7^{(1)},\\
&v_k(2\pi,\lambda_i)=\bar v_7\theta_k^{(7)}+\bar v_5\theta_k^{(5)}+\bar v_3\theta_k^{(3)}+\lambda_1\theta_k^{(1)},
\end{aligned}$$

对 $k > 7$ 成立。

这里

$$\bar{v}_3 = -\frac{\pi}{4}\lambda_5(\lambda_3 - \lambda_6),$$

$$\bar{v}_5 = \frac{\pi}{24}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6),$$

$$\bar{v}_7 = \frac{25}{32}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)^2(\lambda_3\lambda_6 - 2\lambda_6^2 - \lambda_2^2). \tag{4.4}$$

这个结果有两个问题：

第一、$\bar{v}_7$ 的符号是错的，应为负号．这在前面引用时已作了改正．第二、方程组 (3.2) 的二次式中只有五个独立参量 λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6, 这是因为用了转轴消去了一个参数 λ_7 的结果．

在研究稳定性问题及其它一些重要问题，例如有关希尔伯特第 16 问题的极限环的个数问题方面，第一个错误应当改正，否则便会导致不正确的结论．第二个方面必须补充，即求出全部六个独立参数 λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6, λ_7 的公式，以便直接应用．

这样就提出了新的问题．在解决这一问题时，还需要采取新的方法．巴乌京的 $\bar{v}_7$ 的符号错误长期没有被查出，就是由于推导的工作量很大，很容易出错．为了解决这一类问题，我们开展了用快速大存储量的计算机进行微分方程公式推导的工作，下面是具体结果．

（二）六个独立参量的结果

(4.1) 中 $\lambda_1 \neq 0$ 是焦点，$\lambda_1 > 0$ 为不稳定，$\lambda_1 < 0$ 为稳定，故以下只研究 $\lambda_1 = 0$ 的情形．

具体对下型的方程组

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + (L_2 - L_4)x^2 + 2(L_7 - L_5 - L_3)xy + L_4y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= -x - L_5x^2 + 2(L_6 + L_4 - L_2)xy + (L_5 - L_7)y^2 \end{aligned} \tag{4.5}$$

进行考查．

选取这样的形式理由如下：

(1) 六个独立参数.

命

$$\lambda_2 = L_2 - L_4,\ \lambda_3 = L_7 - L_5 - L_3,\ \lambda_4 = L_4,$$

$$\lambda_5 = -L_5,\ \lambda_6 = -L_2 + L_4 + L_6,\ \lambda_7 = L_5 - L_7,$$

则可见

$$L_2 = \lambda_2 + \lambda_4,\ L_3 = -\lambda_3 - \lambda_7,\ L_4 = \lambda_4,$$

$$L_5 = -\lambda_5,\ L_6 = \lambda_2 + \lambda_6,\ L_7 = -\lambda_5 - \lambda_3.$$

由此可见,任取完全独立的六个参数 $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7$, 可以有对应的参数组 $L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7$. 反之亦然. 因此,这个形式是最一般性的.

(2) 参数的反对称形式.

对方程组 (4.5) 作坐标轴旋转90°,即将 (x, y) 改为 $(y, -x)$ 则方程 (4.5) 化为方程组

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y + (L_7 - L_5)x^2 \\ &\quad + 2(-L_2 + L_4 + L_6)xy + L_5y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= -x + L_4x^2 + 2(L_3 + L_5 - L_7)xy \\ &\quad + (-L_4 + L_2)y^2.\end{aligned} \tag{4.6}$$

将 (4.5) 与 (4.6) 比较,可见只要将参数组

$L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7$ 依次用

$L_7, -L_6, L_5, -L_4, L_3, -L_2$ 代替,

亦即将 L_m 用 $(-1)^m L_{9-m}$ 代替 $(m = 2, \cdots, 7)$. 注意到坐标轴的旋转不影响稳定性的性质及中心与焦点的判定,因此,这可以用来简化计算.

(3) 判据的简化.

利用发散量的关系,对方程组 (4.5)

$$\frac{\partial X(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Y(x, y)}{\partial y} = 2L_6x - 2L_3y = 0,$$

可见 $L_3 = L_6 = 0$ 时, (4.5) 为中心,

利用调和函数的性质

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\equiv L_2=0,$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\equiv L_7=0.$$

可见 $L_2=L_7=0$ 时，(4.5) 为中心，这样公式可以简化及核验.

对 (4.5) 求李雅普诺夫函数

$$F\equiv F(x,y)=\sum_{j=2}^{8}F_j(x,y;L_i), \tag{4.7}$$

其中

$$F_2(x,y;L_i)=\frac{1}{2}(x^2+y^2),$$

$$F_j(x,y;L_i)=\sum_{k=0}^{j}f_{jk}(L_i)x^{j-k}y^k, \tag{4.8}$$

$f_{jk}(L_i)$ 为 L_i 的多项式,使得沿 (4.5) 的积分曲线作 $F(x,y)$ 对 t 的微分

$$\left.\frac{dF(x,y)}{dt}\right|_{(4.5)}=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\left.\frac{dx}{dt}\right|_{(4.5)}+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\left.\frac{dy}{dt}\right|_{(4.5)}$$

$$=V_3(L_i)y^4+V_5(L_i)y^6+V_7(L_i)y^8\ , \tag{4.9}$$

其中 $V_3(L_i)$, $V_5(L_i)$, $V_7(L_i)$ 依次为 $L_2\cdots L_7$ 的二次、四次、六次多项式，则 (4.5) 在原点的稳定性性质由下列判据所决定：

$V_3(L_i)>0$，不稳定，

$V_3(L_i)<0$，稳定，

$V_3(L_i)=0$，$V_5(L_i)>0$，不稳定，

$\qquad\qquad V_5(L_i)<0$，稳定，

$V_3(L_i)=V_5(L_i)=0$，$V_7(L_i)>0$，不稳定，

$\qquad\qquad\qquad\qquad V_7(L_i)<0$，稳定，

$V_3(L_i)=V_5(L_i)=V_7(L_i)=0$，中心型稳定。

下面是 $V_3(L_i)$, $V_5(L_i)$, $V_7(L_i)$ 的具体形式，

$$V_3 = \frac{2}{3} L_2 L_3 - \frac{2}{3} L_6 L_7.$$

这是两项，为了以后写得清楚和方便起见，用了下面的表格形式：

$V_3 =$（两项）

项 次	系 数		方 次					
	分子	分母	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
1	2	3	1	1	0	0	0	0
2	−2	3	0	0	0	0	1	1

用这样的记号，有

$V_5 =$（21 项）

项 次	系 数		方 次					
	分 子	分 母	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
1	−14	9	2	1	1	0	0	0
2	2	3	2	0	0	1	1	0
3	−2	1	2	0	0	0	1	1
4	−44	45	2	1	0	0	1	0
5	−28	15	1	2	0	0	0	1
6	−56	15	1	1	1	0	1	0
7	−64	15	1	1	0	0	2	0
8	8	15	1	3	0	0	0	0
9	32	9	1	0	1	0	1	1
10	−4	15	1	0	0	1	2	0
11	28	9	1	0	0	0	2	1
12	4	3	1	2	0	1	0	0
13	2	3	1	1	0	0	0	2
14	4	15	0	2	1	0	0	1
15	−8	15	0	1	0	1	1	1
16	−4	15	0	1	0	0	1	2
17	−2	3	0	1	1	0	0	2
18	44	15	0	0	1	0	2	1
19	−2	1	0	0	0	1	1	2
20	56	15	0	0	0	0	3	1
21	4	3	0	0	0	0	1	3

利用 $V_3=0$ 可以简化 V_5 的形式，即

$\tilde{V}_5=(14\text{ 项})=V_5|_{V_3=0}$

项次	系数		方次					
	分子	分母	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
1	2	3	2	0	0	1	1	0
2	−2	1	2	0	0	0	1	1
3	2	1	1	0	1	0	1	1
4	−4	15	1	0	0	1	2	0
5	32	15	1	0	0	0	2	1
6	4	15	0	2	1	0	0	1
7	4	5	0	1	0	1	1	1
8	−32	15	0	1	0	0	1	2
9	−2	3	0	1	1	0	0	2
10	8	15	0	2	0	0	1	1
11	−4	5	0	0	1	0	2	1
12	−2	1	0	0	0	1	1	2
13	−8	15	0	0	0	0	3	1
14	2	1	0	0	0	0	1	3

V_7 有 129 项。利用 $V_3=0$, $V_5=0$ 的条件，可以压缩到 43 项，即

$\tilde{V}_7=V_7|_{V_3=V_5=0}=(43\text{ 项})$

项次	系数		次方					
	分子	分母	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
1	8	35	1	0	2	1	2	0
2	−24	35	1	0	2	0	2	1
3	16	175	1	0	1	1	3	0
4	−48	175	1	0	1	0	3	1
5	152	105	1	0	0	2	2	1
6	8	35	1	0	0	3	2	0
7	−116	21	1	0	0	1	2	2
8	−92	35	1	0	0	0	2	3
9	−8	35	0	2	3	0	0	1
10	−24	35	0	1	2	1	1	1
11	24	35	0	1	2	0	1	2

续表

项次	系数		次方					
	分子	分母	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
12	−64	25	0	1	1	1	2	1
13	−96	175	0	2	2	0	1	1
14	64	175	0	1	1	0	2	2
15	−92	105	0	2	1	0	0	3
16	−8	35	0	2	1	2	0	1
17	16	21	0	3	1	1	0	1
18	−16	525	0	3	1	0	0	2
19	−16	25	0	2	1	0	2	1
20	16	105	0	4	1	0	0	1
21	−24	35	0	1	0	3	1	1
22	−40	7	0	1	0	2	1	2
23	64	35	0	2	0	2	1	1
24	132	35	0	1	0	1	1	3
25	−3488	525	0	2	0	1	1	2
26	208	105	0	3	0	1	1	1
27	−176	105	0	1	0	1	3	1
28	272	525	0	1	0	0	3	2
29	92	35	0	1	0	0	1	4
30	−872	525	0	2	0	0	1	3
31	−272	525	0	3	0	0	1	2
32	−32	105	0	2	0	0	3	1
33	−32	15	0	2	1	1	0	2
34	32	105	0	4	0	0	1	1
35	24	35	0	0	3	0	2	1
36	128	175	0	0	2	0	3	1
37	24	35	0	0	1	2	2	1
38	32	175	0	0	1	0	4	1
39	92	35	0	0	1	0	2	3
40	32	5	0	0	1	1	2	2
41	−32	105	0	0	0	2	3	1
42	1152	175	0	0	0	1	3	2
43	872	525	0	0	0	0	3	3

（三）巴乌京型方程的判定

在前面，将 $L_7=0$，则得到巴乌京型的方程，结果可由前面的

$\widetilde{V}_7$ 简化而得。

为对比方便，也可写成以下形式

$$\frac{dx}{dt}=y-L_3x^2-(2L_2+L_5)xy+L_6y^2,$$
$$\frac{dy}{dt}=-x-L_2x^2+(2L_3+L_4)xy+L_2y^2. \tag{4.10}$$

在(4.10)中以 $-y$ 代 y 稳定性不变，但得到(4.1)中将 $\lambda_1=0$ 的情形。

这时得到

$V_3=-\frac{1}{3}L_5(L_3-L_6)$,

V_5 有 17 项，利用 $V_3=0$，可化为

$\widetilde{V}_5=V_5|_{V_3=0}=\frac{1}{15}L_2L_4(L_3-L_6)(L_4+5L_3-5L_6)$,

V_7 有 74 项，利用 $V_3=0$ 及 $V_5=0$，可化为

$\widetilde{V}_7=V_7|_{V_3=0,V_5=0}=-\frac{2}{7}L_2L_4(L_3-L_6)^2(L_3L_6-L_2^2-2L_6^2)$.

将这个结果与(一)对比，可以看到 V_3 与 $\bar{v}_3$ 同号，$\widetilde{V}_5$ 与 $\bar{v}_5$ 同号，但 $\widetilde{V}_7$ 与 $\bar{V}_7$ 反号，经验算，巴乌京的 $\bar{V}_7$ 的符号是错的，应予改正。本节结果的详细报告可参考文献[34][35][36]。

第十一章　吕卡提方程定义的系统

§1. 问题的提出

在报告空间曲线的封闭性问题时，陈省身教授提出了周期系数的吕卡提方程在什么条件下具有周期解的问题.

设有一个吕卡提方程

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x), \tag{1.1}$$

其系数函数 $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ 均为具有周期 2π 的实连续函数，要研究在什么条件下，(1.1) 具有周期 2π 的实解 $y = y(x)$，并且研究它的稳定性判据.

§2. 必要条件

定理 2.1: 假设方程 (1.1) 的所有的解均为 2π 周期的，则系数函数 $A(x)$, $B(x)$ 及 $C(x)$ 必均为 2π 周期的.

这个定理的条件还可削弱到下面的

定理 2.2: 假设方程 (1.1) 有三个解具有 2π 周期，则系数函数 $A(x)$, $B(x)$ 及 $C(x)$ 必均为 2π 周期的.

证: 已知三个周期 2π 的解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 及 $y_3(x)$. 则利用吕卡提方程的特性，通解可以写成

$$\frac{y - y_1(x)}{y - y_2(x)} \cdot \frac{y_3(x) - y_2(x)}{y_3(x) - y_1(x)} = c \text{（任意常数）}.$$

将此方程微分，则 $A(x)$, $B(x)$ 及 $C(x)$ 可以表示成 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ 及其导函数 $y_1'(x)$, $y_2'(x)$, $y_3'(x)$ 的有理组合，故 $A(x)$, $B(x)$ 及 $C(x)$ 均为周期 2π 的函数. 定理 2.2 证毕.

定理 2.2 的条件不能再削弱到两个周期解. 下面是一个反例:

$$\frac{dy}{dx}=e^{x}y(y-1),$$

则有两个周期解 $y=0$ 及 $y=1$, 可是系数函数 $A(x)=e^{x}$, $B(x)=-e^{x}$ 都不是 x 的周期函数.

但是,一般可以得到下面的必要条件:

定理 2.3: 假设方程 (1.1) 有周期 2π 的解, 则必存在周期 2π 的函数 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 及 $\gamma(x)$ 使得线性组合

$$\alpha(x)A(x)+\beta(x)B(x)+\gamma(x)C(x)$$

是 2π 周期的函数.

证: 如 $y=y_1(x)$ 为 (1.1) 的周期 2π 的解, 则例如取 $\alpha(x)=y_1^2(x)$, $\beta(x)=y_1(x)$, $\gamma(x)=1$, 则线性组合为 $\frac{dy_1(x)}{dx}$ 自然也是 2π 的周期函数. 定理得证.

以下我们假设 $A(x)$, $B(x)$ 及 $C(x)$ 均为 x 的 2π 周期的连续函数,作 y 的二次方程

$$F(y,x)\equiv A(x)y^2+B(x)y+C(x)=0, \tag{2.1}$$

在 $A(x)\neq 0$ 条件下,有两个实解

$$y=y_1(x)=-\frac{B}{2A}+\sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2-\frac{C}{A}} \tag{2.2}$$

及

$$y=y_2(x)=-\frac{B}{2A}-\sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2-\frac{C}{A}}. \tag{2.3}$$

由于二次方程 (2.1) 的实周期 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 的存在性与吕卡提方程 (1.1) 的实周期解 $y(x)$ 的存在性有密切关系, 我们称 (2.1) 为 (1.1) 的"示性代数方程".

定理 2.4: 如果对 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, $F(y;x)=0$ 没有实解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ (即对 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, $B^2(x)<4A(x)C(x)$), 则 (1.1) 没有周期 2π 的实解.

证: 用反证法. 如果 (1.1) 有周期 2π 的实解, 以 $y=y(x)$ 记

它，则

$$0 = y(2\pi) - y(0) = \int_0^{2\pi} \frac{dy(x)}{dx} dx$$

$$= \int_0^{2\pi} [A(x)y^2(x) + B(x)y(x) + C(x)]dx \neq 0,$$

最后 $\neq 0$ 是由于 $B^2(x) < 4A(x)C(x)$，故积分中括号内的表示是定号的，因此，积分不能为零. 这是一个矛盾. 定理 2.4 证毕.

定理 2.4 的证明还可以得到更强的结果，即

定理 2.5：方程 (1.1) 的实周期解 $y = y(x)$ 的曲线，一定与 (2.1) 的实分枝曲线相交.

由此可见，(1.1) 的周期解的存在性要求 (2.1) 有实分枝（注意，并不要求对所有 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$，$y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 都是实的，只要求对某些 x 成立）.

§3. 充 分 条 件

定理 3.1：设 $A(x)$，$B(x)$，$C(x)$ 是 2π 周期的实连续函数，并且在 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 中有

$$A(x)C(x) < 0, \tag{3.1}$$

则 (1.1) 存在两个周期 2π 的实连续函数

$$y = y^{(1)}(x) \ \text{及}\ y = y^{(2)}(x),$$

并且具有性质

$$y^{(1)}(x) > 0 > y^{(2)}(x),$$

$y = y^{(1)}(x)$ 与 $y = y_1(x)$ 相交，

$y = y^{(2)}(x)$ 与 $y = y_2(x)$ 相交.

此外，(1.1) 没有其它的 2π 周期的解

证：由 (3.1)，不妨设 $A(x) > 0$，$C(x) < 0$，否则用 $-x$ 代 x 加以证明.

在 $y = 0$ 上，$\dfrac{dy}{dx} = C(x) < 0$，

另一方面 $A(x)$ 为 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 中的正的连续函数，故有正下界，即

$A(x) \geqslant k > 0\ (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

$B(x)$及 $C(x)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 中连续,故有界,即 $|B(x)| \leqslant B$, $|C(x)| \leqslant C\ (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$. 取

$$Y = 1 + \frac{2B}{k} + \sqrt{\frac{2C}{k}} > 0,$$

则在 $y = \pm Y$ 上,有

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= A(x)Y^2 \pm B(x)Y + C(x) \\ &\geqslant kY^2 - BY - C \\ &= \left(\frac{kY^2}{2} - BY\right) + \left(\frac{kY^2}{2} - C\right) \\ &= \frac{kY}{2}\left(Y - \frac{2B}{k}\right) + \frac{k}{2}\left(Y^2 - \frac{2C}{k}\right) \\ &\geqslant \frac{k}{2} + \frac{k}{2} = k > 0,\end{aligned}$$

故
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=\pm Y} > 0.$$

利用 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=0} < 0$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=\pm Y} > 0$, 则可见由

$$x = 0,\ -Y \leqslant y \leqslant 0$$

出发的 (1.1) 的解,到达 $x = 2\pi$ 时,必有 $-Y < y < 0$, 故由不动点原理, 有一个解存在, 使得 $y(0) = y(2\pi)$. 取这样一个解用 $y = y^{(2)}(x)$ 记它,则知 $y^{(2)}(x) < 0$.同理由 $x = 2\pi$, $0 \leqslant y \leqslant Y$ 出发的 (1.1) 的解,到达 $x = 0$ 时, 必有 $0 < y < Y$, 故由不动点原理, 有一解存在,使得 $y(2\pi) = y(0)$, 取这样一解用 $y = y^{(1)}(x)$记它, 则 $y^{(1)}(x) > 0$.

其次,我们断言,没有其它周期解存在. 因为如有其它周期解存在,则三个周期解的存在,可将其它解表成这三个周期解的有理函数,则所有的解都必为周期的. 但是, 不难看出, 经过 $y = 0$ 上任一个的解均不为周期的,因为过 $y = 0$ 上的解,由于

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=0} = C(x) < 0,$$

故当 x 增加时，$y(x)$ 减少，所以不能再回到 $y=0$；又由于 $y=y^{(2)}(x)$ 的限制不能到 $-\infty$，故这样的解都不是周期的.

过 $y=0$ 上之点的解不是周期的，由此知道，除 $y=y^{(1)}(x)$ 及 $y=y^{(2)}(x)$ 外，没有其它的周期解存在.

注意到 $A(x)>0$，$C(x)<0$，故 $y_1(x)>0$，$y_2(x)<0$. 因此，$y=y_1(x)$ 只能而且必须与 $y=y^{(1)}(x)$ 相交，$y=y_2(x)$ 只能而且必须与 $y=y^{(2)}(x)$ 相交. 这样定理 3.1 便全部证明了.

这个定理表明了，(1.1) 及其示性代数方程 (2.1) 的密切关系.

条件 (3.1) 实际上保证 $y=y_1(x)$ 及 $y=y_2(x)$ 都是实曲线，并且它们中间有一条直线 $y=0$ 隔开.

条件 (3.1) 可以适当放宽，可得下面的

定理 3.2: 假设对所有的 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$，

$$A(x) \neq 0, \tag{3.2}$$

$$B^2(x) > 4A(x)C(x), \tag{3.3}$$

以及

$$\min_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} y_1(x) > \max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} y_2(x), \tag{3.4}$$

则 (1.1) 有且只有两个具周期 2π 的解

$$y=y^{(1)}(x),\quad y=y^{(2)}(x),$$

并且

$$y^{(1)}(x) > y^{(2)}(x),$$

而且 $y=y^{(1)}(x)$ 必定而且只与 $y=y_1(x)$ 相交，

$y=y^{(2)}(x)$ 必定而且只与 $y=y_2(x)$ 相交.

证: 条件 (3.2) 及 (3.3) 保证了 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 均为实解. 由闭区间连续函数取极值的性质知道，存在 $x=x_{\min}$ 及 $x=x_{\max}$ 使

$$y_2(x_{\max}) = \max_{0\leqslant x\leqslant \pi} y_2(x) < \min_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} y_1(x) = y_1(x_{\min}),$$

则在直线

$$y = \frac{1}{2}(y_2(x_{max}) + y_1(x_{min}))$$

上之点的 $\frac{dy}{dx}$ 都是同号的，便可用这一直线来代替定理 3.1 中的 $y = 0$ 直线的作用。定理 3.2 同样可得证明。

定理 3.2 的条件与结论可以减弱到:

定理 3.3: 假设对所有的 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$,

$$A(x) \neq 0,$$

$$B^2(x) \geqslant 4A(x)C(x), \tag{3.3$'$}$$

以及

$$\min_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} y_1(x) \geqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} y_2(x), \tag{3.4$'$}$$

则 (1.1) 存在周期解.

证: 这时 $y = \frac{1}{2}(y_1(x_{min}) + y_2(x_{max}))$ 上之点的 $\frac{dy}{dx}$ 不变号，故仍可证周期解的存在，但不一定能保证有两解存在了。反例，如 $\frac{dy}{dx} = y^2$，则只有一个周期解 $y \equiv 0$。

注意条件 (3.4) 及 (3.4)$'$ 不能再减弱到

$$y_1(x) > y_2(x). \tag{3.4$''$}$$

反例如下:

$$\frac{dy}{dx} = (y - \sin^2 x)(y - \sin^2 x - \delta^2),$$

当 $\delta = 0$ 时，这个方程没有周期解，故当 $0 < \delta \leqslant \Delta$，$\Delta$ 足够小时，这个方程也没有周期解，但这时

$$y_1(x) = \sin^2 x + \delta^2, \quad y_2(x) = \sin^2 x,$$

$$y_1(x) > y_2(x).$$

§4. 周期解的稳定性判据

由§3的证明可以看出两个周期解的情形，则一为稳定，一为不稳定。具体地有

定理 4.1: 设 $A(x)C(x) < 0\ (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$, 则当

$A(x) < 0$ 时, $y = y^{(1)}(x)$ 为稳定的周期解,

$y = y^{(2)}(x)$ 为不稳定的周期解,

$A(x) > 0$ 时, $y = y^{(1)}(x)$ 为不稳定的周期解,

$y = y^{(2)}(x)$ 为稳定的周期解,

定理 4.2: 假设与定理 3.2 同,则结论与定理 4.1 相同.

对于更一般的条件下的周期解可有更一般的判据. 设 $y = y_0(x)$ 为 (1.1) 的一个实连续周期 2π 的解, 利用吕卡提方程的特性,通解 $y = y(x)$ 可以写成

$$
\begin{aligned}
y(x) - y_0(x) = &(y(x_0) - y_0(x_0)) \\
\times &\left[\exp\left(\int_{x_0}^{x}(2A(x)y_0(x) + B(x))\,dx\right)\right] \\
&\Big/\left[1 - (y(x_0) - y_0(x_0))\int_{x_0}^{x} A(x)\right. \\
&\left.\times \exp\left(\int_{x_0}^{x}(2A(x)y_0(x) + B(x))dx\right)dx\right].
\end{aligned}
$$

定义:

$$
I_1 = \int_0^{2\pi}(2A(x)y_0(x) + B(x))dx,
$$

$$
I_2 = \int_0^{2\pi} A(x)\exp\left(\int_0^{x}(2A(x)y_0(x) + B(x))\,dx\right)dx,
$$

则有下面的

定理 4.3: (1.1) 的周期解 $y = y_0(x)$ 的稳定性质由下法判定:

$I_1 < 0$, 则 $y = y_0(x)$ 为渐近稳定,

$I_1 = 0$, $\begin{cases} I_2 = 0, & \text{则 } y = y_0(x) \text{ 为稳定,中心型,但不是渐近稳定,} \\ I_2 \neq 0, & \text{则 } y = y_0(x) \text{ 为半稳定, 即一侧为稳定, 一侧为不稳定,} \end{cases}$

$I_1 > 0$, 则 $y = y_0(x)$ 为不稳定.

证: 当 $I_1 = \int_0^{2\pi}(2A(x)y_0(x) + B(x))dx < 0$, 在 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 中,设 $|A(x)| \leqslant A$, $|B(x)| \leqslant B$, $|y_0(x)| \leqslant y_0$, 则有估计

$$\exp\left(\int_{x_0}^{x}(2A(x)y_0(x)+B(x))dx\right)$$
$$\leqslant \exp(2\pi(2Ay_0+B))\exp\left(\left[\frac{x-x_0}{2\pi}\right]I_1\right),$$
这里方括号[ ]表示整数部分.

由于 $I_1<0$, 故当 $x\to\infty$ 时,分子有
$$\exp\left(\int_{x_0}^{x}(2A(x)y_0(x)+B(x))\,dx\right)\to 0,$$
在分母中
$$\left|\int_{x_0}^{x}A(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x}(2A(x)y_0(x)+B(x))\,dx\right)dx\right|$$
$$\leqslant A\exp(2\pi(2Ay_0+B))$$
$$\times\int_{x_0}^{x}\exp\left(\left[\frac{x-x_0}{2\pi}\right]I_1\right)dx$$
$$\leqslant A\exp(2\pi(2Ay_0+B))2\pi[1+e^{I_1}+e^{2I_1}+\cdots]$$
$$=A\exp(2\pi(2Ay_0+B))2\pi/(1-e^{I_1})=K_0>0,$$
则只要取初值
$$|y(x_0)-y_0(x_0)|<\frac{1}{2K_0}$$
即可保证渐近稳定.

当 $I_1=0$, $I_2=0$ 时, 分子分母都是周期连续函数, 因此, 只要取 $y(x_0)-y_0(x_0)$ 足够小,使分母不为零(对 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 这个有界闭集,这是可能的),即得中心型.

当 $I_1=0$, $I_2\neq 0$ 时,分子是周期函数,并且有界.

当 $I_2\neq 0$, 则
$$\int_{x_0}^{x}A(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x}(2A(x)y_0(x)+B(x))\,dx\right)dx$$
$$=\left[\frac{x-x_0}{2\pi}\right]I_2+\int_{\left[\frac{x-x_0}{2\pi}\right]2\pi+x_0}^{x}A(x)$$
$$\times\exp\left(\int_{\left[\frac{x-x_0}{2\pi}\right]2\pi+x_0}^{x}(2A(x)y_0(x)+B(x))dx\right)dx$$
$$=\left[\frac{x-x_0}{2\pi}\right]I_2+I(x),$$

则

$$|I(x)| \leqslant 2\pi A\exp(2\pi(2Ay_0 + B)) = K_1.$$

取 $|y(x_0) - y_0(x_0)|$ 如此小，使

$$|y(x_0) - y_0(x_0)|K_1 < 1,$$

则分母

$$D(x) = 1 - (y(x_0) - y_0(x_0)) \int_{x_0}^{x} A(x)$$

$$\times \exp\left(\int_{x_0}^{x} (2A(x)y_0(x) + B(x))\,dx\right)dx$$

$$= 1 - \left[\frac{x - x_0}{2\pi}\right] I_2(y(x_0) - y_0(x_0))$$

$$- I(x)(y(x_0) - y_0(x_0))$$

$$= \{1 - I(x)(y(x_0) - y_0(x_0))\}$$

$$- \left[\frac{x - x_0}{2\pi}\right] I_2(y(x_0) - y_0(x_0)).$$

由此可见，当 $x_0 \leqslant x < x_0 + 2\pi$，则 $\left[\frac{x - x_0}{2\pi}\right] = 0$，

$$2 > D(x) = \{1 - I(x)(y(x_0) - y_0(x_0))\} > 0.$$

另一方面，当 $I_2(y(x_0) - y_0(x_0)) < 0$ 时，

$$-\left[\frac{x - x_0}{2\pi}\right] I_2(y(x_0) - y_0(x_0)) \geqslant 0,$$

并且当 $x \to \infty$ 时，

$$-\left[\frac{x - x_0}{2\pi}\right] I_2(y(x_0) - y_0(x_0)) \to +\infty,$$

因此，当

$$x \to \infty,$$

$$D(x) \to +\infty.$$

而分子是有界的，故有

$$(y(x) - y_0(x)) \to 0, \quad 当 \ x \to +\infty.$$

而当 $I_2(y(x_0) - y_0(x_0)) > 0$ 时，

则

$$-\left[\frac{x - x_0}{2\pi}\right] I_2(y(x_0) - y_0(x_0)) \leqslant 0,$$

并且当 $x \to \infty$ 时，

$$-\left[\frac{x-x_0}{2\pi}\right] I_2(y(x_0)-y_0(x_0)) \to -\infty.$$

因此，当 x 由 x_0 向 $+\infty$ 增加时，分母 $D(x)$ 由正变负．这样，第一个零点设为 x_1，则

$$\lim_{x \to x_1 - 0} D(x) = 0+.$$

故 $(y(x)-y(x_0)) \to \infty$，当 $x \to x_1 - 0$，故这一侧为不稳定．因此 $I_1 = 0$，$I_2 \neq 0$ 为半稳定．

最后，当 $I_1 > 0$，则分子

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\int_{x_0}^{x}(2A(x)y_0(x)+B(x))dx\right) \\
&= \exp\left(\left[\frac{x-x_0}{2\pi}\right] I_1\right)\exp\left(\int_{x_0+\left[\frac{x-x_0}{2\pi}\right]2\pi}^{x}(2A(x)y_0(x)\right. \\
&\qquad \left.+B(x))dx\right) \geqslant \exp\left(\left[\frac{x-x_0}{2\pi}\right] I_1\right) \\
&\qquad \times \exp(-2\pi(2Ay_0+B)) \to +\infty, \text{当 } x \to +\infty,
\end{aligned}$$

分母中

$$E(x) = \int_{x_0}^{x} A(x)\exp\left(\int_0^x (2A(x)y_0(x)+B(x))dx\right)dx,$$

当 $x \to +\infty$，或者有界，或者无界．

当它为有界时，例如 $|E(x)| \leqslant K_3$，则取

$$|y(x_0)-y_0(x_0)| < \frac{1}{2K_3},$$

可得分母

$$|1-(y(x_0)-y_0(x_0))E(x)| > \frac{1}{2},$$

故当 $x \to \infty$，$|y(x)-y_0(x)| \to +\infty$．

当 $E(x)$ 无界，则对任何小的 $|y(x_0)-y_0(x_0)|$，只要选取 $y(x_0)-y_0(x_0)$ 的符号，即可在某一有限值 x_1 处使

$$1-(y(x_0)-y_0(x_0))E(x_1) = 0.$$

故分母到 $x = x_1$ 将变为 0，由此可见，$y(x)-y_0(x)$ 将在 x 的有

限值处变成 ∞.

故 $I_1 > 0$ 则得到不稳定.

定理 4.4: 周期系数的吕卡提方程不存在全局渐近稳定的周期解.

证: 用反证法, 设 $y_0(x)$ 为 (1.1) 的全局渐近稳定的周期解, 则由定理 4.3 之分析,得到 $I_1 < 0$, 则分子有界并且不为零. 任取一值 x_1 使

$$\int_{x_0}^{x_1} A(x) \exp\left(\int_{x_0}^{x} (2A(x)y_0(x) + B(x))\,dx\right)dx \neq 0,$$

再取 $y(x_0)$ 使

$$1 - (y(x_0) - y_0(x_0))\int_{x_0}^{x_1} A(x) \times \exp\left(\int_{x_0}^{x} (2A(x)y_0(x) + B(x))\,dx\right)dx,$$

则对 $(x = x_0, y = y(x_0))$ 为初值之解 $y(x)$, 有

$$|(y(x_1) - y_0(x_1))| = \infty.$$

由此可见, $y_0(x)$ 不是全局渐近稳定的周期解.

证明完毕.

第十二章　若干其它类型

§1. 由线性近似决定的稳定性

我们研究系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t), \tag{1.1}$$

这里 $\boldsymbol{x}$ 及 $\boldsymbol{q}$ 是 n 维的向量函数，P 是一个常量的非奇异矩阵，我们假设

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to 0} \frac{\|\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t)\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = 0 \text{（对时间 } t \text{ 一致地成立）}, \tag{1.2}$$

例如，如果 $\boldsymbol{q}$ 的分量是收敛的幂级数，其关于 $\boldsymbol{x}$ 的幂次至少从 2 次开始，并且其系数都是 t 的有界函数．在这种情形条件 (1.2) 必然成立．为了简单起见，我们也可以假设 $\boldsymbol{q}$ 的分量在某个区域 Ω 内及对 $t \geqslant 0$ 都有关于 $\boldsymbol{x}$ 及 t 的连续一阶偏导数，这样，在区域 Ω 内及对 $t \geqslant 0$ 系统 (1.1) 满足解的基本存在唯一性定理的条件．

我们假设矩阵 P 的特征根 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 是各不相同的，并且，我们首先考虑它们都是实的情形，这时，存在一个非奇异实矩阵 Q，使得 $QPQ^{-1} = \mathrm{diag}(r_1, \cdots, r_n)$，现在，对系统 (1.1) 作坐标变换

$$\boldsymbol{y} = Q\boldsymbol{x}, \tag{1.3}$$

则

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{y}} = Q\dot{\boldsymbol{x}} = Q(P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t)) &= QPQ^{-1}\boldsymbol{y} + Q\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t) \\ &= \mathrm{diag}(r_1, \cdots, r_n)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{q}_1(\boldsymbol{y}, t),\end{aligned} \tag{1.4}$$

其中 $q_1 = Q\boldsymbol{q}$，显然有

$$\lim_{\|\boldsymbol{y}\|\to 0} \frac{\|q_1(y, t)\|}{\|y\|} = 0,$$

系统 (1.1) 经坐标变换 (1.3) 后,变成系统 (1.4), 我们可以看出系统 (1.4) 与系统 (1.1) 具有相同的性质,不过用一个对角矩阵来代替 (1.1) 中的矩阵 P 而已. 因此,我们可以直接对系统 (1.1) 进行研究,而在 (1.1) 中可以假设矩阵 $P = \mathrm{diag}(r_1, \cdots, r_n)$.

现在分别讨论下面两种情形:

(a) 根 r_k 都是负的,取

$$V = x_1^2 + \cdots + x_n^2,$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1.1)} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i \dot{x}_i = 2\sum_{i=1}^{n} x_i(r_i x_i + q_i(x_1, \cdots, x_n; t))$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} r_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2x_i q_i.$$

由于对 q_i 的假设知, 在一个足够小的区域 Ω 内, 函数 V 是正定函数,而 $\dot{V}$ 是负定函数,根据第一篇第一章定理 5.2, 得出系统 (1.1) 的平凡解是渐近稳定的.

(b) 在根 r_k 中,有几个根 (例如 $r_1, \cdots, r_p$; $p < r$) 是正的, 而其余的根是负的,这时取

$$V = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 \cdots - x_n^2,$$

因此

$$\dot{V} = 2\sum_{i=1}^{p} x_i \frac{dx_i}{dt} - 2\sum_{i=p+1}^{n} x_i \frac{dx_i}{dt}$$

$$= 2\sum_{i=1}^{p} x_i(r_i x_i + q_i) - 2\sum_{i=p+1}^{n} x_i(r_i x_i + q_i)$$

$$= 2(r_1 x_1^2 + \cdots + r_p x_p^2 - r_{p+1}x_{p+1}^2 - \cdots - r_n x_n^2)$$

$$+ 2(x_1 q_1 + \cdots + x_p q_p - x_{p+1} q_{p+1} - \cdots - x_n q_n),$$

在任意接近于原点的一些点 (例如 $x_{p+1} = \cdots = x_n = 0$) 上, V 是正的, 而 $\dot{V}$ 是正定的. 因此根据第一篇第一章定理 5.3, 系统 (1.1) 的平凡解是不稳定的.

现在假设在 r_k 中有些是复的,令 $r_1, \cdots, r_p$ 是实的, 而 r_{p+1}, $\bar{r}_{p+1}, \cdots, r_{p+m}$、$\bar{r}_{p+m}$ 是复的. 这里 $p + 2m = n$. 如果 $r_1, \cdots, r_p$

是负的，并且 r_{p+k}，$\bar{r}_{p+k}$ 有负的实部，我们作

$$V = x_1^2 + \cdots + x_p^2 + x_{p+1}\bar{x}_{p+1} + \cdots + x_{p+m}\bar{x}_{p+m},$$

沿着方程组的轨道求 V 的关于时间 t 的全导数，得出 $\dot{V}$ 是负定的，故系统 (1.1) 的平凡解是渐近稳定的.

另一方面，如果 $r_1, \cdots, r_p$ 中有些是正的，或者 r_{p+k} 中有些具有正的实部，我们可以对情形 (b) 中的 V 作出一些修改，由此来得出系统 (1.1) 平凡解的不稳定性.

以上仅对 P 的特征根是不相同的进行了讨论，对有重根的情形也可类似讨论，总结起来，我们得到下面定理(庞卡莱-李雅普诺夫定理).

定理 1.1：考虑 (1.1)

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t),$$

这里 $\boldsymbol{x}$ 及 $\boldsymbol{q}$ 是 n 维的向量函数，P 是一个常量矩阵，$\boldsymbol{q}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 及 t 是连续的，我们假设

$\lim\limits_{\|x\|\to 0} \dfrac{\|\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t)\|}{\|x\|} = 0$，对时间 t 一致地成立，如果矩阵 P 的所有特征根有负的实部，则系统 (1.1) 的平凡解是渐近稳定的，如果矩阵 A 中至少有一个特征根具有正的实部，则(1.1) 的平凡解是不稳定的.

例. 研究带有缓慢减质量的二体问题[31]，其轨道根数对时间变化的方程组为

$$\frac{de}{dt} = -\frac{(1-e^2)\cos E}{(1-e\cos E)}\frac{\dot{m}}{m}, \tag{1.5}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1-e\cos E)}\beta m^2 + \frac{\sin E}{e(1-e\cos E)}\frac{\dot{m}}{m}, \tag{1.6}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{(1-e^2)}{e}\frac{\sin E}{1-e\cos E}\frac{\dot{m}}{m}, \tag{1.7}$$

$$Gma(1-e^2) = c^2. \tag{1.8}$$

这里 e 是密切轨道的偏心率；E 是偏近点角；ω 是长轴与一常方向之间的夹角；a 是半长轴，点"·"表示关于时间 t 的微分，系统的

总质量 m 是一个时间 t 的单调缓慢减少的可微函数，m 的缓慢减少可以写成 $m = m(\alpha t)$，这里 α 是一个小的正常量，e，E 及 ω 在时间 $t = 0$ 的初始值为 e_0，E_0 及 ω_0，常数 β 由下式确定

$$\beta = \frac{G^2}{C^3}. \tag{1.9}$$

这里 G 是重力常量；C 是面积常量.

为了研究抛物轨道，我们引进真近点角 f，方程 (1.5) 及 (1.6) 则化成

$$\left.\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= -(e + \cos f)\frac{\dot{m}}{m}, \\ \frac{df}{dt} &= \beta(1 + e\cos f)^2 m^2 + \frac{\sin f}{e}\frac{\dot{m}}{m}, \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

在时间 $t = 0$ 的初始值为 e_0 及 f_0.

对任何函数 $m(t)$ 而言，

$$e = 1, \quad f = \pi \tag{1.11}$$

为 (1.10) 的一个解，我们称解 (1.11) 为一个驻定的抛物解，现在我们要研究这个解的稳定性问题. 为此，我们假设 $m(t) \in C^1([0, \infty))$，并且质量消失过程不是有限的.

我们作变换

$$e^* = e - 1,$$
$$f^* = f - \pi,$$

方程 (1.10) 成为

$$\begin{aligned} \frac{de^*}{dt} = \frac{de}{dt} &= -(e + \cos f)\frac{\dot{m}}{m} \\ &= -(e^* + 1 + \cos(f^* + \pi))\frac{\dot{m}}{m} \\ &= -(e^* + 1 - \cos f^*)\frac{\dot{m}}{m} \\ &= -e^*\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{m}}{m}(\cos f^* - 1), \end{aligned}$$

$$\frac{df^*}{dt} = \frac{df}{dt} = \beta(1 + e\cos f)^2 m^2 + \frac{\sin f}{e}\frac{\dot{m}}{m}$$

$$= \beta(1 + (e^* + 1)\cos(f^* + \pi))^2 m^2 + \frac{\sin(f^* + \pi)}{e^* + 1}\frac{\dot{m}}{m}$$

$$= \beta(1 - (e^* + 1)\cos f^*)^2 m^2 - \frac{\sin f^*}{e^* + 1}\frac{\dot{m}}{m}$$

$$= \beta m^2(1 - e^*\cos f^* - \cos f^*)^2 - \frac{\dot{m}}{m}\left(\frac{\sin f^*}{e^* + 1}\right),$$

即

$$\frac{de^*}{dt} = -\frac{\dot{m}}{m}e^* + \frac{\dot{m}}{m}(\cos f^* - 1),$$

$$\frac{df^*}{dt} = \beta m^2(1 - e^*\cos f^* - \cos f^*)^2 - \frac{\dot{m}}{m}\left(\frac{\sin f^*}{e^* + 1}\right).$$

我们指出，$e^* = f^* = 0$ 是以上方程组的解. 我们将以上方程组写成

$$\left.\begin{aligned} \frac{de^*}{dt} &= -\frac{\dot{m}}{m}e^* + \frac{\dot{m}}{m}(\cos f^* - 1), \\ \frac{df^*}{dt} &= -\frac{\dot{m}}{m}f^* + \beta m^2(1 - e^*\cos f^* - \cos f^*)^2 \\ &\quad - \frac{\dot{m}}{m}\left(\frac{\sin f^*}{e^* + 1} - f^*\right). \end{aligned}\right\} \quad (1.12)$$

在每一个方程右端的第一项是线性的，其它的项是非线性的. 但注意到不是常系数的，所以我们作变换

$$\tau = -\int\frac{\dot{m}}{m}dt + \tau_0. \quad (1.13)$$

这里 τ_0 可以这样确定，即要求当 $t = 0$ 时，$\tau = 0$，则积分方程 (1.13) 之后，得

$$\tau = \log\left(\frac{m(0)}{m}\right). \quad (1.14)$$

经变换 (1.13) 后，方程 (1.12) 变成

$$\left.\begin{aligned} \frac{de^*}{d\tau} &= e^* + (1 - \cos f^*), \\ \frac{df^*}{d\tau} &= f^* - \beta\frac{m^3}{\dot{m}}(1 - e^*\cos f^* - \cos f^*)^2 + \left(\frac{\sin f^*}{e^* + 1} - f^*\right). \end{aligned}\right\} \quad (1.15)$$

由 (1.14)，因为 $m(\alpha t)$ 关于时间 t 是单调减少的，故 τ 关于时间 t 是单调增加的，为了使系统对时间 τ 而言的稳定性的结论对时间 t 也成立，要求 $\tau\to\infty$，这就是对函数 $m(t)$ 的限制 (条件 1)。

如果项 $m^3/\dot{m}$ 关于时间是一致有界的，则系统 (1.15) 满足上面定理 1.1 的条件，因此，为了利用定理 1.1，对函数 $m(t)$ 又要加上使 $m^3/\dot{m}$ 关于时间是一致有界的限制 (条件 2)。

在系统 (1.15) 中，特征方程 $|P-\lambda E|=0$ 的二个根都是正的，即

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=0,\quad 故有\ \lambda=1\ 及\ 1.$$

这样一来，利用定理 1.1，我们可以得出下面的结论，如果 $m(t)$ 满足条件 1 及条件 2，则抛物驻定解 (1.11) 是不稳定的。即如果 $\log\left(\frac{m(0)}{m(t)}\right)$ 当 t 增加时无限增加，并且 $m^3/\dot{m}$ 对时间 t 是一致有界的，则解 (1.11) 是不稳定的。为了指出函数 $m(t)$ 确实可以满足这些条件，我们利用所谓琼斯-埃丁顿 (Jeans-Eddington) 关系式

$$\dot{m}=-\alpha m^n,\quad m(0)=m_0, \tag{1.16}$$

这里 n 是实常数，对每一个 n，可以得到方程 (1.16) 的一个解 (称为琼斯-埃丁顿函数 $m_n(t)$)，我们容易指出，当 $n\geqslant 1$ 时，条件 1 满足，当 $n\leqslant 3$ 时，条件 2 满足。因此我们得到这样的结论：对所有 $1\leqslant n\leqslant 3$ 的琼斯-埃丁顿函数而言，抛物驻定解 (1.11) 是不稳定的。

§ 2. 渐近稳定性的范围

在解决工程实际中所提出的问题时，不仅要知道系统的平衡状态是否是渐近稳定的，并且要回答渐近稳定性区域究竟有多大。当初条件取在这区域中，才能确保由此初条件所确定的解，当 $t\to\infty$ 时，趋于这个平衡位置。这样就不能由系统的线性近似来

决定，非线性部分效果必须考虑．下面我们先证明几个定理，它们给出了估计渐近稳定性区域的方法，然后再举例说明之．

我们考虑自治系统

$$\dot{x} = X(x), \tag{2.1}$$

假设函数 $X(x)$ 有连续的一阶偏导数，或者假设能保证解的存在性、唯一性及解对初值连续依赖性的任何另外的条件；我们也假设 $X(0) = 0$，即在原点有一个平衡位置．

我们首先必须熟悉伯克霍夫（Birkhoff）的极限集合的概念，令 $x(t)$ 是（2.1）的一个解，Γ^+ 是一个点集．

定义 2.1：如果对任意 $P \in \Gamma^+$，总存在一个序列 t_n，使得当 $n \to \infty$ 时，$t_n \to \infty$ 及 $x(t_n) \to P$，则集合 Γ^+ 是解 $x(t)$ 的正极限集．

例如 $x(t)$ 螺旋地围绕一个极限环 δ，则 δ 是它的正极限集，如果 $x(t)$ 趋于一个点 A，则 A 是它的正极限点．

如果对于 $t \geqslant 0$，$x(t)$ 是有界的，容易证明，它的正极限集 Γ^+ 是非空的、连通的、紧致的及不变的．

不变性的定义如下：

定义 2.2：设 $P \in \Omega$，并且 $x(t, P)$ 是（2.1）的通过点 P 的解，如果 $x(t, P)$ 对所有在 $R = (-\infty, \infty)$ 内的 t 值是确定的，并且对所有在 R 内的 t 而言，$x(t, P)$ 是在集合 Ω 内，则集合 Ω 称为是不变集．

下面我们给出当 $t \to \infty$ 时，$x(t)$ 趋于集合 M 的定义．

定义 2.3：如果对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $T > 0$，使得对每个 $t > T$，有 M 内的一个点 P，具有 $\|x(t) - P\| < \varepsilon$．也就是说，对所有 $t > T$，点 $x(t)$ 是在 M 的 ε 邻域内，则我们就说当 $t \to \infty$ 时，$x(t)$ 趋于集合 M．

例如，如果对于 $t > 0$，$x(t)$ 是有界的，则当 $t \to \infty$ 时，$x(t)$ 趋于它的正极限集 Γ^+．

用反证法，如果不是这样，则有一个 $\varepsilon > 0$，具有这样的性质，对每个 $T > 0$，总存在一个 $t > T$，使得 $\|x(t) - P\| \geqslant \varepsilon$，对在

Γ^+ 内的所有 P 而言，因此，有一个序列 t_n（当 $n\to\infty$ 时，$t_n\to\infty$），使得 $\|x(t_n)-P\|\geqslant\varepsilon$，对在 Γ^+ 内的所有 P 而言．但是因为对于 $t\geqslant 0$，$x(t)$ 是有界的，序列 $x(t_n)$ 有一个极限点，它是在 Γ^+ 内，故得出矛盾．这样我们可以得到下面的结论：

引理 2.1：如果对于 $t\geqslant 0$，$x(t)$ 是有界的，而且 M 包含了 $x(t)$ 的正极限集 Γ^+，则当 $t\to\infty$ 时，$x(t)\to M$。

有了这些预备知识之后，我们可以引进一个定理，它给出了确定渐近稳定性范围的一些方法．

定理 2.1：令 Ω 是一个有界闭集，在 Ω 内开始的(2.1)的每个解，对以后的所有时间都在 Ω 内。假设有一个纯量函数 $V(x)$，它在 Ω 内有连续的一阶偏导数，并且在 Ω 内有 $V(x)>0(x\neq 0)$，$\dot{V}(x)\leqslant 0$，令 E 表示在 Ω 内满足 $\dot{V}(x)=0$ 的所有点的集合，令 M 表示 E 的最大不变集合，则当 $t\to\infty$ 时，在 Ω 内开始的每个解都趋于 M。

证：令 $x(t)$ 是一个开始于 Ω 内的解，因为在 Ω 内，$\dot{V}(x)\leqslant 0$，所以 $V(x(t))$ 是 t 的一个非增函数．$V(x)$ 在闭集 Ω 上是连续的，所以在 Ω 上有下界，因此，当 $t\to\infty$ 时，$V(x(t))$ 有一极限 C，再指出，由于 Ω 是一个闭集，所以 $x(t)$ 的正极限集 Γ^+ 是在 Ω 内，并且因为 V 在 Ω 上是连续的，所以在 Γ^+ 上有 $V(x)\equiv C$，Γ^+ 是一个不变集合，而且因为在 Γ^+ 上，$\dot{V}(x)=0$，因此 Γ^+ 是在 M 内，利用上面引理得到，当 $t\to\infty$ 时，$x(t)\to M$。即当 $t\to\infty$ 时，开始于 Ω 内的所有解都趋于 M。 证毕．

在一些应用中，定理 2.1 中李雅普诺夫函数构造本身将保证了集合 Ω 的存在性．可以使由 $V(x)\leqslant l$ 所确定的集合 Ω 是有界集合．如果在 Ω 内，$\dot{V}(x)\leqslant 0$，则对任何开始于 Ω 内的解 $x(t)$ 而言，$V(x(t))$ 是非增的．因此 $x(t)$ 对所有以后的时间都必须保留在 Ω 内．下面的定理是定理 2.1 的一个直接的推论．

定理 2.2：令 Ω 表示由 $V(x)\leqslant l$ 所确定的闭域，并假定 $V(x)$ 在 Ω 内有连续的一阶偏导数，此外，再假定 Ω 是有界的，并且在 Ω 内，$V(x)>0\ (x\neq 0)$，$\dot{V}(x)\leqslant 0$，则当 $t\to\infty$ 时，开始于 Ω 内的任何解都趋于 M（集合 M 如定理 2.1 中所定义）．

关于定理 2.2，我们指出，如果当 $\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$ 时，$V(\boldsymbol{x})\to\infty$，则由 $V(\boldsymbol{x})\leqslant l$ 所界限的集合 Ω 对所有 l 值是有界的．如果

$$\liminf_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} V(\boldsymbol{x}) = l_0,$$

则对所有 $l\leqslant l_0$ 而言，Ω 是有界的．

因此，在适当的情况下，集合 Ω 是渐近稳定性区域的一个估计，按照定理 2.1，过程是找一个区域 Ω 及一个适当的函数 $V(\boldsymbol{x})$，如果 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 沿着开始于 Ω 内的任何解（除原点以外）不恒等于零，则当 $t\to\infty$ 时，在 Ω 内开始的每个解都趋于原点．虽然在定理 2.2 中已指出，李雅普诺夫函数本身可以确定区域 Ω，但在某些例子中，更容易地作法是把寻找区域 Ω 及构造一个李雅普诺夫函数 $V(x)$ 的问题分开．

对列娜方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0 \tag{2.2}$$

的讨论，给出了应用定理 2.2 的一个很好的例子，其等价系统为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=y-F(x),\\ \dot{y}&=-g(x).\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

这里 $F(x)=\int_0^x f(u)du$，我们假设 f 及 g 是多项式，f 是偶次，g 是奇次，且 $xg(x)>0$．定义 $G(x)=\int_0^x g(u)du$，显然 $G(x)>0$，我们取李雅普诺夫函数为

$$V=\frac{1}{2}y^2+G(x).$$

V 是总能量 $\frac{1}{2}\dot{x}^2+G(x)$，加上项 $\dot{x}F(x)+\frac{1}{2}F^2(x)$，这是一个变化了的能量函数．不难算出

$$\dot{V}\big|_{(2.3)}=-g(x)F(x).$$

假设可以找到正数 a 及 l，使得满足下面两个条件：

1） $g(x)F(x)>0$，　　　当 $0<|x|<a$，

2） $G(x)<l\Rightarrow|x|<a$．

显然，以上两个条件保证了由 $V\leqslant l$ 所确定的区域 Ω 是有界的，并

且在 Ω 内，有 $\dot{V} \leqslant 0$. 因为对于 $0<|x|<a$，有 $\dot{V}<0$，而仅沿着 y 轴有 $\dot{V}=0$，因此集合 E 就是 y 轴，但是除去原点以外在 y 轴上所有点轨线的斜率

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{g(x)}{y-F(x)}$$

是有限的，故 y 轴不包含轨线的弧段，因此，M 是原点. 利用定理 4.2，当 $t\to\infty$ 时，在 $\frac{1}{2}y^2+G(x)<l$ 内的每个解都趋于原点.

例 1：考虑范德普尔 (Vanderpol) 方程

$$\ddot{x}+\varepsilon(x^2-1)\dot{x}+x=0,\quad \varepsilon>0,$$

其等价方程组为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=y-\varepsilon\left(\frac{1}{3}x^3-x\right),\\ \dot{y}&=-x.\end{aligned}\right\}$$

其线性部分的特征方程为

$$\begin{vmatrix}\varepsilon-\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\varepsilon\lambda+1=0,$$

得 $\lambda_{1,2}=\dfrac{\varepsilon\pm\sqrt{\varepsilon^2-4}}{2}$，当 $\varepsilon^2\geqslant 4$ 时，原点是不稳定的结点，当 $\varepsilon<4$ 时，原点是不稳定的焦点. 并且对所有 $\varepsilon>0$，方程有唯一的极限环. 上面的结果可以给出关于这个极限环的下界.

如果用 $-t$ 来代替方程中的 t，这时，积分曲线不变，但方向相反. 特别是极限环 δ 不变，而原点则变成是渐近稳定的，并且渐近稳定性区域正好是极限环 δ 的内部. 用 $-t$ 代替 t，这时方程变成

$$\ddot{x}+\varepsilon(1-x^2)\dot{x}+x=0.$$

这里

$$f(x)=\varepsilon(1-x^2),\quad g(x)=x,$$

$$F(x)=\varepsilon\left(x-\frac{x^3}{3}\right),\quad G(x)=\frac{1}{2}x^2,$$

$$V=\frac{1}{2}y^2+G(x)=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2,$$

$$\dot{V} = -g(x)F(x) = -\varepsilon x\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)$$
$$= -\varepsilon x^2\left(1 - \frac{x^2}{3}\right).$$

1）$g(x)F(x) = \varepsilon x^2\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) > 0$，当 $0 < x^2 < 3$，

2）$G(x) < l$，即 $\frac{1}{2}x^2 < l \Rightarrow x^2 < 3$，

故可取 $2l = 3$，即 $l = \frac{3}{2}$.

因此在区域 $V < l$ 内，即在 $x^2 + y^2 < 3$ 内的每个解，当 $t \to +\infty$ 时，都趋于原点，因此，对所有 $\varepsilon \neq 0$ 而言，极限环必须位于这个圆形区域以外．也就是说，极限环 δ 的位置，不论 ε 的值怎样，它都位于半径为 $\sqrt{3}$ 的圆外．这个例子生动地说明了用李雅普诺夫函数方法不仅可定出渐近稳定性的范围，而且也可估计极限环的位置，这一点对我们说来是一个很有意义的启发.

例 2：考虑方程

$$\ddot{x} + a\dot{x} + 2bx + 3x^2 = 0,\quad a,\ b > 0 \tag{2.4}$$

其等价方程组为

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -2bx - ay - 3x^2. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

有二个奇点：原点 o 及点 $P = \left(-\frac{2}{3}b,\ 0\right)$.

首先来讨论原点的稳定性，为此写出其特征方程

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2b & -a-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + b = 0,$$

设 λ_1, λ_2 为特征方程的根，则有

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -a < 0,\quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 2b > 0,$$

故 λ_1, λ_2 或者两个都是负实的，或者二个是具有负实部的共轭复根，因此原点是渐近稳定的.

其次来讨论奇点 $P\left(-\frac{2}{3}b,\ 0\right)$ 的性质，为此引进坐标变换

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{2}{3} b &= x^*, \\ y &= y, \end{aligned}\right\}$$

方程 (2.5) 在新坐标系 (x^*, y) 中为

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^* &= y, \\ \dot{y} &= -ay - 3\left(x^* - \frac{2}{3} b\right) x^*. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

其线性部分特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2b & -a-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a\lambda - 2b = 0.$$

因为 $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -2b < 0$，故特征根 λ_1，λ_2 为正负号相反的实根，因此奇点 P 是鞍点. 积分曲线的行为如图 1 所示，而图中的阴影区域就是原点的渐近稳定性区域，我们根据前面所述的方法来作出原点的渐近稳定性区域. 取

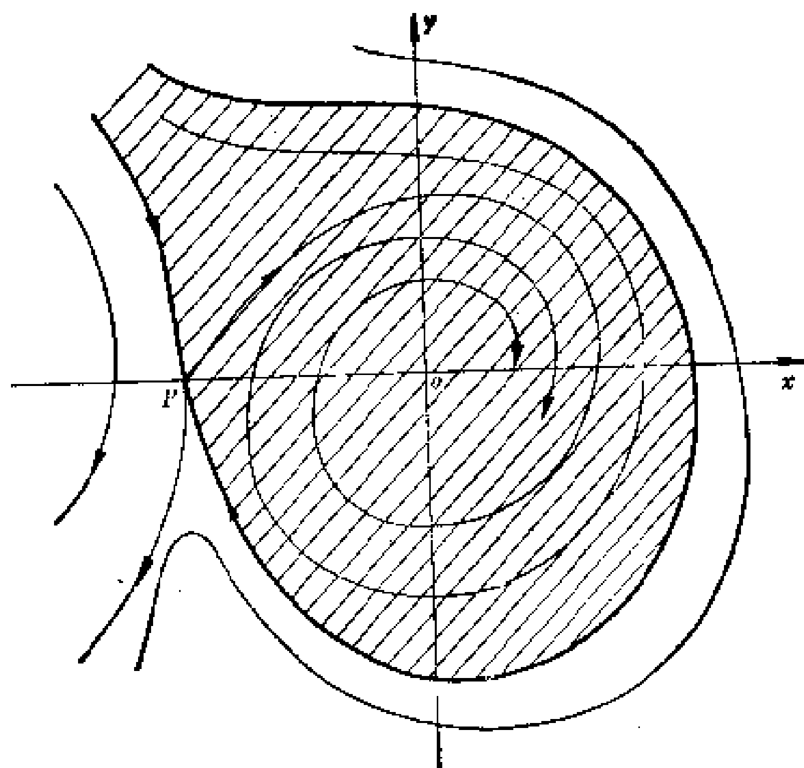


图 1

$$V(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \int_0^x (2bx + 3x^2) dx$$

$$= \frac{1}{2}y^2 + bx^2 + x^3,$$

$$\dot{V}|_{(2.5)} = -ay^2 \leqslant 0.$$

这样，在 x 轴外，$\dot{V} < 0$，集合 E 是这个 x 轴的一个子集，因为在除原点以外的 x 轴上有 $\frac{dy}{dx} = \infty$，因此，不变集合只能是原点及点 P. 取曲线

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + bx^2 + x^3 = k,$$

使得这曲线包含 P 点，这样

$$k = \frac{4}{9}b^2\left(b - \frac{2}{3}b\right) = \frac{4}{9}b^2 \times \frac{1}{3}b = \frac{4}{27}b^3,$$

我们作出曲线

$$\frac{1}{2}y^2 + bx^2 + x^3 = \frac{4}{27}b^3, \tag{2.7}$$

或者

$$y = \pm\sqrt{\frac{8}{27}b^3 - 2bx^2 - 2x^3}$$

的图形.

显然，曲线对于 x 轴是对称的，因为

$$\frac{dy^2}{dx} = -2(2bx + 3x^2),$$

$$\frac{d^2y^2}{dx^2} = -4b - 12x,$$

函数 (2.7) 当 $x = 0$ 时取极大值，而当 $x = -\frac{2}{3}b$ 时取极小值. 这样一来，$V = 4/27b^3$ 的图形由图 2 给出. 它是一个围绕原点的卵形线. 而这卵形线的内部即是我们所要求的渐近稳定性区域. 集合 E 是 x 轴的区间 PQ，而集合 M 是原点，因此开始于卵形区域内的所有轨线都趋于原点，故卵形区域是一个渐近稳定性区域.

例 3：在 [32] 中研究方程

$$\ddot{\varphi}+\alpha\dot{\varphi}+\frac{\gamma(1+k)\sin\varphi}{1+k\cos\varphi}-\beta=0, \tag{2.8}$$

其中 $0<k<1$，α，β，γ 均为大于零的常数，首先将方程 (2.8) 化为

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dt}=z,\\ \dfrac{dz}{dt}=-\alpha z-\gamma\dfrac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\cos\varphi}+\beta.\end{cases} \tag{2.9}$$

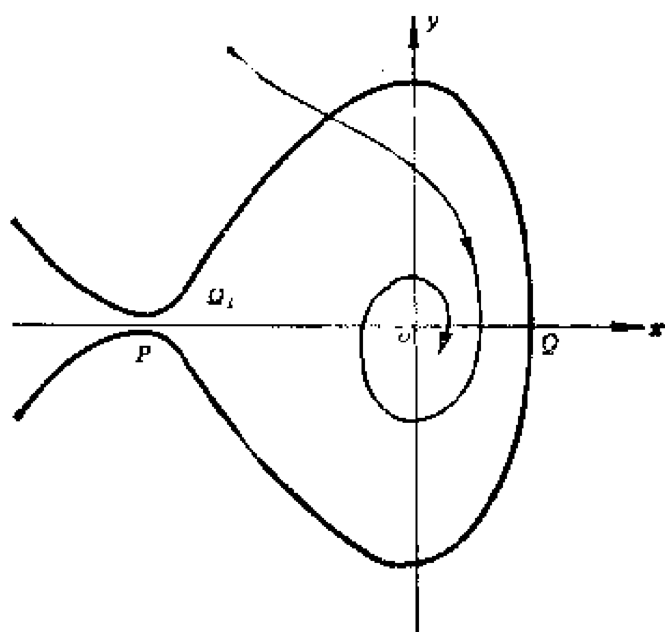


图 2

由于系统 (2.9) 的右端是 φ 的周期为 2π 的周期函数，所以我们只要在展开的相柱面

$$H:\{-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi;\ -\infty<z<+\infty\}$$

上来讨论即可以了.

不难证明，当参数满足下列条件：

1. $\beta\leqslant\gamma$，$1>k>0$；

2. $\beta>\gamma$，$1>k>k^*=\dfrac{\beta^2-\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$

之一时，系统(2.9)都有两个奇点。

下面证明，其中一个是稳定焦点(或结点)，另一个是鞍点。

记 $f(\varphi, k) = \dfrac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\cos\varphi}$，为求系统(2.9)的奇点，先求 $f(\varphi, k) = \dfrac{\beta}{\gamma}$ 之根 φ_1, φ_2，而 $o_1(\varphi_1, 0)$，$o_2(\varphi_2, 0)$ 即为系统(2.9)的奇点，现在讨论奇点 $o_1(\varphi_1, 0)$，$o_2(\varphi_2, 0)$ 的性质，先讨论 $o_1(\varphi_1, 0)$ 的性质，为此作变换

$$\begin{cases} x = \varphi - \varphi_1, \\ y = z. \end{cases} \tag{2.10}$$

系统(2.9)经变换(2.10)后为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\alpha y - \gamma f(x + \varphi_1, k) + \beta \\ \qquad = -\alpha y - \gamma f'_\varphi(\varphi_1, k)x + x \text{ 的二次以上项}, \end{cases}$$

其一次项的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\gamma f'_\varphi(\varphi_1, k) & -\alpha - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \alpha\lambda + \gamma f'_\varphi(\varphi_1, k) = 0,$$

$$p = \alpha > 0, \quad q = \gamma f'_\varphi(\varphi_1, k) > 0.$$

如果 $p^2 - 4q < 0$，$o_1(\varphi_1, 0)$ 为稳定焦点，

$p^2 - 4q > 0$，$o_1(\varphi_1, 0)$ 为稳定结点。

为了讨论奇点 $o_2(\varphi_2, 0)$ 性质，作变换

$$\begin{cases} x = \varphi - \varphi_2, \\ y = z. \end{cases} \tag{2.11}$$

系统(2.9)经变换(2.11)后为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\alpha y - \gamma f(x + \varphi_2, k) + \beta \\ \qquad = -\alpha y - \gamma f'_\varphi(\varphi_2, k)x + x \text{ 的二次以上项}. \end{cases}$$

其一次项的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\gamma f'_\varphi(\varphi_2, k) & -\alpha-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \alpha\lambda + \gamma f'_\varphi(\varphi_2, k) = 0.$$

因为 $q = \gamma f'_\varphi(\varphi_2, k) < 0$，故系统 (2.9) 的奇点 $o_2(\varphi_2, 0)$ 为鞍点。

现在求系统 (2.9) 的渐近稳定性区域，为此作李雅普诺夫函数

$$V = \frac{1}{2} z^2 + \int_{\varphi_1}^{\varphi} [\gamma f(u, k) - \beta] du,$$

显然 V 是 φ，z 的正定函数 $(-2\pi + \varphi_2 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2)$，

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.9)} = -\alpha z^2 \leqslant 0.$$

只有 $z = 0$ 时，$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.9)} = 0$，而 $z = 0$ 不是一个解，除非 $\varphi = \varphi_1$，$z = 0$，即奇点 $o_1(\varphi_1, 0)$，所以系统 (2.9) 的奇点 $o_1(\varphi_1, 0)$ 是渐近稳定的。

求出渐近稳定性区域的边界，即求通过鞍点 $o_2(\varphi_2, 0)$ 的曲线 $V = C_1$，将 $\varphi = \varphi_2$，$z = 0$ 代入上式，得

$$C_1 = -\beta(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{\gamma(1+k)}{k} \log \frac{(1 + k\cos\varphi_2)}{(1 + k\cos\varphi_1)},$$

故所求渐近稳定性区域的边界为

$$\frac{1}{2} z^2 = \beta(\varphi - \varphi_2) + \frac{\gamma(1+k)}{k} \log \frac{(1 + k\cos\varphi)}{(1 + k\cos\varphi_2)}. \quad (2.12)$$

曲线 (2.12) 即为图 3 中的阴影区域的边界。当 $k = 1$ 时，渐近稳定性区域为除去 $\varphi = \pm\pi$ 外的整个柱面[33]。

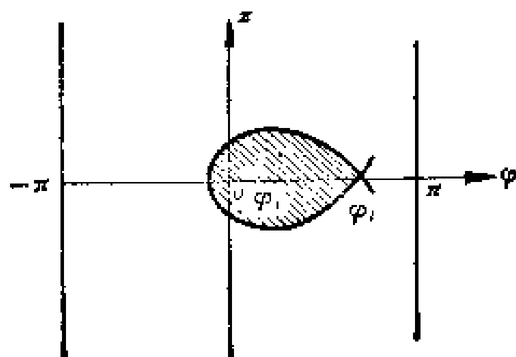


图 3

第四篇　若 干 应 用

第十三章　在非线性振动中的应用

§1. 强迫振荡中周期解的存在性[1]

在动力系统中经常发生振荡,有些振荡是属于我们所要求的,也有些振荡是我们所不要的、甚至是讨厌的,这是一个很重要的实际问题. 一般的通讯系统所依赖的就是能够产生稳定振荡的网络.

在一个控制系统或一个经济系统中出现的振荡往往可以引起很大的影响.

非线性振荡问题,对数学家的吸引力是很大的,这是常微分方程学科研究的一个很大的领域,在这个领域里已经获得了极其丰富的研究成果. 在这里我们所要做的事情,就是来阐明在振荡的研究和李雅普诺夫方法之间存在一个非常引人注目的关系.

首先考虑一个线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t), \quad t \geqslant 0. \tag{1.1}$$

这里 $\boldsymbol{f}(t)$ 是一个周期性的强迫项,其系数是常数; $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{f}(t)$ 是 n 维向量; A 是一个 $n \times n$ 级的常量矩阵; $\boldsymbol{f}(t+T) = \boldsymbol{f}(t)$, 即 $\boldsymbol{f}(t)$ 是一个周期为 T 的连续的周期函数.

对于这样一个线性系统,存在一些较简单的结论. 众所周知有下列结论.

如果 (1.1) 有一个对于所有 $t \geqslant 0$ 都确定的有界解, 则 (1.1) 就有一个周期为 T 的周期解.

如果矩阵 A 是稳定的 (即 A 的全部特征根都有负实部), 则 (1.1) 有唯一的一个周期为 T 的周期解,且所有其它的解当 $t \to \infty$

时都逼近于这个解．具有这样性质的系统，我们就说这个系统有一个平稳状态的振荡．

由于非线性性质的出现，从而给研究带来了困难．首先我们引进一个下面经常要用到的马塞拉定理[7]．

考虑

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(t; x, y), \\ \frac{dy}{dt} = G(t; x, y), \end{cases} \tag{1.2}$$

这里 $F(t, x, y)$, $G(t, x, y)$ 在乘积空间

$$\tilde{\Delta}: I(0 \leqslant t < \infty) \times E_2(|x| < \infty, |y| < \infty)$$

上确定，且

$$F(t+T; x, y) = F(t, x, y),$$
$$G(t+T; x, y) = G(t, x, y),$$

即 F, G 是周期为 T 的连续周期函数；此外我们也假定 (1.2) 满足解的存在唯一性定理．在 1950 年马塞拉给出了一很有趣的结果：

定理：如果 (1.2) 的所有解在 $0 \leqslant t < \infty$ 上存在，且这些解中有一个是有界的，则 (1.2) 存在一个周期为 T 的周期解．

根据这个结果，应用第一篇第三章 § 2 的定理 2.2 和 2.3，可立即得到下列结论：

定理 1.1：如果对系统 (1.2) 而言，存在一个满足定理 2.2 或定理 2.3 的条件的李雅普诺夫函数，则 (1.2) 至少存在一个周期为 T 的周期解．

例 1：罗伊特 (Reuter)[6] 考虑方程

$$\ddot{x} + F(\dot{x}) + g(x) = p(t), \tag{1.3}$$

假定，(i) $g(x)$是连续，且当 $|x| \to \infty$，$g(x)\operatorname{sgn}x \to \infty$，

(ii) $F(y)$连续，且当 $|y| \to \infty$，$F(y)\operatorname{sgn}y \to \infty$，

(iii) $p(t+\omega) = p(t)$，即 $p(t)$ 是连续的周期函数，$\omega > 0$，

则 (1.3) 至少有一个周期为 ω 的周期解．

证：作 (1.3) 的等价方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-F(y)-g(x)+p(t),\end{cases}\tag{1.4}$$

在适当地选取正数 a 与 b 的情况下，我们按下列方式来作函数 $V(t,x,y)$：

$$V(t,x,y)=\begin{cases}G(x)+\frac{1}{2}y^2, & \text{I: } (|x|<\infty,\ y\geqslant b),\\ G(x)+\frac{1}{2}y^2+y-b, & \text{II: } (x\geqslant a,\ |y|\leqslant b),\\ G(x)+\frac{1}{2}y^2-2b, & \text{III: } (x\geqslant a,\ y\leqslant -b),\\ G(x)+\frac{1}{2}y^2-\frac{2b}{a}x, & \text{IV: } (|x|\leqslant a,\ y\leqslant -b),\\ G(x)+\frac{1}{2}y^2+2b, & \text{V: } (x\leqslant -a,\ y\leqslant -b),\\ G(x)+\frac{1}{2}y^2-y+b, & \text{VI: } (x\leqslant -a,\ |y|\leqslant b),\end{cases}$$

其中 $G(x)=\int_0^x g(\xi)d\xi$. 下面就根据所作的假定来分析函数 $V(t,x,y)$:

1）在区域 I 中，由 (i) 知 $V(t,x,y)=G(x)+\frac{1}{2}y^2>0$;

2）在区域 II 中，

$$V(t,x,y)=G(x)+\frac{1}{2}y^2+y-b\leqslant G(x)+\frac{1}{2}b^2.$$

此乃 x 的增函数，因此当把 a 取得适当大，使当 $x\geqslant a$ 时，就有 $G(x)>2b$. 从而就可保证在 II: $(x\geqslant a,\ |y|\leqslant b)$ 中有

$$V(t,x,y)>0;$$

3）以上选取的 a 值，亦可使在区域 III 中有

$$V(t,x,y)=G(x)+\frac{1}{2}y^2-2b>0;$$

4）仍旧采用在 2）中选取的 a 值，即有 $G(a)>2b$. 而 $|x|\leqslant a$ 时，$G(x)\geqslant 0$. 只要调节 b 值适当的大，即可使 $|y|\geqslant b$

时，$\frac{1}{2}y^2 > 2b$，因此针对如此的选取 a 和 b 值，即可保证 $V(t, x, y) > 0$ 在 IV 中成立；

5）在区域 V：$(x \leqslant -a, y \leqslant -b)$ 中，

$$V(t, x, y) = G(x) + \frac{1}{2}y^2 + 2b > 0$$

是显然的；

6）仍旧根据 2) 选取的 a 值，以及由 (i) 所确定的 $G(x)$，即知当 $|x| \geqslant a$ 时，$G(x) > 2b$，因此在区域 VI 中就有

$$V(t, x, y) = G(x) + \frac{1}{2}y^2 - y + b > 0.$$

通过上述六步的分析，我们如此来选取 a 和 b：首先根据 $\frac{1}{2}y^2 > 2b$ 定出 b 值的范围，然后再根据 $G(x) > 2b$ 定出 $|x|$ 的下限 a 值。这样一来，我们就保证所作的函数 $V(t, x, y)$ 在乘积空间

$$\Delta^*: I(0 \leqslant t < \infty) \times E^*_{(ab)}(|x| \geqslant a, |y| \geqslant b)$$

上是正定的和连续的，且具有无穷大性质。实质上在我们这里所作的 $V(t, x, y)$ 不是显含 t，因此它自然具有性质 A 和性质 B（见第一篇第三章 § 2）。下面的问题，即如此所作的函数 $V(t, x, y)$ 是否具有性质 C（见第一篇第三章 § 2）：

在 I：$(|x| < \infty, y \geqslant b)$ 中，

$$\frac{dV}{dt} = g(x)\dot{x} + y\dot{y} = -y(F(y) - p(t)),$$

因 $p(t)$ 是 $0 \leqslant t < +\infty$ 上连续的周期函数，故 $p(t)$ 有界。当把 b 选得适当大，即当 $y \geqslant b$ 时，$F(y) > p(t)$，这一点根据假定 (ii) 完全可以办到，因此在如此选取 b 值的情况下，在区域 I 中就有 $\dot{V}(t, x, y) < 0$。

在 II：$(x \geqslant a, |y| \leqslant b)$ 中，

$$\frac{dV}{dt} = g(x)\dot{x} + (y + 1)\dot{y}$$

$$= g(x)y + (y+1)[-F(y) - g(x) + p(t)]$$
$$= (y+1)(-F(y) + p(t)) - g(x),$$

由于当 $x \geqslant a$ 时 $g(x) > 0$，此时在 $|y| \leqslant b$ 的情况下，

$$(y+1)(-F(y) + p(t))$$

是一个有界量，因此把 a 值取得适当大，即可使在 II 中，

$$(y+1)(-F(y) + p(t)) - g(x) < 0;$$

在 III：$(x \geqslant a,\ y \leqslant -b)$ 中，

$$\frac{dV}{dt} = g(x)\dot{x} + y\dot{y} = -y(F(y) - p(t)),$$

根据假定 (ii) 和在 I 中选取之 b 值的情况下，当 $y \leqslant -b$ 时，$F(y) - p(t) < 0$，此时在 III 中有 $\frac{dV}{dt} < 0$.

在 IV：$(|x| \leqslant a,\ y \leqslant -b)$ 中，

$$\frac{dV}{dt} = \left(g(x) - \frac{2b}{a}\right)\dot{x} + y\dot{y}$$
$$= \left(g(x) - \frac{2b}{a}\right)y + y(-F(y) - g(x) + p(t))$$
$$= -\frac{2b}{a}y + y(-F(y) + p(t))$$
$$= -y\left(F(y) + \frac{2b}{a} - p(t)\right),$$

根据 $F(y)$ 的性质，我们可以在原来选取 b 的基础上，把 b 再放大一些，以使 $|F(y)| > \frac{2b}{a} - p(t)$. 因此对如此新选取的 b 值，就足以保证

当 $y \leqslant -b$ 时，$\quad \frac{dV}{dt} < 0$.

在 V：$(x \leqslant -a,\ y \leqslant -b)$ 中，

$$\frac{dV}{dt} = -y(F(y) - p(t)),$$

根据新选取的 b 值，在此域 V 内，显见有 $\frac{dV}{dt} < 0$;

在 VI：$(x \leqslant -a,\ |y| \leqslant b)$ 中，

$$\frac{dV}{dt} = g(x)\dot{x} + (y-1)\dot{y}$$

$$= g(x)y + (y-1)(-F(y) - g(x) + p(t))$$

$$= g(x) + (y-1)(-F(y) + p(t)),$$

根据前面新选取的 b，当 $|y| \leqslant b$ 时，$(y-1)(-F(y)+p(t))$ 是一个有界量，再根据 $g(x)$ 的性质知，只要把 a 放大到适当的程度，即可以使 $\frac{dV}{dt} < 0$。

综上所述，在我们选取最终之 a 和 b 值的情况下，即可使我们所作之函数 $V(t, x, y)$ 在

$$\Delta:\ I(0 \leqslant t < +\infty) \times E_{ab}(|x| \geqslant a, |y| \geqslant b)$$

内不仅满足性质 A 和 B，而且有性质 C 成立. 因此根据第一篇第三章 § 2 定理 2.2 知 (1.4) 的解一致有界. 再根据定理 1.1 知方程组 (1.4) 至少有一个周期为 ω 的周期解.

例 2：溝畑-山口考虑[5]

$$\ddot{x} + a(x)\dot{x} + \varphi(x) = p(t),$$

假设：(1) $A(x) = \int_0^x a(\xi)d\xi$，

当 $x \to +\infty$ 时，$A(x) \to +\infty$，

当 $x \to -\infty$ 时，$A(x) \to -\infty$，

(2) $\operatorname{sgn} x\varphi(x) \geqslant 0$，当 $|x| > q > 0$.

其中 $a(x)$，$\varphi(x)$，$\varphi'(x)$ 及 $p(t)$ 是连续的，

$$p(t+\omega) = p(t), \omega > 0.$$

且 $\int_0^\omega p(t)dt = 0$，则方程至少存在一个周期为 ω 的周期解.

证：根据第一篇第三章 § 2 之例 7，在那里我们证明了此方程之解是有界的，再根据马塞尔定理即得我们所要求的结论.

例 3：考虑[8]

$$\ddot{x} + RF'(x)\dot{x} + \frac{1}{L}F(x) = A\cos\omega t, \qquad (1.5)$$

$$F(x) = \alpha x + \beta x^3,$$

这里 $\alpha > 0, \beta > 0$, R（电阻）>0, L（电感）>0, A（振幅）>0, $\omega > 0$,

定义函数

$$F(x) = \int_0^x RF'(x)dx = RF(x) = R(\alpha x + \beta x^3),$$

$$G(x) = \int_0^x \frac{1}{L} F(x)dx = \frac{1}{2L}\left(\alpha + \frac{1}{2}\beta x^2\right)x^2,$$

$$E(t) = \int_0^t A\cos\omega t dt = \frac{A}{\omega}\sin\omega t.$$

对所有 x, $RF'(x) = R(\alpha + 3\beta x^2) \geqslant R\alpha > 0$,

$$4RF'(x)\left[RF(x) - \frac{A}{\omega}\sin\omega t\right]\frac{1}{L}F(x)$$

$$= \frac{4}{L}R^2F'(x)F(x)\left[F(x) - \frac{A}{\omega}\frac{1}{R}\sin\omega t\right],$$

由于 $F'(x)$ 是 x 的偶函数，故对一切 x 有 $F'(x) \geqslant \alpha > 0$. 而 $F(x) = (\alpha + \beta x^2)x$, $xF(x) > 0$（当 $x \neq 0$ 时），因此只要取 $|x|$ 足够大，就可使 $|F(x)| \geqslant \frac{1}{R}\frac{A}{\omega}$; 同时也有下列不等式成立：

$$F(x)\left[F(x) - \frac{A}{\omega}\frac{1}{R}\sin\omega t\right] > 0,$$

如果我们再进一步的把 $|x|$ 取得适当地大，即令 $|x| \geqslant a$, a 足够大，就可使

$$\frac{4}{L}R^2F'(x)\left[F^2(x) - \frac{1}{R}\frac{A}{\omega}(\sin\omega t)F(x)\right] \geqslant A^2\cos^2\omega t,$$

所以当 $|x| \geqslant a$ 时，注意 $F'(x) \geqslant \alpha > 0$, 就有

$$-\frac{R}{L}\left[F^2(x) - \frac{1}{R}\frac{A}{\omega}(\sin\omega t)F(x)\right] \leqslant -\frac{A^2}{4}\frac{\cos^2\omega t}{RF'(x)}. \quad (1.6)$$

作 (1.5) 的等价方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\frac{1}{L}F(x) - RF'(x)y + A\cos\omega t, \end{cases} \quad (1.7)$$

针对 (1.7) 取函数

$$V_1(x, y, t) = \frac{1}{2}\left(y + RF(x) - \frac{A}{\omega} \sin \omega t\right)^2 + G(x),$$

$$V_2(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + G(x).$$

沿着 (1.7) 的积分曲线来求 V_1 和 V_2 关于 t 的全导数:

$$\begin{aligned}\frac{dV_1}{dt} &= \left(y + RF(x) - \frac{A}{\omega} \sin \omega t\right) \\ &\quad \times (\dot{y} + RF'(x)\dot{x} - A\cos\omega t) + \frac{1}{L} F(x)\dot{x} \\ &= \left(y + RF(x) - \frac{A}{\omega} \sin \omega t\right)\left(-\frac{1}{L} F(x)\right) + \frac{1}{L} F(x)\dot{x} \\ &= -\frac{R}{L}\left[F^2(x) - \frac{1}{R}\frac{A}{\omega} \sin \omega t F(x)\right].\end{aligned}$$

当 $|x| \geqslant a$ 时,我们有

$$\frac{dV_1}{dt} \leqslant -\frac{A^2}{4}\frac{\cos^2\omega t}{RF'(x)}. \tag{1.8}$$

又

$$\begin{aligned}\frac{dV_2}{dt} &= y\dot{y} + \frac{1}{L} F(x)\dot{x} \\ &= y\left[-\frac{1}{L} F(x) - RF'(x)y + A\cos\omega t\right] \\ &\quad + \frac{1}{L} F(x)y \\ &= -RF'(x)y^2 + Ay\cos\omega t \\ &= -RF'(x)\left[y^2 - \frac{A}{RF'(x)} y\cos\omega t\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4}\left(\frac{A\cos\omega t}{RF'(x)}\right)^2\right] + \frac{1}{4} A^2 \frac{A^2}{RF'(x)} \cos^2\omega t \\ &\leqslant \frac{1}{4}\frac{A^2\cos^2\omega t}{RF'(x)},\end{aligned}$$

当 $|x| \geqslant a$ 时,就有

$$\frac{dV_1}{dt} + \frac{dV_2}{dt} \leqslant 0.$$

此外由

$$\frac{dV_2}{dt} = -RF'(x)y^2 + (A\cos\omega t)y$$
$$= -R(\alpha + 3\beta x^2)y^2 + A\cos\omega t y,$$

可看出，当 $|x| < a$, $|y| \geqslant b$ (b 取得适当地大)时，有

$$\frac{dV_2}{dt} \leqslant -R\alpha y^2 + A|y| < 0.$$

再由

$$\frac{dV_1}{dt} = -\frac{R}{L}F(x)\left[F(x) - \frac{1}{R}\frac{A}{\omega}\sin\omega t\right],$$

可看出，当 $|x| < a$ 时，$|F(x)| < (\alpha + \beta a^2)a$,

$$\frac{dV_1}{dt} \leqslant \frac{1}{L}\frac{A}{\omega}|F(x)\sin\omega t| \leqslant \frac{1}{L}\frac{A}{\omega}|F(x)| < \frac{Aa(\alpha + \beta a^2)}{L\omega},$$

所以当我们把 a 取得足以保证 (1.8) 成立时，此时 a 就被固定下来，而是一个有限的常数，此时可以把 b 取得适当的大，使

$$Ab + A\frac{a(\alpha + \beta a^2)}{L\omega} < R\alpha b^2$$

成立．因此当 $|x| < a$, $|y| \geqslant b$ 时，就有

$$\frac{dV_1}{dt} + \frac{dV_2}{dt} < 0.$$

区域 Ω 之估计:

为了便于应用，在这里我们把区域 Ω 之大小作一个适当的估计.

1) $F(x) = \alpha x + \beta x^3$, $\alpha > 0$, 及 $\beta > 0$, 故 $xF(x) > 0 (x \neq c)$, 要取 $|x|$ 的值，使得

$$F(x)\left(F(x) - \frac{1}{R}\frac{A}{\omega}\sin\omega t\right) > 0, \qquad (1.9)$$

只要使 $|F(x)| > \frac{1}{R}\frac{A}{\omega}$ 即可.

由于 $(\alpha + \beta x^2)|x| > \alpha|x|$, 因此我们只要取

$$|x| > \frac{1}{R}\frac{1}{\alpha}\frac{A}{\omega},$$

即可保证不等式 (1.9) 成立.

2) 如果我们再进一步的要求

$$\frac{4}{L} R^2F'(x)\left[F^2(x)-\left(\frac{1}{R}\cdot\frac{A}{\omega}\sin\omega t\right)F(x)\right]\geqslant A^2\cos^2\omega t \quad (1.10)$$

成立,那末 $|x|$ 值取多大方能保证这一点成立?

注意, $F'(x)=\alpha+3\beta x^2\geqslant\alpha>0$, 因此要使 (1.10) 成立,只要

$$F(x)\left[F(x)-\frac{1}{R}\frac{A}{\omega}\sin\omega t\right]\geqslant\frac{LA^2}{4R^2\alpha} \qquad (1.11)$$

即可. 又 $(\alpha x+\beta x^3)^2\geqslant\alpha^2x^2$, 因此要使 (1.11) 成立,只要

$$\alpha x\left[\alpha x-\frac{1}{R}\frac{A}{\omega}\right]\geqslant\frac{LA^2}{4R^2\alpha} \qquad (1.12)$$

即可. 而要保证 (1.12) 成立, 试问 $|x|$ 的取值范围多大? 因此我们解下列二次代数方程

$$\alpha^2x^2-\frac{\alpha}{R}\frac{A}{\omega}x-\frac{LA^2}{4R^2\alpha}=0$$

的根,即可定 $|x|$ 的取值范围.

$$x_{1,2}=\frac{\frac{\alpha}{R}\frac{A}{\omega}\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha}{R}\frac{A}{\omega}\right)^2+\frac{L\alpha A^2}{R^2}}}{2\alpha^2}$$

是两个实根, 即 $x_1>0$ 和 $x_2<0$, 且 $|x_1|>|x_2|$, 所以由图 1 看出,只要取

$$|x|\geqslant x_1=\frac{\frac{\alpha}{R}\frac{A}{\omega}+\sqrt{\left(\frac{\alpha}{R}\frac{A}{\omega}\right)^2+\frac{L\alpha A^2}{R^2}}}{2\alpha^2},$$

即可保证最终所要求的 (1.10) 成立. 因此我们就取

$$a=x_1=\frac{\frac{\alpha}{R}\frac{A}{\omega}+\sqrt{\left(\frac{\alpha}{R}\frac{A}{\omega}\right)^2+\frac{L\alpha A^2}{R^2}}}{2\alpha^2},$$

当 $|x|\geqslant a$ 时,就有 $\dot V_1+\dot V_2\leqslant 0$.

下面根据 a 再来定出 b.

3）为了保证

$$-R\alpha y^2 + Ay + A\frac{a(\alpha+\beta a^2)}{L\omega} < 0$$

成立，试问$|y|$值的范围得取多大？同样，我们只要解下列二次代数方程之根，即可定出$|y|$值的范围：

$$R\alpha y^2 - Ay - A\frac{F(a)}{L\omega} = 0,$$

得

$$y_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4R\alpha A\dfrac{F(a)}{L\omega}}}{2R\alpha}.$$

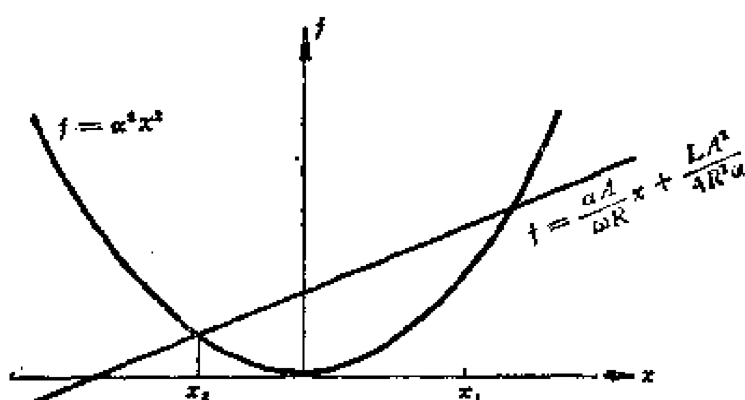


图 1

因为$F(a) = (\alpha + \beta a^2)a > 0$，故$y_1 > 0$，$y_2 < 0$，且$|y_1| > |y_2|$，因此我们只要取

$$b = y_1 = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4R\alpha A\dfrac{F(a)}{L\omega}}}{2R\alpha}$$

即可．使当$|x| < a$，$|y| \geqslant b$时就有

$$\dot{V}_1 + \dot{V}_2 < 0.$$

总结上述，最终得区域

$$\Omega:\ |x| < a,\ |y| < b.$$

$$a = \frac{\dfrac{1}{R}\dfrac{A}{\omega} + \sqrt{\left(\dfrac{1}{R}\dfrac{A}{\omega}\right)^2 + \dfrac{LA^2\alpha}{R^2}}}{2\alpha^2},$$

$$b = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4R\alpha A \frac{F(a)}{L\omega}}}{2R\alpha},$$

$F(a) = (\alpha + \beta a^2)a$. 记 $M = \max[a, b]$. 实质上这就是系统 (1.7) 之解的最终有界域.

这样我们就证明了在由 $|x| < a$, $|y| < b$ 所定义的区域 Ω 之外,即在 Ω 的补集 Ω^c 上,有

$$\dot{V}_1 + \dot{V}_2 \leqslant 0.$$

现在我们就取

$$\begin{aligned} V(x, y, t) &= V_1(x, y, t) + V_2(x, y) \\ &= \frac{1}{2}\left(y + RF(x) - \frac{A}{\omega}\sin\omega t\right)^2 + 2G(x) + \frac{1}{2}y^2 \end{aligned}$$

作为我们所要求的函数.

显见此函数在补集 Ω^c 上,当 $x^2 + y^2 \to \infty$ 时,

$$V(x, y, t) \to \infty,$$

对所有 $t \geqslant 0$ 是一致地成立. 总结上述讨论得:

(1) 区域 Ω: $|x| < a, |y| < b$ 是一个包含原点在内的有界域;

(2) 函数 $V(x, y, t)$ 在整个补集 Ω^c 与所有 $t \geqslant 0$ 上有定义,且当 $x^2 + y^2 \to \infty$ 时, $V(x, y, t) \to \infty$ 对所有 $t \geqslant 0$ 一致成立;

(3) 在 Ω^c 上与所有 $t \geqslant 0$ 上有 $\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \leqslant 0$.

根据第一篇第三章 § 1 中之定理即知系统 (1.7) 的所有解都是有界的. 再根据马塞尔定理知系统 (1.7) 存在一个周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$ 的周期解. 也就是说系统在周期性的外力 $A\cos\omega t$ 作用下,产生了共振现象. 事实上当我们不考虑周期性的外力 $f = A\cos\omega t$ 时,此时 (1.5) 就变成自治系统

$$\ddot{x} + RF'(x)\dot{x} + \frac{1}{L}F(x) = 0, \tag{1.13}$$

$$F(x) = \alpha x + \beta x^3,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

作列娜变换得与 (1.13) 等价的方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y - RF(x), \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{L} F(x). \end{cases} \tag{1.14}$$

易见原点 (0,0) 是 (1.14) 的唯一的奇点,针对 (1.14) 取函数

$$V(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{L}\int_0^x F(x)dx$$

$$= \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2L}\left(\alpha x^2 + \frac{1}{2}\beta x^4\right),$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3.1)_1} = y\dot{y} + \frac{1}{L} F(x)\dot{x} = -\frac{R}{L} F^2(x),$$

故原点是全局稳定的结点或焦点. 这说明了系统 (1.14) 不存在周期解. 一旦当我们在系统 (1.14) 上加上周期性的外力 $f=A\cos\omega t$ 作用时,系统 (1.13) 就会产生共振现象.

例 4. 考虑列娜方程

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t), \tag{1.15}$$

假定 $f(x)$, $g(x)$ 对所有 x 都有连续的导数, $e(t)$ 是具有周期为 ω 的连续的周期函数.

定义:

$$F(x) = \int_0^x f(u)du, \quad G(x) = \int_0^x g(u)du,$$

$$E(t) = \int_0^t e(\tau)d\tau.$$

更进一步假定:

(i) 对所有 x, $f(x) \geqslant c > 0$;

(ii) 对所有 $t \geqslant 0$ 和充分大的 $|x|$, 有

$$4f(x)[F(x) - E(t)]g(x) \geqslant e^2(t),$$

则方程 (1.15) 存在一个周期为 ω 的周期解.

证: 针对 (1.15) 作等价的方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g(x) - f(x)y + e(t), \end{cases} \tag{1.16}$$

此时我们作函数

$$V_1(t, x, y) = \frac{1}{2}(y + F(x) - E(t))^2 + G(x),$$

$$V_2(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x).$$

沿 (1.16) 的相轨线

$$\frac{dV_1}{dt} = (y + F(x) - E(t))(\dot{y} + f(x)\dot{x} - e(t)) + g(x)\dot{x}$$

$$= -[F(x) - E(t)]g(x),$$

$$\frac{dV_2}{dt} = y\dot{y} + g(x)\dot{x} = -f(x)y^2 + ye(t).$$

根据上面的假定，可估出

$$\frac{dV_1}{dt} \leqslant -\frac{e^2(t)}{4f(x)} \quad (\text{当} |x| \text{足够大})$$

和

$$\frac{dV_2}{dt} = -f(x)\left[y - \frac{1}{2}\frac{e(t)}{f(x)}\right]^2 + \frac{1}{4}\frac{e^2(t)}{f(x)} \leqslant \frac{1}{4}\frac{e^2(x)}{f(x)}.$$

因此对 $|x| \geqslant a$ (a 充分大)和所有的 y，我们都有

$$\dot{V}_1 + \dot{V}_2 \leqslant 0.$$

再由假定知 $e^2(t)$ 和 $E(t)$ 都有界，故我们看出

$$\dot{V}_2 \leqslant -\lambda(y).$$

这里 $\lambda(y)$当 $|y| \to \infty$ 时，它也趋于 ∞. 因此对 $|x| < a$ 和 $|y| \geqslant b$ (b 取得足够大)就有

$$\dot{V}_1 + \dot{V}_2 < 0.$$

从而就证明了，在由域

$$\Omega: (|x| < a, |y| < b)$$

所定义的补集 Ω^c: $(|x| \geqslant a, |y| \geqslant b)$ 上，有 $\dot{V}_1 + \dot{V}_2 \leqslant 0$. 且函数 $V(t, x, y) = V_1(t, x, y) + V_2(x, y)$ 在 Ω^c 上具有无穷大性质(对 $t \geqslant 0$ 是一致). 根据第一篇第三章 § 1 之定理知 (1.16) 之解是有界的，再根据马塞尔定理知 (1.16) 存在一个周期为 ω 的周期解.

§2. 平稳振荡中周期解的唯一性

在上一节我们研究了系统在周期性的外力作用下发生共振的现象．也就是说此时系统存在周期解．现在进一步研究这种周期解在什么情况下是唯一的？如何来证明它的唯一性？为了回答这个问题，在这里我们应用 J. L. 拉萨尔 (Lasalle)[1] 的一个定理．在引进这个定理之前，我们首先引进一个概念．

考虑

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(t, x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = G(t, x, y). \end{cases} \tag{2.1}$$

这里假定 $F(t, x, y)$, $G(t, x, y)$ 是 t 的周期为 T 的周期函数，同时亦假定方程 (2.1) 的右端函数在整个 (x, y) 相平面和 $t \geqslant 0$ 上满足解的存在性、唯一性以及解对初值连续依赖性的条件．

定义：如果系统 (2.1) 的每一对解

$$(x_1(t), y_1(t)) \text{ 与 } (x_2(t), y_2(t)),$$

当 $t \to \infty$ 时，

$$x_1(t) - x_2(t) \to 0, \quad y_1(t) - y_2(t) \to 0,$$

那末我们就说系统 (2.1) 是非常稳定的．

拉萨尔[1]曾证明了下列定理：

如果系统 (2.1) 是非常稳定的，且 (2.1) 有一个有界解，则 (2.1) 就有唯一的一个周期为 T 的周期解，且 (2.1) 的所有其它解当 $t \to \infty$ 时都逼近于它．

这样一来，我们就说系统 (2.1) 有一个平稳状态的振荡．

下面我们就根据拉萨尔的这个原则来考察上节的例题 3．

例 1：考虑[8]

$$\ddot{x} + RF'(x)\dot{x} + \frac{1}{L}F(x) = A\cos\omega t, \tag{2.2}$$

$$F(x) = \alpha x + \beta x^3.$$

这里 $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ R > 0,\ L > 0,\ A > 0,\ \omega > 0.$

作 (2.2) 的等价方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{L} F(x) - RF'(x)y + A\cos\omega t. \end{cases} \tag{2.3}$$

在上一节我们已证明了系统 (2.2) 存在一个周期为 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ 的周期解，现在我们进一步来研究此周期解是否唯一. 根据拉萨尔定理，要问系统 (2.3) 是否有非常稳定的性质，如果能肯定这一点，那末也就回答了上面的问题.

下面我们证明在适当的选取参数 β 值的前提下，系统 (2.3) 是非常稳定的.

令 $(x_1(t), y_1(t))$ 与 $(x_2(t), y_2(t))$ 是 (2.3) 的任一对解，则

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = -\dfrac{1}{L} F(x_1) - RF'(x_1)y_1 + A\cos\omega t; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\dfrac{1}{L} F(x_2) - RF'(x_2)y_2 + A\cos\omega t. \end{cases}$$

作变换

$$\begin{cases} X = x_1(t) - x_2(t), \\ Y = y_1(t) - y_2(t), \end{cases} \tag{2.4}$$

得

$$\begin{cases} \dot{X} = Y, \\ \dot{Y} = -\dfrac{1}{L}[F(x_1) - F(x_2)] - R[F'(x_1)y_1 - F'(x_2)y_2]. \end{cases} \tag{2.5}$$

由于

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(x_2) &= \alpha X + \beta(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)X \\ &= (\alpha + 3\beta x_1x_2)X + \beta X^3, \end{aligned}$$

$$F'(x_1)y_1 - F'(x_2)y_2 = \alpha Y + 3\beta(x_1^2y_1 - x_2^2y_2)$$

$$= (\alpha + 3\beta x_1^2)Y + 3\beta(x_1 + x_2)y_2X,$$

把简化后的结果代入 (2.5) 的第二式，最终得

$$\dot{Y} = -\left[\frac{1}{L}(\alpha + 3\beta x_1 x_2) + 3\beta R(x_1 + x_2)y_2\right]X$$

$$- R(\alpha + 3\beta x_1^2)Y - \frac{1}{L}\beta X^3,$$

(2.5) 就变成

$$\begin{cases} \dot{X} = Y, \\ \dot{Y} = -\left\{\frac{\alpha}{L} + 3\left[\frac{1}{L}x_1 x_2 + R(x_1 + x_2)y_2\right]\beta\right\}X \\ \qquad - R(\alpha + 3\beta x_1^2)Y - \frac{1}{L}\beta X^3. \end{cases} \tag{2.6}$$

要研究 (2.3) 的非常稳定性就等价于研究系统 (2.6) 的零解的全局稳定性. 因为

$$\lim_{t\to\infty}[x_1(t) - x_2(t)] = \lim_{t\to\infty} X(t),$$

$$\lim_{t\to\infty}[y_1(t) - y_2(t)] = \lim_{t\to\infty} Y(t).$$

注意由于我们已证明了系统 (2.3) 的有界性, 所以方程 (2.3) 的每一个解都是有界的, 因此根据 § 1 例 3 中所作之有界域 Ω 的估值, 就有

$$\max\{|x_1(t)|, |y_1(t)|, |x_2(t)|, |y_2(t)|\} \leqslant M.$$

这里 M 是 § 1 中给出的一个正的常数.

为了研究 (2.6) 的零解的全局稳定性, 我们首先就 $\beta = 0$ 的情形来考虑. 此时 (2.6) 就变成

$$\begin{cases} \dot{X} = Y, \\ \dot{Y} = -\frac{\alpha}{L}X - R\alpha Y. \end{cases} \tag{2.7}$$

这是一个常系数的线性方程组, 其特征方程为

$$\lambda^2 + R\alpha\lambda + \frac{\alpha}{L} = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R\alpha \pm \sqrt{R^2\alpha^2 - 4\frac{\alpha}{L}}}{2}, \quad \mathrm{Re}\lambda_{1,2} < 0.$$

因此存在正定的二次型

$$V(X,Y)=b_{11}X^2+2b_{12}XY+b_{22}Y^2,$$

使得

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.7)}=2b_{11}XY+2b_{12}Y^2+2b_{12}X\left(-\frac{\alpha}{L}X-R\alpha Y\right)$$
$$+2b_{22}Y\left(-\frac{\alpha}{L}X-R\alpha Y\right)=-(X^2+Y^2). \tag{2.8}$$

即只要解下列线性代数方程组

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{L}\alpha & 0 \\ 1 & -R\alpha & -\frac{1}{L}\alpha \\ 0 & 2 & -2R\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

定出系数

$$b_{12}=\frac{L}{2\alpha},\quad 2b_{12}-2R\alpha b_{22}=-1,\quad b_{22}=\frac{\alpha+L}{2R\alpha^2},$$

$$b_{11}-R\alpha b_{12}-\frac{1}{L}\alpha b=0,\ \text{故}\ b_{11}=\frac{\alpha R^2L^2+\alpha+L}{2R\alpha L}.$$

注意

$$b_{11}=\frac{R^2\alpha L^2+\alpha+L}{2R\alpha L}>0,$$

$$b_{11}b_{22}-b_{12}^2=\frac{R^2\alpha^2L^2+(\alpha+L)^2}{4R^2\alpha^3L}>0,$$

求得了系统(2.7)的一个正定的二次型

$$V(X,Y)=\frac{R^2\alpha L^2+(\alpha+L)}{2R\alpha L}X^2$$
$$+\frac{L}{\alpha}XY+\frac{\alpha+L}{2R\alpha^2}Y^2. \tag{2.9}$$

现在我们就根据这个正定的二次型来研究系统(2.6)的零解的全局稳定性. 因此沿着(2.6)的相轨线来求此正定二次型 $V(X,Y)$ 关于 t 的全导数,

$$\frac{dV(XY)}{dt}\bigg|_{(1.6)} = 2b_{11}XY + 2b_{12}Y^2 + 2b_{12}X$$

$$\times \left[-\left(\frac{\alpha}{L}X + R\alpha Y\right)\right] + 2b_{22}Y\left[-\left(\frac{\alpha}{L}X + R\alpha Y\right)\right]$$

$$- 2b_{12}X\left\{\left[\frac{1}{L}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 3R(x_1 + x_2)y_2\right]X\right.$$

$$\left. + 3Rx_1^2Y\right\}\beta - 2b_{22}Y\left\{\left[\frac{1}{L}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)\right.\right.$$

$$\left.\left. + 3R(x_1 + x_2)y_2\right]X + 3Rx_1^2Y\right\}\beta$$

$$= -(X^2 + Y^2) - 2(b_{12}X + b_{22}Y)$$

$$\times \left\{\left[\frac{1}{L}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 3R(x_1 + x_2)y_2\right]X + 3Rx_1^2Y\right\}\beta$$

$$= -(X^2 + Y^2) - \left\{2b_{12}\left[\frac{1}{L}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 3R(x_1 + x_2)y_2\right]X^2\right.$$

$$+ 2b_{22}\left[\frac{1}{L}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 3R(x_1 + x_2)y_2\right]XY$$

$$\left. + 6b_{12}Rx_1^2XY + 6b_{22}Rx_1^2Y^2\right\}\beta \leqslant -(X^2 + Y^2)$$

$$+ \left\{2b_{12}\left(\frac{1}{L}3M^2 + 6RM^2\right) + 2b_{22}\left(\frac{1}{L}3M^2 + 6RM^2\right)\right.$$

$$\left.\times |X||Y| + 6b_{12}RM^2|X||Y| + 6b_{22}RM^2Y^2\right\}\beta$$

$$\leqslant -(X^2 + Y^2) + \left\{6b_{12}M^2\left(\frac{1}{L} + 2R\right)X^2\right.$$

$$+ 3b_{22}\left(\frac{1}{L} + 2R\right)M^2(X^2 + Y^2) + 3b_{12}RM^2(X^2 + Y^2)$$

$$\left. + 6b_{22}RM^2Y^2\right\}\beta = -(X^2 + Y^2)$$

$$+ \left\{\left[(2b_{12} + b_{22})\left(\frac{1}{L} + 2R\right) + b_{12}R\right]3M^2X^2\right.$$

$$\left. + \left[\left(4R + \frac{1}{L}\right)b_{22} + b_{12}R\right]3M^2Y^2\right\}\beta.$$

注意

$$2b_{12}\left(\frac{1}{L}+2R\right)=\frac{L}{\alpha}\left(\frac{1}{L}+2R\right)=\frac{1+2RL}{\alpha},$$

$$2b_{22}R=\frac{\alpha+L}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}+\frac{L}{\alpha^2},$$

令

$$h=\max\left\{\frac{2RL}{\alpha},\ \frac{L}{\alpha^2}\right\},$$

则

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.6)}\leqslant-(X^2+Y^2)+3M^2\left[b_{12}R+\left(\frac{1}{L}+2R\right)b_{22}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\alpha}+h\right]\beta(X^2+Y^2)=\left\{-1+3M^2\right.$$
$$\times\left[\frac{L}{2}R+\frac{(1+2LR)(\alpha+L)}{2RL\alpha}\right.$$
$$\left.\left.+1+\alpha h\right]\frac{1}{\alpha}\beta\right\}(X^2+Y^2).$$

当我们取参数 β 满足

$$0\leqslant\beta\leqslant\frac{\alpha}{3M^2\left[\frac{L}{2}R+\frac{(1+2LR)(\alpha+L)}{2RL\alpha}+1+\alpha h\right]},\tag{2.10}$$

则系统 (2.6) 的零解是全局稳定的．因此在如此选取参数 β 满足不等式 (2.10) 的情况下，就保证了系统 (2.3) 存在唯一的周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$ 的周期解．

总结上述所论，最终我们得下列定理：

考虑 (2.2)

$$\ddot{x}+RF'(x)\dot{x}+\frac{1}{L}F(x)=A\cos\omega t,$$

$$F(x)=\alpha x+\beta x^3,\ \alpha>0,\ \beta>0,\ R>0,$$
$$L>0,\ A>0,\ \omega>0.$$

定理：如果

$$0<\beta \leqslant \frac{\alpha}{3M^2\left[\frac{L}{2}R+\frac{(1+2LR)(\alpha+L)}{2RL\alpha}+1+\alpha h\right]},$$

$$h=\max\left\{\frac{2RL}{\alpha},\ \frac{L}{\alpha^2}\right\},$$

则 (2.2) 存在唯一的周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$ 的周期解，且当 $t\to\infty$ 时，方程的所有其它解都逼近它．因此我们所考虑的系统 (2.2) 有一个平稳状态的振荡．

应当指出，在论证强迫振荡系统中出现之周期解的唯一性的研究工作方面，目前看来，尚有不少的困难，进展不大，有待进一步的努力．

§3. 微分方程解的渐近性

1．在前面我们着重研究了含有强迫力项的二阶微分方程的周期解的存在性，并在一定的条件下研究了周期解的唯一性．可是对这类方程的研究常常和解的渐近性联系在一起，例如在 [24] 曾经讨论过方程

$$\ddot{x}+h(t,x,\dot{x})\dot{x}+f(x)=e(t)$$

解的渐近性，这里 $e(t)$ 就是一个可积的干扰项．在这节我们仍介绍日本数学家吉澤太郎[24]用李雅普诺夫直接法来研究解的渐近性的一些工作．

应当指出：一个含干扰项的方程的解的正极限集，和不含干扰项的方程的解的正极限集之间的关系；以及它们解之间的关系，曾被许多作者讨论过．特别是涉及到含干扰项之系统的解的稳定性问题．

考虑

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}),$$

这里 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})$ 是一个可积的干扰项．假定它的一个解是有界的且

趋于一个闭集 Ω，在这个假定的前提下，吉澤太郎证明了这个解的正极限集是由定义在 Ω 上某一个系统的解构成，这个系统同未含干扰项的系统有关．对于一个含干扰项的方程的解之正极限集和一个不含干扰项的方程的解的正极限集之间的关系曾经被马尔库斯（Malkus）[18] 和奥皮尔（Opial）[19] 讨论过，他们讨论过的方程之形式是

$$\frac{dx}{dt} = H(x) + G(t, x),$$

其中 $G(t, x)$ 是一个干扰项．假定方程右端函数满足解的存在唯一性条件，他们证明了一个含干扰项方程之解的正极限集是由未含干扰项之方程的解组成的．

马尔库斯还讨论了如下的情形：即当 $t\to\infty$ 时，$G(t, x)\to 0$ 在 R_x^n 空间中的任一个紧致集上都一致地成立；奥皮尔讨论了如下的情形：即针对 $G(t, x)$ 是可积情形，他证明了若干个关于解对初值的依赖性定理．

吉澤太郎针对方程之初值问题不具有解的唯一性的情况，推广了奥皮尔的结果，然后应用这些结果和李雅普诺夫函数来研究解的渐近性．

2．考虑微分方程组：

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{x}), \tag{3.1}$$

这里 $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{x})$ 是在乘积空间

Δ：$I(0 \leqslant t < \infty) \times Q$（$n$ 维欧氏空间 R^n 的一个开集）

上的连续函数．又假定如果 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ 在 $t_0 \leqslant t < \infty$ 上连续和有界，即 $\boldsymbol{x}(t) \subset Q^*$（$Q^*$ 是开集 Q 内的一个紧致集），就有

$$\int_{t_0}^{\infty} \|\boldsymbol{G}(s, \boldsymbol{x}(s))\| ds < \infty. \tag{3.2}$$

在这些假定下讨论（3.1）的解的渐近性．

在下面的讨论过程中，将用到下列记号：

$\bar{A}$ 是一个集合 A 的闭包．

$d(p, A)$ 表示一个点 p 和一个集合 A 之间的距离即

$$d(p, A) = \inf\{\|p - a\|;\ a \in A\}.$$

$U(A, \varepsilon)$ 表示一个集合 A 的 ε 邻域，即

$$U(A, \varepsilon) = \{x;\ d(x, A) < \varepsilon\}.$$

$C_0(x)$ 表示一个函数集，在这个集合中，每个函数关于 x 都局部地满足李浦希兹条件． 此外我们总假定 (3.1) 的解在 Q (n 维欧氏空间 R^n 的一个开集)内是有界的，为此我们首先叙述关于解的有界性的一些充分条件．

3．解的有界性：

如果 $Q = R^n$，上述解的有界性就是通常意义下的解的有界性．在第一篇第三章 § 2 曾用李雅普诺夫函数研究过解的有界性，下面我们引进一个定理，它是类似于第一篇第三章 § 2 中曾用到过的一个定理．证明的思想方法完全一致，因此证明的过程就完全略去．

考虑

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(t; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \\ \dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{G}(t; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \end{cases} \tag{3.3}$$

这里 $\boldsymbol{x}$ 是一个 n 维向量，$\boldsymbol{y}$ 是一个 m 维向量． $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 在乘积空间

$$\Delta:\ I(0 \leqslant t < +\infty) \times R_x^n \times R_y^m$$

上连续．

定理 3.1: 假定存在一个正的连续函数 $V(t; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$，在域 $\bar{\Delta}_1$: $I(0 \leqslant t < \infty)$, $\|x\|^2 + \|y\|^2 \geqslant R_0^2$ (R_0 可以取得很大)上满足下列条件：

1°. 如果 $\|x\|^2 + \|y\|^2$ 是有界的话，$V(t; x, y)$ 是有界的；

2°. 当 $\|y\| \to \infty$ 时，$V(t; x, y) \to \infty$ 一致地成立；

3°. $V(t; x, y) \in C_0(x, y)$ 和

$$\frac{dV}{dt} = \overline{\lim_{h \to 0+}} \frac{1}{h} \{V(t + h, x + hF(t; x, y),$$

$$y + hG(t; x, y)) - V(t; x, y)\} \leqslant 0.$$

此外，又假定对应于每一个 $k > 0$，都存在一个正的连续函数 $W(t; x, y)$，在域

$\bar{\Delta}_2$: $I(0 \leqslant t < +\infty) \times E_x(\|x\| \geqslant R_1(k)) \times E_y(\|y\| \leqslant k)$

(R_1 可以取得大)上满足下列条件:

1°. 如果 $\|x\|$ 是有界的话，$W(t; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 是有界的;

2°. 当 $\|x\| \to \infty$ 时，$W(t; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \infty$ 一致地成立;

3°. $w(t; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in C_0(x, y)$，且

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} F + \frac{\partial W}{\partial y} G \leqslant 0;$$

则 (3.3) 的所有解是有界的.

这个定理说明了用函数 $V(t; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 来控制解 $(x(t), y(t))$ 中的分量 $y(t)$的有界性，用 $W(t; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 来控制分量 $x(t)$ 的有界性. 因此关键在于作出函数 $V(t; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 和 $W(t; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

4. 解的相关性:

定理 3.2: 考虑

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}), \tag{3.4}$$

这里 $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$ 是在一个开集 $D \subset I\ (0 \leqslant t < \infty) \times \Omega$ 内的连续函数. 我们假定从 D 内一点 (t_0, x_0) 出发的解都能向右延拓到 $t = t_1$ 时刻.

令 E 表示由点 $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 出发，而在 $J = [t_0, t_1]$ 上有定义的 (3.4) 之所有的解曲线构成的点集. 且假定 E 被包含在 D 内的一个紧致集内，则对应于每一个 $\varepsilon > 0$，都存在一个 $\delta > 0$，使得方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(t) \tag{3.5}$$

过 $P^*(t_0^*, x_0^*)$ 的每一个解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*(t; \boldsymbol{x}_0^*, t_0^*)$ $(t_0^* \in J)$ 在 $[t_0^*, t_1]$ 上存在且满足

$$\|x^*(t; x_0^*, t_0^*) - x(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon. \tag{3.6}$$

这里

(i) $\boldsymbol{g}(t)$是一个连续函数，满足

$$\int_{t_0}^{t_1} \|g(t)\| dt < \delta,$$

(ii) 点 p^* 满足条件

$$d(p^*, E) \leqslant \delta,$$

(iii) 不等式 (3.6) 中的 $\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ 是 (3.4) 的包含在 E 内的一个解.

证: 假定对某一个 $\varepsilon > 0$, 不存在一个 $\delta > 0$ 会满足定理 3.2 中的条件. 我们可以假定

$$\overline{U(E, \varepsilon)} \subset D,$$

因为 $\overline{U(E, \varepsilon)}$ 是一个紧致集, 故可以找到一个函数 $F^*(t, x)$, 这个函数在乘积空间

$$H: I(0 \leqslant t < \infty) \times R^n$$

上是连续的和有界的,且在 $\overline{U(E, \varepsilon)}$ 上, $\boldsymbol{F}^*(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$. 这样一来,方程 (3.4) 保留在 $\overline{U(E, \varepsilon)}$ 内的一个解就是方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}^*(t, \boldsymbol{x}) \tag{3.7}$$

的一个解,且方程 (3.7) 过点 (t_0, x_0) 在 $t \in J$ 上有定义的积分曲线构成的点集和点集 E 一致. 我们可以假定对 $\varepsilon > 0$ 和方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}^*(t, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(t) \tag{3.8}$$

而言, 定理 3.2 的结论是不能成立的. 可是 (3.8) 的每个解在整个 t 轴上都存在. 这是由方程 (3.8) 的作法而决定的.

从我们的假设知,存在一个点列$\{p_k = (t_k, x_k)\}$和一个函数列$\{\boldsymbol{g}_k(t)\}$, 使得当 $k \to \infty$ 时, $d(p_k, E) \to 0$ (E 是紧致集)和

$$\int_{t_0}^{t_1} \|g_k(t)\| dt \to 0;$$

且方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}^*(t, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}_k(t) \tag{3.8*}$$

过 P_k 点的一个解 $\varphi_k(t)$ $(t_k \leqslant t \leqslant t_1)$, 使得 (3.7) 在 E 内不存在有如下性质的解曲线:

即 (3.8)* 之解曲线弧上的所有点到 (3.7) 的解曲线之对应点距离小于 ε。因为 $\varphi_k(t)$在 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 上定义

$$\varphi_k(t) = x_k + \int_{t_k}^{t} F^*(s, \varphi_k(s))ds + \int_{t_k}^{t} g_k(s)ds$$
$$= \varphi_k(t_0) + \int_{t_0}^{t} F^*(s, \varphi_k(s))ds + \int_{t_0}^{t} g_k(s)ds. \qquad (3.9)$$

故 $\{\varphi_k(t)\}$ 在 $[t_0, t_1]$ 上是一致有界和等度连续，因此我们就可从中选取一个一致收敛的子序列．为了简便起见，我们仍旧用数 k 来表示子序列的下标，而令 $\varphi(t)$ 是它的极限函数．从(3.9)得

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} F^*(s, \varphi(s))ds.$$

这样一来，$\varphi(t)$ 就是 (3.7) 的一个解．如果我们让 t' 作为点列 $\{t_k\}$ 的一个聚点，点 $(t', \varphi(t'))$ 位于 E 上，即 $(t', \varphi(t')) \in E$．根据 $\varphi(t)$ 和连结点 (t_0, x_0) 和点 $(t', \varphi(t'))$ 的一解，我们就得方程 (3.7) 过点 (t_0, x_0) 的一个解 $x = \varphi^*(t)$．因此

$$\varphi^*(t) \subset E \text{ 和当 } t \geqslant t' \text{ 时}, \varphi^*(t) = \varphi(t).$$

如果 k 充分大，t_k 充分接近于 t'，$\varphi_k(t)$ 与 $\varphi(t)$ 之间的距离小于 ε，因为$\varphi_k(t)$ 是一致收敛到 $\varphi(t)$．这就同我们的假定矛盾，因此定理得证．

这个定理说明了，只要微分方程右端是一个确定在开集 $I(0 \leqslant t < \infty) \times Q \subset R^n$ 上的连续函数，则方程之解对初值和右端函数就有连续依赖性．这里并不要求方程右端函数满足李浦希兹条件．

5. 正极限集：

定义： 我们说解 $x(t)$ 当 $t \to \infty$ 时趋于集合 A (即表示为 $x(t) \to A$)，如果对每一个 $\varepsilon > 0$，都存在一个 $T > 0$，使当 $t > T$ 时，都有 A 中的一个点 p 具有性质

$$\|x(t) - p\| < \varepsilon.$$

这就是说，对所有 $t > T$，点 $x(t)$ 被包含在 $U(A, \varepsilon)$ 内．

现在让 Γ^+ 表示方程 (3.1) 的一个解 $x(t)$ 的正极限集，也就是说一个点 ω 它属于 $x(t)$ 的正极限集 Γ^+，如果对应每一个 $\varepsilon > 0$ 和每一个 $T > 0$，都有一个 $t > T$ 使得

$$\|x(t) - \omega\| < \varepsilon,$$

这就等价于存在一个序列 $\{t_k\}$，此序列随着 k 一起趋于 ∞，使得当 $k\to\infty$ 时，$x(t_k)\to\omega$。

如果(3.1)的一个解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\ \boldsymbol{x}_0,\ t_0)$ 对于 $t\geqslant t_0$ 是有界的，则它的正极限集 Γ^+ 是一个非空的紧致集，且当 $t\to+\infty$ 时，

$$\boldsymbol{x}(t;\ \boldsymbol{x}_0,\ t_0)\to\Gamma^+.$$

此外，如果 $\boldsymbol{x}(t;\ \boldsymbol{x}_0,\ t_0)$ 对于 $t\geqslant t_0$ 是有界的，且如果 $M\supset\Gamma^+$，即 M 包含 $\boldsymbol{x}(t;\ \boldsymbol{x}_0,\ t_0)$ 的正极限集 Γ^+，则当 $t\to\infty$ 时，

$$\boldsymbol{x}(t)\to M.$$

下列引理是显然成立的：

引理 1：令 Ω 是空间 Q 内的一个闭集，假定一个解 $\boldsymbol{x}(t)$ 是有界的，且当 $t\to\infty$ 时 $\boldsymbol{x}(t)\to\Omega$，则 $\boldsymbol{x}(t)$ 的正极限集 Γ^+ 满足

$$\Gamma^+\subset\Omega.$$

证：若 $\boldsymbol{a}\in\Gamma^+$，则因 Γ^+ 是 $\boldsymbol{x}(t)$ 的正极限集，故对每一个 $\varepsilon>0$ 和每一个 $T>0$，都有一个 $t>T$，使得

$$\|x(t)-a\|<\varepsilon;$$

又因当 $t\to\infty$ 时，$\boldsymbol{x}(t)\to\Omega$，$a\in\Omega$，所以 $\Rightarrow\Gamma^+\subset\Omega$。

6. 对函数 $F(t,\ x)$ 的假定：

令 Ω 是空间 Q 中的一个闭集，我们假定 $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})$ 满足下列条件：

(a) 当 $\boldsymbol{x}\in\Omega$，$t\to\infty$ 时，$\boldsymbol{F}(t,\ \boldsymbol{x})\to\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$，且在 Ω 内的任一个紧致集，这个收敛性都是一致。因此 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 是一个确定在 Ω 上的连续函数。

(b) 对应于每一个 $\varepsilon>0$ 和每一个 $\boldsymbol{y}\in\Omega$，都存在正数 $\delta(\boldsymbol{y})$ 和 $T(\boldsymbol{y})$，使得当 $\|x-\boldsymbol{y}\|<\delta(\boldsymbol{y})$ 和 $t>T(\boldsymbol{y})$ 时，就有

$$\|F(t,\ x)-F(t,\ y)\|<\varepsilon.$$

注：如果 $t\in I$，则我们能够选取 $\delta(\boldsymbol{y})$ 使得条件(b)对所有 $t\geqslant 0$ 都满足。

引理 2：仅就 $\boldsymbol{y}$ 属于 Ω 内的任意一个紧致集 Ω_1，我们能够独立于 $\boldsymbol{y}$ 来选取(b)中的 δ 和 T。

这个引理是很容易证明的，就像证明在一个紧致集上的连续

函数的一致连续性那样来证明．因在一个紧致集上定义的连续函数，它一定具有等度和一致连续性．

马尔库斯[18]曾讨论：

系统 S：$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})$ 的解和系统 S_∞：$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 的解之间的关系．他假定 $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})$ 是 $(t,\boldsymbol{x})$ 的在 R^n 的一个开子集 $\boldsymbol{x}\in Q$ 和所有 $t\geqslant t_0$ 上的连续函数；假定 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 是确定在 R^n 的一个开子集 $\boldsymbol{x}\in Q$ 上的连续函数．

他说系统 S 是渐近于系统 S_∞，如果对每一个紧致集 $K\subset Q$ 和每一个 $\varepsilon>0$，都存在一个 $T(K,\varepsilon)>t_0$，使得对所有的 $\boldsymbol{x}\in K$ 和所有的 $t>T$，都有

$$\|F(t,x)-H(x)\|<\varepsilon.$$

具有这种性质的任何一个 $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})$ 都会满足条件 (a) 和 (b)． 因为如果 $\boldsymbol{\Omega}$ 是 Q 的任一个闭集，显见就存在一个像在条件 (a) 中的函数 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$，因为 $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})$ 趋于 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{\Omega}$ 内的任何一个紧致集上都一致地成立．其次考虑 $\boldsymbol{y}\in\Omega$ 的一个邻域 $U(\boldsymbol{y})$．我们可以假定 $\bar{U}(\boldsymbol{y})\subset Q$． 如果 $\boldsymbol{x}\in\bar{U}(\boldsymbol{y})$，对应于每一个 $\varepsilon>0$，都有一个 $T(\varepsilon)>0$，使得当 $t\geqslant T(\varepsilon)$ 时，我们就有

$$\begin{cases}\|F(t,x)-H(x)\|<\dfrac{1}{3}\varepsilon,\\[2ex]\|F(t,y)-H(y)\|<\dfrac{1}{3}\varepsilon.\end{cases}\tag{3.10}$$

这是因为 $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})$ 一致收敛到 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$． 又因 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 在 $\bar{U}(\boldsymbol{y})$ 上连续，故存在一个 $\delta(\boldsymbol{y})>0$，使得当 $\|x-y\|<\delta(y)$ 时，

$$\|H(x)-H(y)\|<\frac{1}{3}\varepsilon.\tag{3.11}$$

当 $t\geqslant T(\varepsilon)$ 和 $\|x-y\|<\delta(y)$ 时，应用 (3.10) (3.11) 和不等式

$$\|F(t,x)-F(t,y)\|\leqslant\|F(t,x)-H(x)\|$$
$$+\|H(x)-H(y)\|+\|H(y)-F(t,y)\|,$$

我们就有 $\|F(t,x)-F(t,y)\|<\varepsilon$． 这就证明了 $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})$ 满足条件 (b)． 因此马尔库斯的条件是我们考虑 $Q=\boldsymbol{\Omega}$ 的一个特殊情

形。所以如果方程(3.1)的 $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$ 满足马尔库斯条件，我们的讨论分析完全可以应用得上。特别是下列被奥皮尔曾讨论过的方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{x}), \tag{3.12}$$

是上面提到的 $\Omega = Q = R^n$ 的一个特殊情形[19]。

7. 半不变集：

现在考虑一个定义在集 D 上的微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}), \qquad x \in D, \tag{3.13}$$

且令 M 是 D 的一个子集。

定义：我们称 M 是方程(3.13)的一个半不变集，如果 M 是由(3.13)的解构成。即是说对 M 的每一点都至少有(3.13)的一个解通过，这个解对所有未来时刻都保留在 M 中。

在这里应指出的，就是我们并未对(3.13)的初值问题解有唯一性假定，所以应用了"半不变集"这个术语。但是一旦我们保证(3.13)的初值问题解具有唯一性，那"半不变集"就是(3.13)的一个不变集。

定理 3.3：假定方程(3.1)

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{x})$$

的一个解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ 是有界的，且它趋于 Q 的一个闭集 Ω。又 $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$ 满足条件(a)和(b)。则 $\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ 之正极限集 Γ^+ 是方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}), \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega} \tag{3.14}$$

包含在 $\boldsymbol{\Omega}$ 中的一个半不变集。

证：因为 $\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ 在 Q 中有界，在 Q 内存在一个紧致集 $Q^*(\subset Q)$，使得对所有 $t \geqslant t_0$，

$$\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0) \in Q^*,$$

为了简便起见我们今后就用 $\boldsymbol{x}(t)$ 表示 $\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$。令 Γ^+ 是 $\boldsymbol{x}(t)$ 的正极限集。由引理 1 知

$$\Gamma^+ \subset \Omega \cap \Omega^* = \Omega_1,$$

因为 Ω_1 是 R^n 中的一个紧致集，所以在 R^n 上存在一个有界的连续函数 $H^*(\boldsymbol{x})$，使得在 Ω_1 上有

$$\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}).$$

现在我们就来考虑方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{x}). \tag{3.15}$$

令 ω 是 Γ^+ 的一个点，那末 $\omega \in \Omega_1$，因而存在一个序列 $\{t_k\}$，使得当 $k \to \infty$ 时，

$$t_k \to \infty, \quad \boldsymbol{x}(t_k) \to \omega. \tag{3.16}$$

方程 (3.15) 经过 (t_k, ω) 的解的性质和过 $(0, \omega)$ 点的解的性质一样分析，因为 (3.15) 是自治系统.

令 J_k 表示一个区间 $t_k \leqslant t \leqslant t_k + \lambda$，$\lambda > 0$ 任意. 因为 $\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{x})$ 是有界的，所以 (3.15) 的所有解在 J_k 上存在，我们再考虑一个系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}(t)) - \boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{x}(t)). \tag{3.17}$$

显见 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ 是 (3.17) 过点 $(t_k, \boldsymbol{x}(t_k))$ 的一个解. $\boldsymbol{x}(t)$ 是有界的，这样一来，根据条件 (2) 就有

$$\int_{t_0}^{\infty} \|G(s, x(s))\| ds < \infty,$$

因此，如果 k 足够大，即 $k \geqslant k_1$（k_1 是某一个正数），对一个给定 $\delta > 0$，

$$\int_{t_k}^{t_k+\lambda} \|G(s, x(s))\| ds < \frac{1}{2\lambda} \delta. \tag{3.18}$$

因为 Ω_1 是一个紧致集，对每一个点 $\boldsymbol{x}(t)$ 都存在一个点 $\boldsymbol{y}(t)$，使得

$$d(\boldsymbol{x}(t), \Omega_1) = \|x(t) - y(t)\|.$$

由条件 (b) 和引理 2，对应于 $\frac{\delta}{6\lambda}$，存在 $\delta_1 > 0$ 和 $T > 0$，使得当 $\boldsymbol{y} \in \Omega_1$，$\|x - y\| < \delta_1$ 和 $t \geqslant T$ 时，我们就有

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| < \frac{\delta}{6\lambda}.$$

另一方面，就充分大的 t 我们有

$$\boldsymbol{x}(t)\subset U(\Omega_1,\delta)\cap\Omega^*.$$

这是因当 $t\to\infty$ 时 $\boldsymbol{x}(t)\to\Omega_1$. 因此当 t 充分大，即是说 k 比某一个正数 k_2 更大时，在 J_k 上我们有

$$\|F(t,x(t))-F(t,y(t))\|<\frac{\delta}{6\lambda}. \tag{3.19}$$

由条件 (a) 知，当 $t\to\infty$ 时，就 $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 和 $\boldsymbol{x}\in\Omega_1$ 我们有

$$\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})\to\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}).$$

且这个收敛性是一致的，因此对充分大的 t 和 $\boldsymbol{x}\in\Omega_1$，我们有

$$\|F(t,x)-H(x)\|<\frac{\delta}{6\lambda}.$$

因此如果 k 足够大，即 $k\geqslant k_3$（k_3 是某个正数），在 J_k 上我们有

$$\|F(t,x(t))-H(y(t))\|<\frac{\delta}{6\lambda}. \tag{3.20}$$

此外，因 $\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{x})$ 在 Ω^* 上连续，存在一个 $\delta_2>0$，使得当 $\|x-y\|<\delta_2$ 时，$\|H^*(x)-H^*(y)\|<\dfrac{\delta}{6\lambda}$，且当 $y\in\Omega_1$ 时，$\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y})$。因此当 $\boldsymbol{y}\in\Omega_1$ 和 $\|x-y\|<\delta_2$，

$$\|H^*(x)-H(y)\|<\frac{\delta}{6\lambda}.$$

因此就 k 大于某个正数 k_4 时，在 J_k 上我们有

$$\|H(y(t))-H^*(x(t))\|<\frac{\delta}{6\lambda}. \tag{3.21}$$

因此如果 $k>\max\limits_{i=1,2,3,4}k_i$，由 (3.19) 到 (3.21) 和不等式

$$\begin{aligned}\|F(t,x(t))-H^*(x(t))\|&\leqslant\|F(t,x(t))-F(t,y(t))\|\\&+\|F(t,y(t))-H(y(t))\|+\|H(y(t))-H^*(x(t))\|\end{aligned}$$

在 J_k 上我们有

$$\|F(t,x(t))-H^*(x(t))\|<\frac{\delta}{2\lambda}. \tag{3.22}$$

根据 (3.18) 和 (3.22) 就有

$$\int_{t_k}^{t_k+\lambda}\|F(s,x(s))-H^*(x(s))+G(s,x(s))\|ds<\delta.$$

另一方面，由(3.16)就充分大的 k 我们有

$$d[(t_k, x(t_k)), (t_k, \omega)] \leqslant \delta.$$

这样一来，根据定理 3.2 即可看出方程(3.15)存在一个通过点 (t_k, ω) 的解 $\varphi_k(t)$，使得对一个给定的 $\varepsilon > 0$，有

$$d(x(t), \varphi_k(t)) < \varepsilon, \quad 当\ t \in J_k.$$

因 $\varphi_k(t)$ 是方程(3.15)过点 (t_k, ω) 的一个解，我们有

$$\varphi_k(t) = \omega + \int_{t_k}^{t} H^*(\varphi_k(s))ds \qquad (t_k \leqslant t \leqslant t_k + \lambda),$$

如果我们把 $\varphi_k(t + t_k)$ $(0 \leqslant t \leqslant \lambda)$ 仍旧用 $\varphi_k(t)$ 来表示，我们有

$$\varphi_k(t) = \omega + \int_0^t H^*(\varphi_k(s))ds, \ 0 \leqslant t \leqslant \lambda.$$

因此针对当 $k \to \infty$ 时的一个序列 $\{\varepsilon_k\} \to 0$，就存在(3.15)的解序列 $\{\varphi_k(t)\}$，使得

$$\begin{cases} \varphi_k(t) = \omega + \int_0^t H^*(\varphi_k(s))ds \ (0 \leqslant t \leqslant \lambda), \\ \varphi_k(t) \subset U(\Gamma^+, \varepsilon_k). \end{cases} \qquad (3.23)$$

因为函数列 $\{\varphi_k(t)\}$ 是等度连续和一致有界，所以我们可以选出一个一致收敛的子序列．令 $\varphi(t)$ 是此子序列的极限函数．那末由(3.23)我们有

$$\varphi(t) = \omega + \int_0^t H^*(\varphi(s))ds \qquad (0 \leqslant t \leqslant \lambda)$$

和

$$\varphi(t) \subset \Gamma^+ \quad (0 \leqslant t \leqslant \lambda),$$

因为当 $k \to \infty$ 时，$\varepsilon_k \to 0$．另一方面 $\Gamma^+ \subset \Omega_1$，因此

$$H^*(\varphi(t)) = H(\varphi(t)),$$

于是我们有

$$\varphi(t) = \omega + \int_0^t H(\varphi(s))ds \quad (0 \leqslant t \leqslant \lambda).$$

这就是说 $\varphi(t)$ 是方程(3.14)过点 $(0, \omega)$ 的一个解，且此解一直保留在 Γ^+ 内．因为 λ 是任意的，故存在方程(3.14)在初始时刻 $t = 0$ 从 ω 出发的一个解，这个解在 $t \geqslant 0$ 上都有定义，且保留在

Γ^+ 内. 这样一来, 我们就得知 Γ^+ 是 (3.14) 的一个半不变集. 定理证毕.

注: 从上面定理的证明过程中能够看出: 当 $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{x})$ 定义在 $\boldsymbol{x} \in Q, 0 < t < \infty$ 上时, 就初值为 $\boldsymbol{x}_0 \in Q$, $t_0 > 0$ 的一个解 $\boldsymbol{x}(t; x_0, t_0)$ 而言,定理的结论也成立.

从定理 3.3 可以得到下列推论: [18,19]

假定方程 (3.1)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{x})$$

中的 $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$ 在 Q 的一个闭集 Ω 上满足条件 (a) 和 (b).

推论 1: 如果方程 (3.1) 的一个解 $\boldsymbol{x}(t)$ 逼近Ω,我们有

$$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0.$$

这个点 x_0 是方程 (3.14)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}), \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}$$

的一个奇点,就是 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}$.

推论 2: 如果 (3.14) 的每一个解都不是有界的, 那末逼近于 $\boldsymbol{\Omega}$ 的 (3.1) 的解也不是有界的.

推论 3: 假定逼近 Ω 的 (3.1) 的一个解 $\boldsymbol{x}(t)$, 当 $t \to \infty$ 时趋于一个周期函数 $\boldsymbol{y}(t) \in Q$, 也即是说, 对应于每一个 $\varepsilon > 0$, 都存在一个 $\tau > 0$, 使得对所有 $t \geqslant \tau$,

$$\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon,$$

则 $x(t)$ 的正极限集就是方程 (3.14) 的一条闭轨.

证: 令 Γ_x^+ 和 Γ_y^+ 分别表示 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{y}(t)$ 的正极限集. 因为 $\boldsymbol{x}(t) \to \boldsymbol{y}(t)$, 故有 $\Gamma_x^+ = \Gamma_y^+$.

令 ω 是 Γ_x^+ 的一个点,则 $\omega \in \Gamma_y^+$. 我们令

$$\omega = y(t_1 + kT), \ k = 0, 1, 2, \cdots,$$

T 是 $\boldsymbol{y}(t)$ 的一个周期.

对应于每一个 $\varepsilon > 0$, 如果 k 充分大,我们有

$$\|x(t_1 + kT) - y(t_1 + kT)\| < \varepsilon,$$

因此

$$\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}(t_1 + kT) = \omega.$$

让我们把 T 考虑为定理 3.3 证明中的 λ. 用像定理 3.3 证明中同样的记号，对应于每一个 $\varepsilon > 0$，如果 k 充分大，我们有

$$\|x(t_1 + kT + t) - \varphi(t)\| < \varepsilon.$$

因此就充分大的 k，我们有

$$\|y(t_1 + kT + t) - \varphi(t)\| < 2\varepsilon.$$

因为 $y(t_1 + kT + t) = y(t_1 + t)$，所以 $\|y(t_1 + t) - \varphi(t)\| < 2\varepsilon$. 这样一来就 $0 \leqslant t \leqslant T$，我们有 $\boldsymbol{y}(t_1 + t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$. 由此看出 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 具有周期 T. 因为对所有 $t \geqslant 0$，

$$\boldsymbol{y}(t_1 + t) = \boldsymbol{\varphi}(t),$$

故我们有 $\Gamma_y^+ = \Gamma_\varphi^+$，所以这样一来 $\Gamma_x^+ = \Gamma_\varphi^+$. 即 $\boldsymbol{x}(t)$ 的一个正极限集就是方程 (3.14) 的一条闭轨.

在这里应当指出：即代替一个解 $\boldsymbol{x}(t; x_0, t_0)$ 的有界性，只要假定 $\boldsymbol{x}(t; x_0, t_0)$ 的正极限集是非空的，那我们就可把定理 3.3 陈述成另一形式.

定理 3.4: 假定方程 (3.1)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{x})$$

的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ 的正极限集是非空的，且 $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$ 满足在第 6 点中提到的马尔库斯条件，则 $\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ 的正极限集是方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q}$$

的解之和集.

8. 解的渐近性:

这里我们先给出一个**定义**:

一个 $\boldsymbol{x}$ 的纯量函数 $f(\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{x} \in Q$) 关于一个集合 A 是正定的，如果当 $\boldsymbol{x} \in A$，$f(\boldsymbol{x}) = 0$，且对应于每一个 ε 和 Q 中的每一个紧致集 Q^*，都存在一个正数 $\delta(Q^*, \varepsilon)$，使得当 $\boldsymbol{x} \in Q^* \cap U(A\varepsilon)^c$ 时，

$$f(\boldsymbol{x}) \geqslant \delta(Q^*, \varepsilon).$$

如果 $-f(x)$ 关于 A 是正定的，我们就说 $f(\boldsymbol{x})$ 关于 A 是负定的.

定理 3.5: 假定 $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$ 对所有的 t 和 x 属于 Q 的任意一个紧致集都是有界的，且 (3.1) 的所有解都是有界的. 此外，我们假

定存在一个非负的连续函数 $V(t, \boldsymbol{x}) \in C_0(\boldsymbol{x})$，使得

$$\frac{dV}{dt} = \overline{\lim_{h\to 0^+}} h^{-1}\{V(t+h, \boldsymbol{x}+h(\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})+\boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{x}))) - V(t, \boldsymbol{x})\} \leqslant -W(\boldsymbol{x}).$$

这里 $W(\boldsymbol{x})$ 对于在 Q 内的一个闭集 Ω 上是正定的，则 (3.1) 的每一个解都逼近 Ω。

证： 考虑 (3.1) 的一个解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t; x_0, t_0)$，因为它有界，所以就存在一个紧致集 $Q^* \subset Q$，使得对每个 $t \geqslant t_0$，$\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0) \in Q^*$. 现在假定这个解不趋向于 Ω，那末对某一个 $\varepsilon > 0$，都存在一个序列 $\{t_k\}$，当 $k \to \infty$，$t_k \to \infty$，使得

$$\boldsymbol{x}(t_k; \boldsymbol{x}_0, t_0) \in U(\Omega, \varepsilon)^c \cap Q^*,$$

因为当 $\boldsymbol{x} \in Q^*$ 时，$F(t, \boldsymbol{x})$ 是有界的，就存在一个正数 K，使得

$$\|F(t, \boldsymbol{x})\| < K.$$

我们可以假定 t_k 充分大，使得在区间

$$t_k \leqslant t \leqslant t_k + \frac{\varepsilon}{4K} \tag{3.24}$$

上根据 (3.2) 有

$$\int_{t_k}^{t_k+\frac{\varepsilon}{4K}} \|\boldsymbol{G}(s, \boldsymbol{x}(s; \boldsymbol{x}_0, t_0))\| ds < \frac{1}{4}\varepsilon,$$

因此我们看出在区间 (3.24) 上，

$$\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0) \in U\left(\Omega, \frac{1}{2}\varepsilon\right)^c \cap Q^*.$$

我们可以把这些区间 $\left\{\left[t_k, t_k + \frac{\varepsilon}{4K}\right]\right\}$ $(k=1,2,\cdots)$取成互不相交的. 由于 $\frac{dV}{dt}$ 关于 Ω 是负定的，因此存在 $\delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) > 0$，使得在区间 (3.24) 上有

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right),$$

且 $\frac{dV}{dt}$ 在任何其它地方都取非正值，所以有

$$V\left(t_k + \frac{\varepsilon}{4K}; \boldsymbol{x}\left(t_k + \frac{\varepsilon}{4K}; \boldsymbol{x}_0, t_0\right)\right) - V(t_0, \boldsymbol{x}_0)$$

$$\leqslant -\delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\frac{\varepsilon}{4K}k \to -\infty, \text{当 } k \to \infty.$$

而这和 $V(t, \boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 正定性矛盾，故

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0) = \Omega.$$

注： 当 $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x})$ 定义在 $\boldsymbol{x} \in Q$ $0 < t < \infty$ 上时，如果 $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$ 对所有 $t \geqslant t_0$ 和 $\boldsymbol{x} \in Q^*$（紧致集）时是有界的，则定理的结论对一个初始点 $\boldsymbol{x}_0 \in Q$, $t_0 > 0$ 的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ 也成立。

根据定理 3.3 和定理 3.5，就能得到关于方程 (3.1) 之解的渐近行为的一个充分条件。

定理 3.6: 假定 (3.1) 的所有解是有界的，这就是说 (3.1) 的每一个解都被包含在 Q 的一个紧致集内，又假定在 Q 内存在一个非负的连续函数

$$V(t, \boldsymbol{x}) \in C_0(\boldsymbol{x}),$$

使得

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3.1)} \leqslant -W(\boldsymbol{x}).$$

这里 $W(\boldsymbol{x})$ 是关于在 Q 内的一个闭集 Ω 上的正定函数。此外还假定 $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$ 对所有 t 和当 $\boldsymbol{x}$ 属于 Q 内之任意一个紧致集时是有界的，$\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$ 满足条件 (a) 和 (b)，则 (3.1) 的所有解逼近于方程

$$\dot{x} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega$$

的包含在 Ω 内之最大半不变集。

注： 正像我们从定理的证明中能够看到，对于位于某一个区域内的一族解而言，定理 3.6 能够被证明。就是说，令 Q 是在乘积空间

$$I(0 \leqslant t < \infty) \times R^n$$

中的一个集合，使得对任一 $\tau > 0$，Q 和超平面 $t = \tau$ 的交集是属于 R^n 中的一个非空紧致集，且令 Ω 是 R^n 内的一个闭集，使得

$$I(0 \leqslant t < \infty) \times \Omega \subset Q.$$

如果我们假定方程 (3.1) 在 Q 内出发的每个解对所有未来时刻都保留在 Q 内，又存在一个像定理 3.5 中所说的函数 $V(t, \boldsymbol{x})$，且

$\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$ 满足条件 (a) 和 (b) 及有界性的假设，那末定理 3.6 的结论对由 Ω 内出发的每个解都能被证实.

拉萨尔[13]曾证明了下列定理.

令 $\boldsymbol{\Omega}$ 是一个紧致集，它具有如下性质：即方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

由 Ω 出发的每一个解对所有未来时刻都保留在 $\boldsymbol{\Omega}$ 内. 假定存在一个纯量函数 $V(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$，它具有连续的一阶偏导数，且在 $\boldsymbol{\Omega}$ 内 $\dfrac{dV}{dt} \leqslant 0$. 令 E 是 $\dfrac{dV}{dt} = 0$ 在 $\boldsymbol{\Omega}$ 内的所有点之集合，令 M 是 E 内的最大不变集. 则由 $\boldsymbol{\Omega}$ 内出发的每个解，当 $t \to \infty$ 时逼近于 M.

在这个情况下，E 是在 $\boldsymbol{\Omega}$ 内的一个闭集. 所以上面提到的结论可以应用.

9. 例题

(1) 考虑

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t), \tag{3.25}$$

这里 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 R^1 上连续，$e(t)$ 在 I 上连续. 我们假定：

(i) $xg(x) > 0 \ (x \neq 0)$，$g(0) = 0$；

(ii) $f(x) > 0 \ (x \neq 0)$，$f(0) \geqslant 0$，

$$F(x) = \int_0^x f(u)du \to \pm\infty, \text{ 当 } x \to \pm\infty \text{ 时；}$$

(iii) $E(t) = \displaystyle\int_0^t |e(s)|ds < \infty$，

则对 (3.25) 的每个解 $x(t)$，我们有

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = 0.$$

证：首先作 (3.25) 等价的方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x), \\ \dot{y} = -g(x) + e(t), \end{cases} \tag{3.26}$$

作

$$V(t;\, x,\, y) = e^{-2E(t)}\left\{G(x) + \frac{1}{2}y^2 + 1\right\},$$

这里

$$G(x) = \int_0^x g(u)du \geqslant 0, \quad \text{则我们有}$$

$$e^{-2E(\infty)}\frac{1}{2}y^2 \leqslant V(t;\ x,\ y) \leqslant G(x) + \frac{1}{2}y^2 + 1,$$

$$\frac{dV}{dt} = e^{-2E(t)}\Big\{-2|e(t)|\Big(G(x) + \frac{1}{2}y^2 + 1\Big)$$

$$+ g(x)y - g(x)F(x) - yg(x) + ye(t)\Big\}$$

$$\leqslant e^{-2E(t)}\Big\{-2|e(t)|\Big(\frac{1}{2}y^2 + 1\Big) + |y||e(t)|\Big\}$$

$$= e^{-2E(t)}\{-|e(t)|(y^2 - |y| + 2)\} < 0$$

$$\Big(\because\ |y| \leqslant \frac{1}{2}(y^2 + 1)\Big).$$

其次就适当大的 $R_1 > 0$，如果我们作

$$W_1(t;\ x,\ y) = x, \qquad \text{当 } x \geqslant R_1,$$
$$W_2(t;\ x,\ y) = -x, \qquad \text{当 } x \leqslant -R_1.$$

由条件 (ii)，我们有

$$\frac{dW_1}{dt} = y - F(x) \leqslant 0, \qquad \text{当 } x \geqslant R_1,$$

$$\frac{dW_2}{dt} = -(y - F(x)) \leqslant 0, \text{当 } x \leqslant -R_1.$$

因此根据定理 3.1 知存在一常数 $C_1 > 0$，使得

$$|x(t)| \leqslant C_1, \quad |y(t)| \leqslant C_1.$$

从 (3.26) 看出存在一个常数 $C_2 > 0$，使得

$$|x(t)| \leqslant C_2, \quad |\dot{x}(t)| \leqslant C_2.$$

这就是对应于 (3.25) 的每一个解都存在一个常数 $C_2 > 0$，使得

$$|x(t)| \leqslant C_2, \quad |\dot{x}(t)| \leqslant C_2.$$

另一方面 (3.25) 亦等价于下列方程组：

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x) + e(t), \end{cases} \tag{3.27}$$

因此对 (3.27) 的每一个解 $(x(t),\ y(t))$ 而言，我们有

$$|x(t)| \leqslant C, \ |y(t)| \leqslant C, \ C > 0 \text{ 为常数}.$$

针对 (3.27) 作

$$V(t;\ x,\ y) = e^{-2E(t)}\left\{G(x) + \frac{1}{2}y^2 + 1\right\},$$

我们有

$$V(t;\ x,\ y) \geqslant 0.$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3.27)} &= e^{-2E(t)}\left\{-2|e(t)|\left(G(x) + \frac{1}{2}y^2 + 1\right)\right.\\ &\qquad \left. + g(x)y - f(x)y^2 - g(x)y + ye(t)\right\}\\ &\leqslant e^{-2E(t)}\{-|e(t)|(y^2 + 2 - |y|) - f(x)y^2\}\\ &\leqslant -f(x)y^2e^{-2E(t)} \leqslant -f(x)y^2e^{-2E(\infty)}.\end{aligned}$$

定理 3.6 中所说的集合 Ω 是由 $W(x,\ y) = e^{-2E(\infty)}f(x)y^2$ 的零点构成.

1) 当 $f(0) > 0$ 时, Ω 是自 x 轴上的点 $(x, 0)$ 构成的.

2) 当 $f(0) = 0$ 时, Ω 是由 x 轴上的点 $(x, 0)$ 和 y 轴上的点 $(0, y)$ 组成的.

显见在条件 (ii) 的保证下, 函数 $W(x,\ y) = e^{-2E(\infty)}f(x)y^2$ 关于集合 Ω 是正定的. 因此由定理 3.5 知方程 (3.27) 的所有解趋于 Ω.

再则由 (3.27) 之右端函数立即看出, 它们满足条件 (a) 和 (b). 且当把 (3.27) 右端的干扰项 $e(t)$ 去掉时, 系统在 Ω 集上具有如下形式:

$$\text{当 } f(0) > 0,\ \begin{cases}\dot{x} = 0,\\ \dot{y} = -g(x),\end{cases} \tag{3.28}$$

$$\text{当 } f(0) = 0,\ \begin{cases}\dot{x} = 0,\ \dot{y} = -g(x)\ (\text{在 } x \text{ 轴上}), & (3.29)\\ \dot{x} = y,\ \dot{y} = 0\quad (\text{在 } y \text{ 轴上}). & (3.30)\end{cases}$$

由此立即看出包含在 Ω 内的, 不论是方程组 (3.28) 的, 还是方程组 (3.29) 或 (3.30) 的最大不变集就是坐标原点 (0,0). 所以根据定理 3.6 知方程组 (3.27) 的所有解都趋于这个包含在 Ω 内最大不变集——坐标原点, 因此对 (3.25) 的每一个解 $x = x(t;\ x_0, \dot{x}_0, t_0)$ 都有

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \lim_{t\to\infty}\dot{x}(t) = 0.$$

(2) 考虑

$$\ddot{x} + h(t; x, \dot{x})\dot{x} + f(x) = e(t), \tag{3.31}$$

我们假定

(i) $h(t; x, y)$ 确定在乘积空间

$$I(0 \leqslant t < +\infty) \times R_x^1(|x| < \infty) \times R_y^1(|y| < \infty)$$

上是连续非负的；当 $x^2 + y^2$ 有界时，$h(t; x, y)$ 有界． 此外 $h(t; x, y)$ 还满足下列条件：

或(甲)就 $y \neq 0$，　$h(t; x, y) \geqslant k(x, y) > 0$；

或(乙)就 $xy \neq 0$　$h(t; x, y) \geqslant k(x, y) > 0$；

$h(t; 0, y) = 0$；当 $x \to 0$，$h(t; x, y) \to 0$ 对 t 和 y($y \in$ 一个紧致集)是一致地成立；

$k(x, y)$ 是一个连续函数．

(ii) $f(x)$ 在 R_x^1 上连续，当 $x \neq 0$，$xf(x) > 0$，

当 $|x| \to \infty$ 时，$F(x) = \int_0^x f(u)du \to +\infty$．

(iii) $e(t)$ 在 $I(0 \leqslant t < +\infty)$ 上连续，且

$$E(t) = \int_0^t |e(s)|ds < \infty,$$

则 (3.31) 的每个解在 $I(0 \leqslant t < \infty)$ 上存在，且有性质

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \to \infty} \dot{x}(t) = 0.$$

证：首先作等价于 (3.31) 的方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -h(t; x, y)y - f(x) + e(t). \end{cases} \tag{3.32}$$

作函数

$$V(t; x, y) = e^{-2E(t)}\left\{F(x) + \frac{1}{2}y^2 + 1\right\},$$

$$e^{-2E(\infty)}\left\{F(x) + \frac{1}{2}y^2 + 1\right\} \leqslant V(t; x, y)$$

$$\leqslant F(x) + \frac{1}{2}y^2 + 1,$$

$$\frac{dV}{dt} = e^{-2E(t)}\left\{-2|e(t)|\left(F(x)+\frac{1}{2}y^2+1\right)\right.$$

$$\left.+f(x)y+y(-h(t;x,y)y-f(x)+e(t))\right\}$$

$$= e^{-2E(t)}\{-|e(t)|[(y^2+2)+2F(x)]$$

$$-h(t;x,y)y^2+|y||e(t)|\}$$

$$\leqslant e^{-2E(t)}\{-|e(t)|[(y^2+2-|y|)]$$

$$-h(t;x,y)y^2\} \leqslant -e^{-2E(t)}h(t;x,y)y^2$$

$$\leqslant -e^{-2E(\infty)}k(x,y)y^2 < 0.$$

根据第一篇第三章 § 2 定理 2 知 (3.32) 的所有解是一致有界的.
从

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3.32)} \leqslant -e^{-2E(\infty)}h(t;x,y)y^2$$

知集合 Ω 是由 $y=0$ 的点（即 x 轴上的点）．或由 $xy=0$ 的点(即 x 轴和 y 轴上的点)组成的，因为最大的半不变集包含在 Ω 内．此时确定在集合 Ω 上的方程形式（不含干扰项 $e(t)$）如下：

$$\text{当 } y=0,\ \begin{cases}\dot{x}=0,\\ \dot{y}=-f(x),\end{cases} \tag{3.33}$$

$$\text{当 } xy=0,\ \begin{cases}\dot{x}=0,\ \dot{y}=-f(x), & (3.34)\\ \dot{x}=y,\ \dot{y}=0. & (3.35)\end{cases}$$

因此不论是 (3.33) 或 (3.35)，所有这些方程的包含在 Ω 内的最大半不变集就是由一点——坐标原点构成的．从而根据定理 3.6 知方程 (3.31) 的每一个解 $x=x(t)$ 都具有性质

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=0,\quad \lim_{t\to\infty}\dot{x}(t)=0.$$

最后指出一点，方程 (3.31) 曾为 J. J. 列文 (Levin) 及 J. A. 诺赫尔 (Nohel)[34] 仔细研究过．他们用了较长的篇幅，走了不少弯路，费了很大的气力才证明了上述结论．因此吉澤太郎提供的，处理含有干扰项方程解的渐近性的方法应当引起我们注意.

(3) 考虑

$$\ddot{x}+f(x)h(\dot{x})\dot{x}+g(x)=e(t). \tag{3.36}$$

假定

(I) $f(x)$, $g(x)$, $h(\dot{x})$ 对所有实值连续；

(II) $xg(x) > 0$ (所有 $x \neq 0$) 及 $f(x) > 0$ $(x \neq 0)$ 对所有 x, $f(0) \geqslant 0$;

(III) $h(u) > 0$ 对所有 u;

(IV) $e(t)$ 对所有 $t \geqslant 0$ 分段连续；

(V) $\int_0^\infty |e(s)|ds < \infty$, 且 $e(t)$ 有界；

(VI) $G(x) = \int_0^x g(u)du \to \infty$, 当 $|x| \to \infty$,

则 (3.36) 每一个解在 $I(0 \leqslant t < +\infty)$ 上存在，且有性质

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = 0.$$

证： 首先作 (3.36) 的等价方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -f(x)h(y)y - g(x) + e(t). \end{cases} \tag{3.37}$$

作函数

$$V(t;\ x,\ y) = e^{-2E(t)}\left[G(x) + \frac{1}{2}y^2 + 1\right],$$

$$e^{-2E(\infty)}\left(G(x) + \frac{1}{2}y^2 + 1\right) \leqslant V(t;\ x,\ y)$$

$$\leqslant G(x) + \frac{1}{2}y^2 + 1,$$

$$\frac{dV}{dt} = e^{-2E(t)}\left[-2|e(s)|\left(G(x) + \frac{1}{2}y^2 + 1\right) + g(x)y\right.$$

$$\left. + y(-f(x)h(y)y - g(x) + e(t))\right]$$

$$\leqslant e^{-2E(t)}\left[-2|e(s)|\left(G(x) + \frac{1}{2}y^2 + 1\right)\right.$$

$$\left. - f(x)h(y)y^2 + |y||e(t)|\right]$$

$$= e^{-2E(t)}\left[-2|e(s)|\left(G(x) + \frac{1}{2}y^2 + 1\right.\right.$$

$$-\frac{1}{2}|y|\Big)-f(x)h(y)y^2\Big]\leqslant -e^{-2E(t)}f(x)h(y)y^2$$

$$\leqslant -e^{-2E(\infty)}f(x)h(y)y^2\leqslant 0.$$

根据第一篇第三章§2定理2知(3.37)的所有解一致有界.

$$\frac{dV}{dt}\leqslant -e^{-2E(\infty)}f(x)h(y)y^2=-W(x,y),$$

使得 $W(x, y)=0$ 的点是

$$y=0,\ \text{即}\ x\ \text{轴上的点}\ (x, 0),$$

$$\text{或}\qquad x=0,\ \text{即}\ y\ \text{轴上的点}\ (0, y).$$

这些点构成空间 R^2_{xy} 中的一个闭集. 此时确定在 Ω 上的方程形式为

$$\begin{cases}\dot{x}=0\\ \dot{y}=-g(x),\end{cases}\quad \text{或}\quad \begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=0.\end{cases}$$

因此包含在 Ω 中的最大不变集就只有一点 $(0,0)$. 根据定理3.6知(3.37)的解逼近于原点. 即

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=0,\ \lim_{t\to\infty}\dot{x}(t)=0.$$

第十四章　在控制理论中的应用

§1. 问题的提出

自动调节系统在现代工业中所起的重要作用是众所周知的。关于这些系统的稳定性理论在苏联已经得到了很大的发展。以 A. И. 鲁里叶[1]为其创始者，另外，A. M. 列托夫，И. Г. 马尔金，B. A. 雅可柏维奇等也作了很重要的工作。A. M. 列托夫[2]对这方面的工作已进行了很好的总结。看来，李雅普诺夫函数方法是研究自动调节系统的最有效的方法之一。

现代自动调节系统大都是非常复杂的包含有调节对象和调节器的电气机械装置，调节器的功能在于使调节对象连续地保持某一定态，或者是使它保持某一按给定规律而变化着的状态。因此，调节过程就意味着，应用调节器来防止调节对象由于其工作的任何破坏而引起的脱离上述状态的偏离。

对应于每一自动调节系统，有一个确定的微分方程组：

$$\frac{dx_S}{dt} = X_S(x_1, \cdots, x_n) \qquad (S = 1, 2, \cdots, n), \qquad (1.1)$$

式中 $x_1, \cdots, x_n$ 是描述系统状态的变量；而 X_k 是这些变量的已知函数。它们定义于变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的空间(称为相空间，以 E_n 表示)中某一固定的区域 G 内。显然，要求 X_k 满足一定的条件，以保证解的存在性、唯一性以及解对初值的连续依赖性等等。令

$$x_k = x_k(t; x_{10}, \cdots, x_{n0}) \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \qquad (1.2)$$

表示方程 (1.1) 当 $t = 0$ 时，$x_k(0) = x_{k0}$ 的解。由于以上的假定，该解对于一切值 $t > 0$ 是存在的，且是唯一的。

描述这种系统的定态过程的是方程 (1.1) 的所谓驻定解，这

些解

$$x_1 = x_1^*, \cdots, x_n = x_n^* \tag{1.3}$$

是方程

$$X_k(x_1, \cdots, x_n) = 0 \quad (k = 1, \cdots, n) \tag{1.4}$$

的解。

它们包含于解族(1.2)之中，且为初始条件 $x_{10} = x_1^*, \cdots, x_{n0} = x_n^*$ 所决定。

通常是研究这样的情形：只有一个解(1.3)与调节系统的某一完全确定的定态过程相对应。

自动调节理论的基本问题之一是讨论：一个驻定解(1.3)是否对应于某一物理上可能的定态过程，只要研究解(1.3)的稳定性，这个问题就可以得到解决。事实上，稳定解(1.3)是对应于物理上可能的定态，而不稳定解(1.3)则对应于物理上不可能的定态。

讨论稳定性问题时，一般先将方程(1.1)通过变换

$$x_k = x_k^* + y_k \quad (k = 1, \cdots, n), \tag{1.5}$$

化为扰动运动方程

$$\frac{dy_k}{dt} = Y_k(y_1, \cdots, y_n) \quad (k = 1, \cdots, n). \tag{1.6}$$

这里

$$Y_k(y_1, \cdots, y_n) = X_k(x_1^* + y_1, \cdots, x_n^* + y_n) \tag{1.7}$$
$$(k = 1, 2, \cdots, n),$$

显然方程(1.1)的驻定解(1.3)对应于方程(1.6)的平凡解(即调节系统的未被扰动运动)：

$$y_1^* = 0, \cdots, y_n^* = 0. \tag{1.8}$$

具有初始扰动 $y_{10}, \cdots, y_{n0}$(其中至少有一个不为零)的方程(1.6)的解

$$y_k = y_k(y_{10}, \cdots, y_{n0}; t) \quad (k = 1, \cdots, n), \tag{1.9}$$

称为自动调节系统的扰动运动.

如果我们知道所有的解(1.9)，则未被扰动运动的稳定性问

题当然可以得到解决．但是在通常的情况下，这是一个难以实现的事实，因此需要进行这样的定性研究．即不需要求出解(1.9)，而利用李雅普诺夫函数的方法，就可以对我们所感兴趣的扰动运动之性质作出结论，指出合理的构造调节器的方法．这也说明了李雅普诺夫函数方法在现代技术的重要问题上具有很大的实际意义．

§2. 调节系统的方程

(一) 调节对象的方程

下面所研究的调节对象，它的扰动运动方程是由线性微分方程

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{m} b_{k\alpha}\eta_\alpha \quad (k = 1, \cdots, m) \tag{2.1}$$

所描述的，式中 η_k 为广义坐标，而 $b_{k\alpha}$ 为调节对象的常参量．

今设想调节对象(2.1)受到控制机件的作用，令 μ 记控制机件的坐标；而 n_k 记控制机件的常参量．它表示了控制机件对坐标 η_k 所起作用的程度．这时，调节系统的扰动运动方程为

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{m} b_{k\alpha}\eta_\alpha + n_k\mu \quad (k = 1, \cdots, m). \tag{2.2}$$

(二) 执行机件的方程

每一执行机件将解释为具有一个自由度的机械(电气机械)系统．而描述该机件的扰动运动方程为

$$V^2\ddot{\mu} + W\dot{\mu} + S\mu = f^*(\sigma), \tag{2.3}$$

式中 S, W, V^2 一般是变量 μ, $\dot{\mu}$, σ 的已知函数．

在某些执行机件中，量 S, V^2 可认为是常量；其中 S 表征所谓控制机件的负荷反应，而 V^2 表征控制机件与执行机件的联合惯量．

在个别情况下，执行机件是一个由不可压缩液体供给的普通液压机，则宜于考虑 $S \approx V^2 \approx 0$．这时函数

$$\dot{\mu} = \frac{1}{W} f^*(\sigma) = f(\sigma). \tag{2.4}$$

就表征控制机件的挡板从一位置至另一位置的速度与自变量 σ 之间的关系。 在每一调节系统中，自变量 σ 表示公共的（总和的)控制脉冲信号，它是按问题中所采用的控制规律而形成的.

自变量 σ 通常具有如下的表达式

$$\sigma = \sum_{\alpha=1}^{m} p_\alpha \eta_\alpha - r\mu, \tag{2.5}$$

其中 p_α 及 r 是调节器的常数.

在每一个个别问题中，都不可能严格地确定函数 $f(\sigma)$. 这是因为，在每一个别情形中，函数 $f(\sigma)$ 都是借助于实验记录执行机件的速度而得出的，而每一个这样的实验又都是在一特定不变的负荷下来进行的，因此，函数 $f(\sigma)$ 与该负荷有关. 但是当执行机件实际工作时，作用负荷会发生连续的变动，这就使得在静态实验中所得出的函数 $f(\sigma)$ 大大的不真实. 此外，由于其它事先难以预料到而无法加以消除的因素，也能使函数 $f(\sigma)$ 发生变形. 其中常见的因素是来自外界供给调节器的能源的位能变动.

由于以上原因，我们将要研究的函数 $f(\sigma)$ 将属于这样一种类型，即要满足下面条件:

$$\sigma f(\sigma) > 0, \text{当 } \sigma \neq 0 \text{ 时}; \; f(0) = 0, \tag{2.6}$$

具有这样性质的函数类，包括了很多应用于现代技术上的执行机件之特性.

以后我们可以看到，$f(\sigma)$ 只要满足条件 (2.6)，就可以用李雅普诺夫直接法求出上述调节系统的稳定性的充分条件.

附带说明，方程 (2.3) 是执行机件的十分简略的方程，但是，在许多重要的实际情形中，它还能正确地反映出它们的基本物理性能，因而可以用于理论上的研究.

最后，带有一个控制机件的调节系统的扰动运动的总体方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{m} b_{k\alpha}\eta_\alpha + n_k\mu \quad (k = 1, \cdots, m), \\
&V^2\ddot{\mu} + W\dot{\mu} + S\mu = f^*(\sigma), \\
&\sigma = \sum_{\alpha=1}^{m} p_\alpha\eta_\alpha - r\mu.
\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

它对于变量 η_α, μ 的任何值都有定义，只要这些值能使扰动运动方程保持其物理意义。

（三）调节系统方程组的范式

为了讨论问题方便起见，首先，将总体方程 (2.7) 化为范式。

引入由等式

$$\xi = p\dot{\mu} + q\mu \tag{2.8}$$

所确定的新变量 ξ，式中 p, q 为待定的常量，微分 ξ，得到：

$$\dot{\xi} = p\ddot{\mu} + q\dot{\mu}, \tag{2.9}$$

关系式 (2.8), (2.9) 允许用 μ, ξ, $\dot{\xi}$ 来表达 $\dot{\mu}$, $\ddot{\mu}$. 将它们代入 (2.7) 中的第二个方程(即执行机件方程)，该方程就可写成

$$\frac{V^2}{p}\dot{\xi} + \frac{1}{p}\left(W - \frac{q}{p}V^2\right)\xi + \left[S - W\frac{q}{p} + V^2\left(\frac{q}{p}\right)^2\right]\mu = f^*(\sigma). \tag{2.10}$$

若选定比数 $\frac{q}{p}$ 为方程

$$V^2\left(\frac{q}{p}\right)^2 - W\left(\frac{q}{p}\right) + S = 0 \tag{2.11}$$

的根，则引用记号

$$\left(\frac{q}{p}\right)_1 = \rho_{m+1},$$

$$\left(\frac{q}{p}\right)_2 = \frac{S}{V^2}\frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)_1} = \frac{1}{V^2}\left[W - \left(\frac{q}{p}\right)_1 V^2\right] = \rho_{m+2} \tag{2.12}$$

后，我们有形如

$$\dot{\mu} = -\rho_{m+1}\mu + \frac{1}{p}\xi,$$

$$\dot{\xi} = -\rho_{m+2}\xi + \frac{p}{V^2}f^*(\sigma)$$

的两个一阶方程，用以代替原来的一个二阶方程．因为 S，W，V^2 是正数，故有

$$\mathrm{Re}\rho_{m+1} > 0,\quad \mathrm{Re}\rho_{m+2} > 0. \tag{2.13}$$

最后令

$$\left.\begin{array}{l}\mu = \eta_{m+1},\ n_k = b_{k,m+1},\quad b_{m+1,k} = 0\ \ (k = 1, \cdots, m),\\ b_{m+1,m+1} = -\rho_{m+1},\ h_k = 0\quad (k = 1, \cdots, m),\\ h_{m+1} = \dfrac{1}{p},\ \dfrac{p}{V^2}f^*(\sigma) = f(\sigma),\\ m + 1 = n,\ p_{m+1} = -r.\end{array}\right\} \tag{2.14}$$

通常可化方程 (2.7) 为范式：

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\eta}_k = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\eta_\alpha + h_k\xi\quad (k = 1, \cdots, n),\\ \dot{\xi} = -\rho_{n+1}\xi + f(\sigma),\\ \sigma = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha\eta_\alpha.\end{array}\right\} \tag{2.15}$$

下面是一些重要的特殊情形，有的情况将在下一节进行详细的讨论．

(1) 设 $S = 0$，则由 (2.11)，$\rho_{m+1} = \dfrac{W}{V^2}$，$\rho_{m+2} = 0$，而方程 (2.15) 为：

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\eta}_k = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\eta_\alpha + h_k\xi\quad (k = 1, \cdots, n),\\ \dot{\xi} = f(\sigma),\\ \sigma = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha\eta_\alpha.\end{array}\right\} \tag{2.16}$$

(2) 设 $V^2 = 0$，这时由 (2.11) 得 $\rho_{m+1} = \dfrac{S}{W}$，$\rho_{m+2} = \infty$，这时，先将方程 (2.15) 写成

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{\eta}_k &= \sum_{\alpha=1}^{m} b_{k\alpha}\eta_\alpha + n_k\mu \quad (k=1,\cdots,m),\\
\dot{\mu} &= -\rho_{m+1}\mu + \frac{1}{p}\xi,\\
\dot{\xi} &= -\rho_{m+2}\xi + f(\sigma),\\
\sigma &= \sum_{\alpha=1}^{m} p_\alpha\eta_\alpha + p_{m+1}\mu.
\end{aligned}\right\} \tag{2.15$'$}
$$

现在在 (2.15)′ 式中第三式的两端都乘以 $\frac{1}{\rho_{m+2}}$，则得

$$
0 = -\xi + \frac{1}{\rho_{m+2}} f(\sigma),
$$

但因

$$
\frac{1}{\rho_{m+2}} = \frac{V^2}{S},\ \rho_{m+1} = \frac{V^2}{S}\frac{S}{W},\quad f(\sigma) = \frac{p}{V^2} f^*(\sigma),
$$

故

$$
\frac{1}{\rho_{m+2}} f(\sigma) = \frac{V^2}{S}, \frac{S}{W}\frac{p}{V^2} f^*(\sigma) = \frac{p}{W} f^*(\sigma) = pf(\sigma),
$$

所以 (2.15)′ 的第三式为 $\xi = pf(\sigma)$. 这时，方程 (2.15)′ 可以写成

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{\eta}_k &= \sum_{\alpha=1}^{m} b_{k\alpha}\eta_\alpha + n_k\mu \quad (k=1,\cdots,m),\\
\dot{\mu} &= -\rho_{m+1}\mu + f(\sigma),\\
\sigma &= \sum_{\alpha=1}^{m} p_\alpha\eta_\alpha + p_{m+1}\mu.
\end{aligned}\right\} \tag{2.17}
$$

(3) 设 $S = V^2 = 0$，这时，由 (2.11) 得 $\rho_{m+1} = 0$, $\rho_{m+2} = \infty$，而方程 (2.15) 为

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{\eta}_k &= \sum_{\alpha=1}^{m} b_{k\alpha}\eta_\alpha + n_k\mu \quad (k=1,\cdots,m),\\
\dot{\mu} &= f(\sigma),\\
\sigma &= \sum_{\alpha=1}^{m} p_\alpha\eta_\alpha + p_{m+1}\mu.
\end{aligned}\right\} \tag{2.18}
$$

A. И. 鲁里叶首先研究的是方程 (2.18)，随后又着手研究调

节系统的更为普遍的范式方程，即是：

$$\left.\begin{aligned}\dot{\eta}_k &= \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\eta_\alpha + h_k f(\sigma) \quad (k = 1, \cdots, n).\\ \sigma &= \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \eta_\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

其中 h_k 是给定的常数. 方程的这一形式非常宜于用来进行某些普遍性的讨论，并且它符合某些实际存在但本质上又异于以上所曾论及过的调节系统.

§3. 间接调节系统李雅普诺夫函数的作法

（一）我们研究间接调节系统，即方程组 (2.18)，其向量写法为：

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{y}} &= A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}\xi,\\ \dot{\xi} &= f(\sigma),\\ \sigma &= \boldsymbol{c}'\boldsymbol{y} - \rho\xi.\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

这里 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}$ 是 n 维列向量，A 是 $n \times n$ 的平方矩阵，ξ, σ, ρ 是纯量，$\boldsymbol{c}'$ 是 n 维的行向量，$f(\sigma)$ 满足条件 (2.6)，即

$$\sigma f(\sigma) > 0, \ \text{当} \sigma \neq 0 \ \text{时}, \ f(0) = 0. \tag{3.2}$$

变换

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}\xi,\\ \sigma &= \boldsymbol{c}'\boldsymbol{y} - \rho\xi.\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

将系统 (3.1) 化到系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}f(\sigma),\\ \dot{\sigma} &= \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} - \rho f(\sigma).\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

由变换 (3.3) 得出：如果 $\boldsymbol{y}$ 及 $\xi \to 0$，则 $\boldsymbol{x}, \sigma \to 0$，反之，我们希望由 $\boldsymbol{x}, \sigma \to 0$ 能够得出 $\boldsymbol{y}, \xi \to 0$，这样就可以保证系统 (3.1) 及 (3.4) 的稳定性问题是等价的. 为了达到以上目的，变换 (3.3) 应该可以由 $\boldsymbol{x}, \sigma$ 唯一地解出 $\boldsymbol{y}, \xi$. 而 (3.3) 式是含有 $n+1$ 个未知量的 $n+1$ 个一次方程组，故其系数的矩阵应该是非奇异的，换句

话说，矩阵

$$\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}' & -\rho \end{pmatrix}$$

的行列式必须异于零.

假定 A 是非奇异的，故 A^{-1} 也是非奇异的，因此矩阵

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

也是非奇异的.

故

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}' & -\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & A^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}' & -\rho \end{pmatrix}$$

也是非奇异的. 计算其行列式，我们得到

$$\rho + \boldsymbol{c}'A^{-1}\boldsymbol{b} \neq 0. \tag{3.5}$$

这是一个加在控制参数（向量 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 及纯量 ρ）上的，使变换 (3.3) 为非奇异变换的条件. 以后，我们假设它总能满足，这样，我们就可以自由地运用非奇异变换 (3.3).

我们提出这样的问题：在任意初始扰动以及在函数 $f(\sigma)$ 任意选取（$f(\sigma)$ 满足条件 (3.2)）的情况下，来寻找系统的渐近稳定性的条件. 现在所指的这种类型的稳定性称为绝对稳定性.

注 1. 实正方矩阵 A，如果其特征方程的根均具有负实部，那末我们就称矩阵 A 为稳定的. 实际上，这暗示了这样的事实：系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ 渐近稳定的充分必要条件为，A 是稳定的（在上面所指的意义下）.

以后，我们将处处假设矩阵 A 的全部特征根有非正的实部. 这个要求是由下面的原因所引起，如果取线性特性的 $f(\sigma) = \varepsilon\sigma$ ($\varepsilon > 0$) 作为 $f(\sigma)$，则系统 (3.4) 右端的矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b}\varepsilon \\ \boldsymbol{c}' & -\rho\varepsilon \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

并且渐近稳定性要求这个矩阵是稳定的. 如果 $\varepsilon = 0$，(3.6) 的特征方程的特征根为多项式

$$\begin{vmatrix} A-\lambda I & 0 \\ c' & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(A-\lambda I) = 0$$

之根，即零根及矩阵 A 的特征根．由此看出，在 ε 很小的情况下，矩阵 (3.6) 的特征根之一是一个很小的量，而这个矩阵的其它的特征根很小地异于矩阵 A 的特征根．如果矩阵 A 的特征根具有正实部，则当 ε 很小时，(3.6) 的根也具有正实部，故系统 (3.4) 在 $f(\sigma)=\varepsilon\sigma$ 的情况下为不稳定的；另一方面，如果要求统系 (3.4) 是绝对稳定的，则它在任意 $f(\sigma)$ (只要满足条件 (3.2)，特别是可以取 $f(\sigma)=\varepsilon\sigma$) 的情况下应该是稳定的．因此矩阵 A 的特征根不可能有正的实部．

注 2. 条件 $\Delta=\begin{vmatrix} A & b \\ c' & -\rho \end{vmatrix} \neq 0$ 也保证了系统 (3.4) 不存在另外的奇点 (除零点以外)．事实上，系统 (3.4) 的奇点可由方程组

$$\left.\begin{aligned} A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}f(\sigma)=0, \\ \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}-\rho f(\sigma)=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

找到．但因为由于条件 (3.2)，仅在 $\sigma=0$ 时 $f(\sigma)=0$，则方程组 (3.7) 有唯一解 $\boldsymbol{x}=0$，$\sigma=0$．所以系统 (3.4) 不存在异于零点的奇点．

特别是，如果矩阵 A 是稳定的，即 $\det A\neq 0$，并且条件 (3.2) 及 (3.5) 满足，保证了系统 (3.4) 除零点以外的任何另外的奇点是不存在的．

(二) 我们研究系统 (3.4)，假设矩阵 A 为稳定的，从系统的最简单的例子

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}=-ax+bf(\sigma), \\ \dot{\sigma}=cx-\rho f(\sigma) \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

着手研究．这里 x, σ, c, a, b, ρ 是纯量，$a>0$．对于系统 (3.8)，我们找到形如

$$V=\alpha x^2+\int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma, \quad \alpha>0$$

的李雅普诺夫函数．由此得出

$$\dot{V} = -2\alpha a x^2 + 2df(\sigma)x - \rho f^2(\sigma),$$

这里 $d = \alpha b + \frac{1}{2}c$．函数 $\dot{V}$ 为负定的条件为 $\rho > 0$ 及

$$\begin{vmatrix} -2\alpha a & d \\ d & -\rho \end{vmatrix} = 2a\alpha\rho - d^2 > 0,$$

即

$$\left(\alpha b + \frac{c}{2}\right)^2 - 2\alpha a\rho < 0. \tag{3.9}$$

令

$$g(\alpha) = \left(\alpha b + \frac{c}{2}\right)^2 - 2\alpha a\rho = \alpha^2 b^2 + \alpha(bc - 2a\rho) + \frac{c^2}{4}.$$

这样 (3.9) 可以写成 $g(\alpha) < 0$．由于当 $\alpha = 0$ 时，$g(\alpha) > 0$，当 α 足够大时，也有 $g(\alpha) > 0$．所以如果有两个正实根 α_1，α_2($0 < \alpha_1 < \alpha_2$) 使得 $g(\alpha_1) = 0$，$g(\alpha_2) = 0$，则当 $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ 时，必有 $g(\alpha) < 0$．不难算出，$g(\alpha) = 0$ 有两个相异正实根的充分必要条件为 $bc < a\rho$，并且

$$\alpha_1 = \frac{-(bc - 2a\rho) - \sqrt{(bc - 2a\rho)^2 - b^2c^2}}{2b^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{-(bc - 2a\rho) + \sqrt{(bc - 2a\rho)^2 - b^2c^2}}{2b^2}.$$

我们只要取 α 满足 $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$，则得出 V 是正定的，$\frac{dV}{dt}$ 是负定的；如果 V 具有无限大的性质（或者方程 (3.8) 的每个解都是有界的），则在任意初始扰动以及在函数 $f(\sigma)$ 任意选取（$f(\sigma)$ 满足条件 (3.2) 的情况下，系统 (3.8) 的零解是渐近稳定的．

现在转到一般情形的研究，即对系统 (3.4) 进行研究．

A. И. 鲁里叶首先对系统 (3.4) 引进如下的李雅普诺夫函数

$$V(\boldsymbol{x}, \sigma) = \boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x} + \int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma, \tag{3.10}$$

这里 $B > 0$，$B' = B$．这是在整个 ($\boldsymbol{x}$, σ) 空间内的正定函数 $V(0, 0) = 0$．并且函数 V 及其一次偏导数在全空间是连续的．此外，V 是二项的和：对所有 $\boldsymbol{x} \neq 0$，第一项为正；对所有 $\sigma \neq 0$，第

二项为正．因此其和仅在 $\boldsymbol{x}=0,\sigma=0$ 时为零，其它都是正的．

函数 V 的由于系统 (3.4) 所取的导数为

$$\dot V(\boldsymbol{x},\sigma)=\dot{\boldsymbol{x}}'B\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'B\dot{\boldsymbol{x}}+f(\sigma)\dot\sigma=\boldsymbol{x}'(A'B+BA)\boldsymbol{x}$$
$$+(\boldsymbol{b}'B\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x})f(\sigma)-\rho f^2(\sigma).$$

我们给定对称正矩阵 C（即其所有特征根为正的矩阵），来找出满足

$$A'B+BA=-C \tag{3.11}$$

的对称矩阵 B，按照第二篇第四章定理 2.2，方程(3.11)的解存在，并且矩阵 B 也是正的．

注意到关系式

$$\boldsymbol{b}'B\boldsymbol{x}=(B\boldsymbol{b})'\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}'B\boldsymbol{b}=(B\boldsymbol{b})'\boldsymbol{x},$$

最后，我们得到

$$\dot V(\boldsymbol{x},\sigma)=-\boldsymbol{x}'C\boldsymbol{x}+2f(\sigma)\boldsymbol{d}'\boldsymbol{x}-\rho f^2(\sigma), \tag{3.12}$$

这里 $\boldsymbol{d}=B\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}'}{2}$.

显然，有

$$-\dot V(\boldsymbol{x},\sigma)=(\boldsymbol{x}'-f(\sigma)\boldsymbol{d}'C^{-1})C(\boldsymbol{x}-f(\sigma)C^{-1}\boldsymbol{d})$$
$$+(\rho-\boldsymbol{d}'C^{-1}\boldsymbol{d})f^2(\sigma),$$

因为矩阵 C 是正的，则

$$(\boldsymbol{x}'-f(\sigma)\boldsymbol{d}'C^{-1})C(\boldsymbol{x}-f(\sigma)C^{-1}\boldsymbol{d})$$
$$=(\boldsymbol{x}-f(\sigma)C^{-1}\boldsymbol{d})'C(\boldsymbol{x}-f(\sigma)C^{-1}\boldsymbol{d})$$

是关于向量 $\boldsymbol{x}-f(\sigma)C^{-1}\boldsymbol{d}$ 投影的正定二次型，因此条件 $\rho>\boldsymbol{d}'C^{-1}\boldsymbol{d}$ 是 $-\dot V(\boldsymbol{x},\sigma)$ 作为变量 $x_1,\cdots,x_n$ 及 $f(\sigma)$ 的二次型的正定性的充分条件．

关于 $\dot V=-\boldsymbol{x}'C\boldsymbol{x}-\rho f^2(\sigma)+2f(\sigma)\left(B\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right)'\boldsymbol{x}$ 负定性的讨论，也可以采用下面的方法：$\dot V$ 为 $\boldsymbol{x},f(\sigma)$ 的二次型，为了对所有的 $\boldsymbol{x},f(\sigma)$ 有 $-\dot V>0$，如所周知，必须满足 $(n+1)$ 个薛尔维斯特尔不等式，因为 $C>0$，所以前 n 个不等式已经满足，剩下最后一个不等式为

$$\begin{vmatrix} C & -\left(B\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right) \\ -\left(B\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right)' & \rho \end{vmatrix} > 0, \tag{3.13}$$

这就是对所有 $\boldsymbol{x}$, $f(\sigma) \neq 0$ 时, $-\dot{V} > 0$ 的充分必要条件. 因为 $\boldsymbol{C}$ 为正定, 故 C^{-1} 也是正定的, 所以矩阵

$$\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的行列式为正. 因此二个矩阵之积

$$\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & -\left(B\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right) \\ -\left(B\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right)' & \rho \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} E & -C^{-1}\left(B\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right) \\ -\left(B\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right)' & \rho \end{pmatrix}$$

的行列式除去一个正因子外与 (3.13) 相同, (3.13) 等价于

$$\rho > \left(B\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right)' C^{-1}\left(B\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right). \tag{3.14}$$

例: 考虑

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -D\boldsymbol{x} + f(\sigma)\boldsymbol{b},$$
$$\dot{\sigma} = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} - \rho f(\sigma),$$

这里 $D = \mathrm{diag}\,(\mu_1, \cdots, \mu_n)$, $\mu_i \neq \mu_j$, 当 $i \neq j$, $\mu_i > 0$ ($i = 1, \cdots, n$), 现在选取 $C = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$, 这里每个 $d_h > 0$. 由 $A'B + BA = -C$ 得出

$$B = \mathrm{diag}\left(\frac{d_1}{2\mu_1}, \cdots, \frac{d_n}{2\mu_n}\right),$$

$$C^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \cdots, \frac{1}{d_n}\right),$$

$$(B\boldsymbol{b})' = \frac{1}{2}\left(\frac{b_1 d_1}{\mu_1}, \cdots, \frac{b_n d_n}{\mu_n}\right),$$

因此, 不等式 (3.14) 为

$$\rho > \Sigma \frac{1}{4d_k}\left(\frac{b_k d_k}{\mu_k} + c_k\right)^2$$

$$= \Sigma \frac{1}{4}\left(\frac{b_k e_k}{\mu_k} + \frac{c_k}{e_k}\right)^2, \quad e_k = \sqrt{d_k} > 0.$$

令 $\Phi = \Sigma \frac{1}{4}\left(\frac{b_k e_k}{\mu_k} + \frac{c_k}{e_k}\right)^2$，我们找出其极小值，显然每个括号平方取最小值时 Φ 为极小. 首先假设 b_k, c_k 同号，我们不妨假设 b_k, $c_k > 0$ 不难算出，当 $e_k^2 = \mu_k c_k / b_k$ 时，$\left(\frac{b_k e_k}{\mu_k} + \frac{c_k}{e_k}\right)^2$ 为极小. 当 $b_k c_k < 0$ 时，括号平方最小值为零，因此

$$\rho > \Sigma \frac{\varepsilon_k b_k c_k}{\mu_k},$$

这里 $\varepsilon_k = 1$，当 $b_k c_k > 0$ 时；其它情况 $\varepsilon_k = 0$. 这样，在这种简单情况下，给出了 ρ 值的一个下界.

现在我们来证明下面的定理：

定理 3.1：如果矩阵 A 是稳定的，而量 ρ 满足条件 (3.14)，则系统 (3.4) 的零解是绝对稳定的.

首先，我们证明不等式

$$\rho + \mathbf{c}' A^{-1} \mathbf{b} > 0 \tag{3.15}$$

成立. 如果有不等式

$$-\mathbf{c}' A^{-1} \mathbf{b} < \mathbf{d}' C^{-1} \mathbf{d}, \tag{3.16}$$

那末，显然 (3.15) 式成立，下面我们用反证法，假设 (3.16) 不成立，即 $-\mathbf{c}' A^{-1} \mathbf{b} > \mathbf{d}' C^{-1} \mathbf{d}$，我们可以取 $\rho^* = -\mathbf{c}' A^{-1} \mathbf{b}$，这时

$$\left.\begin{aligned} A\boldsymbol{x} + \mathbf{b} f(\sigma) = 0, \\ \mathbf{c}'\boldsymbol{x} - \rho^* f(\sigma) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

的系数行列式为零. 故方程组 (3.17) 有非零解 $x = \boldsymbol{x}_0^*$, $\sigma = \sigma_0^*$. 而

$$-\frac{dV}{dt} = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}(A\boldsymbol{x} + \mathbf{b} f(\sigma)) + \frac{\partial V}{\partial \sigma}(\mathbf{c}'\boldsymbol{x} - \rho^* f(\sigma))\right],$$

故在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0^*$, $\sigma = \sigma_0^*$ 时，$\dot{V}$ 为零. 但是另一方面，由于 $\rho^* > \mathbf{d}' C^{-1} \mathbf{d}$，故 $-\dot{V}$ 为正定，由此得出矛盾，故由不等式 (3.14) 可以推出不等式 (3.15). 在上节注 2 中已经指出，在不等式 (3.15) 成

立的情况下(这里已假定了 A 是稳定的),系统(3.4)有唯一的奇点 $\boldsymbol{x}=0, \sigma=0$.

B. A. 雅可柏维奇[3]第一个指出，在证明系统(3.4)的平凡解的全局稳定性时,可以去掉 V 为无限大$\left(\text{即}\int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma\to\infty,\ \text{当}|\sigma|\to\infty\text{时}\right)$的这个条件,这里他证明了系统(3.4)的每一条正半轨线都是有界的. 借助于第一篇第一章定理 3.6，得出了全局稳定性的结论.

研究区域

$$V<l,\ |\sigma-\mathbf{c}'A^{-1}\boldsymbol{x}|<N. \tag{3.18}$$

显然,这个区域是有界的,因为从第一个不等式得出 $\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x}<l$, 即关于 $\boldsymbol{x}$ 的有界性,而从第二个不等式得出 σ 的有界性.

如果 $P(\boldsymbol{x}_0, \sigma_0)$ 是相空间的任意一点，那末取 l 及 N 足够大，使得点 $P(\boldsymbol{x}_0, \sigma_0)$ 位于区域(3.18)内，下面我们证明，从点 P 引出的系统(3.4)的轨线,当 $t>0$ 时,不从区域(3.18)内引出.

事实上，因为 $\dot{V}$ 为负定的，故(3.18)的第一个不等式不能破坏，由方程(3.4)我们得到

$$\frac{d}{dt}(\sigma-\mathbf{c}'A^{-1}\boldsymbol{x})=-(\rho+\mathbf{c}'A^{-1}\boldsymbol{b})f(\sigma). \tag{3.19}$$

由此得出,轨线不能通过区域(3.18)边界的平面部分

$$\sigma-\mathbf{c}'A^{-1}\boldsymbol{x}=N.$$

这是因为，当 N 足够大时，有 $\sigma>0$, 及 $f(\sigma)>0$, 而由(3.19)得出: $\sigma\dfrac{d}{dt}(\sigma-\mathbf{c}'A^{-1}\boldsymbol{x})<0$, 故(3.4)的积分曲线在区域边界的这个平面部分不能由内向外. 同样可证明积分曲线在区域边界的平面部分 $\sigma-\mathbf{c}'A^{-1}\boldsymbol{x}=-N$ 上也不能由内向外. 这样,利用第一篇第一章定理 3.6 得出系统(3.4)零解的全局稳定性.

(三) 现在研究系统(3.4)

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}&=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}f(\sigma),\\ \dot{\sigma}&=\mathbf{c}'\boldsymbol{x}-\rho f(\sigma)\end{aligned}\right\}$$

中矩阵 A 有一个零特征根的情形. 一定可以选取适当的坐标系

统，使得系统 (3.4) 可以化为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(\sigma)\boldsymbol{b}, \\ \dot{\eta} &= \alpha f(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + 2\varepsilon\eta - \rho f(\sigma).\end{aligned}\right\} \quad (3.20)$$

这里 A 是稳定的 $n\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是 n 维向量，$\eta, \alpha, \sigma, \rho, \varepsilon$ 是纯量。为此，我们先考虑线性系统

$$\frac{dx_j}{dt} = a_{j1}x_1 + \cdots + a_{j,n+1}x_{n+1} \quad (j = 1, \cdots, n+1), \quad (3.21)$$

其特征方程有一个零根，而其余的 n 个根都具有负的实部。

在方程 (3.21) 中，借助下面的变换式以 y 来代替变数 x_s 中之一：

$$y = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_{n+1}x_{n+1}.$$

其中 b_j 是常量，它们可以这样的选择，使得变换后的方程具有下面的形式

$$\frac{dy}{dt} = 0.$$

因此，我们应该得到恒等式

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{j=1}^{n+1} b_j\frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n+1} b_j(a_{j1}x_1 + \cdots + a_{j,n+1}x_{n+1}) = 0.$$

让 x_k 的系数等于零，我们就得到下面一组齐次代数方程：

$$a_{1k}b_1 + a_{2k}b_2 + \cdots + a_{n+1,k}b_{n+1} = 0$$
$$(k = 1, 2, \cdots, n+1), \quad (3.22)$$

因为方程 (3.21) 的特征方程有一个等于零的根，故方程组 (3.22) 的行列式也等于零，因之它有对 b_j 的解，并且这些常数不全为零。为了确定起见，假设 $b_{n+1} \neq 0$。我们就可以用 y 来代替变量 x_{n+1}，其余的 x_i 保持不变，我们以 y_i 表示之。用变换式

$$\left.\begin{aligned} y &= b_1x_1 + \cdots + b_nx_n + b_{n+1}x_{n+1}, \\ y_i &= x_i \end{aligned}\right\} \quad (3.23)$$

来变换方程 (3.21) 后，得到

$$\frac{dy}{dt} = 0,$$

$$
\frac{dy_s}{dt}=\frac{dx_s}{dt}=a_{s1}x_1+\cdots+a_{sn+1}x_{n+1}
$$

$$
=a_{s1}y_1+\cdots+a_{sn+1}y_{n+1}+\frac{a_{sn+1}}{b_{n+1}}
$$

$$
\times(y-b_1y_1-\cdots-b_ny_n)=\left(a_{s1}-\frac{a_{sn+1}}{b_{n+1}}b_1\right)y_1
$$

$$
+\cdots+\left(a_{sn}-\frac{a_{sn+1}}{b_{n+1}}b_n\right)y_n+\frac{a_{sn+1}}{b_{n+1}}y,
$$

即

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{dy}{dt}=0,\\
&\frac{dy_s}{dt}=a_{s1}^*y_1+\cdots+a_{sn}^*y_n+p_sy.
\end{aligned}\right\}\qquad(3.24)
$$

这里

$$
a_{sk}^*=a_{sk}-\frac{1}{a_{n+1}}a_{s,n+1}b_k,
$$

$$
p_s=\frac{1}{b_{n+1}}a_{sn+1}\qquad(s,k=1,2,\cdots,n).
$$

方程组 (3.24) 的特征方程具有下面的形式

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}^*-\lambda & a_{12}^* & \cdots & a_{1n}^* & p_1\\
a_{21}^* & a_{22}^*-\lambda & \cdots & a_{2n}^* & p_2\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{n1}^* & a_{n2}^* & \cdots & a_{nn}^*-\lambda & p_n\\
0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda
\end{vmatrix}=0,
$$

分解为方程 $\lambda=0$ 及

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}^*-\lambda & a_{12}^* & \cdots & a_{1n}^*\\
a_{21}^* & a_{22}^*-\lambda & \cdots & a_{2n}^*\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{n1}^* & a_{n2}^* & \cdots & a_{nn}^*-\lambda
\end{vmatrix}=0.\qquad(3.25)
$$

因特征方程对于线性变换是不变的，并且在所论的情形中有 n 个具有负的实部的根，则方程 (3.25) 所有的根都具有负的实部。

下面我们再作出变换，目的是使得相当于方程 (3.24) 中不出现 $p_s y$ 的项。为此，我们从

$$a_{s1}^* y_1 + \cdots + a_{sn}^* y_n + p_s y = 0 \tag{3.26}$$

解出 y_i 为 y 的函数，因为方程 (3.25) 没有零根，故

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ & \cdots\cdots & \\ a_{n1}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{vmatrix} \neq 0.$$

设 $y_1^*, y_2^*, \cdots, y_n^*$ 为 (3.26) 的解，显然

$$y_1^* = \frac{y}{\Delta} \begin{vmatrix} -p_1 & a_{12}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ & \cdots\cdots & & \\ -p_n & a_{n2}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{vmatrix} = q_1 y,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n^* = \frac{y}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11}^* & \cdots & a_{1n-1}^* & -p_1 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1}^* & \cdots & a_{nn-1}^* & -p_n \end{vmatrix} = q_n y.$$

对系统 (3.24) 作变换

$$y = y, \quad y_s = \xi_s + y_s^* \tag{3.27}$$

后，我们得到

$$\frac{dy}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\xi_s}{dt} = \frac{dy_s}{dt} - \frac{dy_s^*}{dt} = a_{s1}^* y_1 + \cdots + a_{sn}^* y_n + p_s y$$

$$= a_{s1}^*(\xi_1 + y_1^*) + \cdots + a_{sn}^*(\xi_n + y_n^*) + p_s y$$

$$= a_{s1}^*\xi_1 + \cdots + a_{sn}^*\xi_n + a_{s1}^* y_1^* + \cdots + a_{sn}^* y_n^* + p_s y$$

$$= a_{s1}^*\xi_1 + \cdots + a_{sn}^*\xi_n.$$

即

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = 0, \\ &\frac{d\xi_s}{dt} = a_{s1}^*\xi_1 + \cdots + a_{sn}^*\xi_n. \end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

故经过变换 (3.23) 及 (3.27) 后，方程 (3.21) 化为 (3.28)，所以

适当选取坐标系统，方程 (3.4) 可以化为方程 (3.20). 显然，二个系统的稳定性问题是等价的.

下面将讨论系统 (3.20)

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + f(\sigma)b, \\ \dot{\eta} &= \alpha f(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + 2\varepsilon\eta - \rho f(\sigma)\end{aligned}\right\}$$

的绝对稳定性问题，这里 A 是稳定的 $n\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是 n 维向量，η, α, σ, ρ, ε 是纯量.

首先指出，不等式 $\alpha\varepsilon < 0$ 是 (3.20) 零解绝对稳定的必要条件，事实上，如果有绝对稳定性，那末在 $f(\sigma) = \nu\sigma(\nu > 0)$ 的情况下，系统 (3.20) 的零解是渐近稳定的. 容易看出，此时对应于线性系统 (3.20) 的系数行列式为

$$-2\nu\varepsilon\alpha \det A.$$

并且这个行列式的正负号应该与 $\det A$ 的正负号相同，因此，应该满足不等式 $\varepsilon\alpha < 0$（这样就保证了所得线性系统特征方程的自由项是正的).

对于系统 (3.20)，我们取李雅普诺夫函数为

$$V = \delta\eta^2 + \boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x} + \int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma, \tag{3.29}$$

这个函数的由于系统 (3.20) 所取的导数为

$$\dot{V} = -\boldsymbol{x}'C\boldsymbol{x} + 2f(\sigma)\boldsymbol{d}'\boldsymbol{x} - \rho f^2(\sigma) + 2(\delta\alpha + \varepsilon)\eta f(\sigma).$$

这里 C 是给定的正定 $n\times n$ 矩阵（即其特征根均为正的矩阵），并且有关系式 (3.11).

如果 $\alpha\varepsilon<0$，则可以用这样的方式选取正数 δ，使得 $\delta\alpha+\varepsilon=0$，利用前面的讨论，如果不等式 (3.14) 成立、那末对于正定的 V，其导数 $\dot{V}$ 在变量 $\boldsymbol{x}$, η, $f(\sigma)$ 空间内是负号的.

$\dot{V}=0$ 的集合是直线 $\boldsymbol{x}=0$、$\sigma=0$. 但因为 $\varepsilon\alpha<0$，则 $\varepsilon\neq 0$. 由此得出，如果在所指直线上有整条轨线，那末从系统 (3.20) 的最后一个方程得出 $\eta=0$，由此得出这样的结论：坐标原点是位于这直线上的唯一的不变集合(即除原点以外，$\dot{V}=0$不

包含系统(3.20)的整条轨线),由于第一篇第一章定理3.6,我们得到下面的结果.

定理3.2: 如果满足不等式 $\alpha\varepsilon < 0$ 及(3.14),并且,除此以外,有 $\int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma \to \infty$,当 $|\sigma| \to \infty$ 时,则系统(3.20)的零解是绝对稳定的.

现在讨论矩阵 A 的特征根有若干个(但不是所有的,例如 r 个)为零的情形[4],这时适当选取坐标,系统(3.4)可化为

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + f(\sigma)\boldsymbol{b}, \\ \dot{\eta} &= f(\sigma)d, \\ \dot{\sigma} &= \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + 2e'\eta - \rho f(\sigma). \end{aligned}\right\} \tag{3.30}$$

这里 A 是稳定的 $n\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是 n 维向量,η, e, d 是 p 维向量,σ, ρ 是纯量.

对系统(3.30)作出李雅普诺夫函数:

$$V(\boldsymbol{x}, \eta, \sigma) = \eta' M\eta + \left\{ \boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x} + \int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma \right\},$$

这里括号内的项如前所述,M 是一个正矩阵,这样 V 在 $(\boldsymbol{x}, \eta, \sigma)$ 的整个空间是正定的,由计算得出

$$-\dot{V} = \left\{ -\boldsymbol{x}'C\boldsymbol{x} - \rho f^2(\sigma) + 2f(\sigma)\left(B\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c} \right)'\boldsymbol{x} \right\}$$

$$+ 2(M\boldsymbol{d} + \boldsymbol{e})'\eta f(\sigma),$$

$$A'B + BA = -C.$$

如果对{···}如前面一样处理,选取(假如可能的话) M, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$ 使得

$$M\boldsymbol{d} + \boldsymbol{e} = 0. \tag{3.31}$$

这样,我们已作出了正定的李雅普诺夫函数 V 有这样的性质,当 $\boldsymbol{x}$, $f(\sigma) \neq 0$ 时,有 $-\dot{V} > 0$,当 $\boldsymbol{x} = f(\sigma) = 0$,$\eta \neq 0$ 时,有 $\dot{V} = 0$.由李雅普诺夫第一定理(即第一篇第一章定理3.1),我们可以得出(3.30)的零解是稳定的. 或者可利用第一篇第一章定理3.7得出渐近性质,定理中的集合 E 相当于 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $\sigma = 0$,假如(3.30)的一个解在 E 内,则

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0},$$

$$\dot{\eta} = 0,$$
$$\dot{\sigma} = 2\boldsymbol{e}'\boldsymbol{\eta}.$$

由此 $\boldsymbol{e}'\boldsymbol{\eta} = 0$，故平面 $x = 0$, $\sigma = 0$, $e'\eta = 0$ 是第一篇第一章定理 3.7 中的集合 M. 当 $t \to \infty$ 时，所有的解都接近于这个平面，这个平面上的每个点是系统(3.30)的平衡位置.

§4. 直接调节系统李雅普诺夫函数的作法

(一) 我们研究直接调节系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}f(\sigma), \\ \sigma &= \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}, \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

这里 A 是稳定的 $n \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{b}$ 是 n 维的列向量，$\boldsymbol{c}'$ 是 n 维的行向量。$f(\sigma)$ 是满足条件

$$f(\sigma)\sigma > 0, \quad 当\ \sigma \neq 0\ 时 \tag{4.2}$$

的连续函数.

对系统 (4.1) 作李雅普诺夫函数

$$V = \boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x} + \beta\int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma. \tag{4.3}$$

这里 $B > 0$,所以在 $\beta > 0$ 的情况下,把 V 作为 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数时, V 为正定的,且是无限大的. 我们的问题在于,借助于矩阵 C 及参数 β 的选取来保证 $\dot{V}$ 的负定性.

不难计算

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{\boldsymbol{x}}'B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}'B\dot{\boldsymbol{x}} + \beta f(\sigma)\frac{d\sigma}{dx}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \\ &= (\boldsymbol{x}'A' + \boldsymbol{b}'f(\sigma))B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}'B(A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}f(\sigma)) \\ &\quad + \beta f(\sigma)\boldsymbol{c}'(A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}f(\sigma)) \\ &= -x'Cx + 2d'xf(\sigma) + \beta C'bf^2(\sigma), \end{aligned} \tag{4.4}$$

这里

$$A'B + BA = -C. \tag{4.5}$$

即给定对称正矩阵 C (所有特征根为正)，根据第二篇第四章定理

2.2，从以上方程可找出正定矩阵 B。(4.4) 式中

$$d = B\mathbf{b} + \beta\frac{A'\mathbf{c}}{2}. \tag{4.6}$$

显然，条件 $\mathbf{c}'\mathbf{b} \leqslant 0$ 是 $\dot{V}$ 常负性的必要条件。但是，如果将函数 (4.4) 考虑作为 $(n+1)$ 个变量 $x_1, \cdots, x_n$ 及 $f(\sigma)$ 的二次型时，在这种情况下，我们不能得出 $\dot{V}$ 的负定性。事实上，根据(4.1)

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \sigma}C'\frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

$$= (2B\mathbf{x} + \beta f(\sigma)\mathbf{c}')(A\mathbf{x} + \mathbf{b}f(\sigma)),$$

由此得出，在

$$A\mathbf{x} + \mathbf{b}f(\sigma) = 0 \tag{4.7}$$

的集合上，$\dot{V}$ 可以取零值。然而在 $n+1$ 个变量 $x_1, \cdots, x_n, y = f(\sigma)$ 的空间内，方程 (4.7) 可以有非平凡解，因此 $\dot{V}$ 不仅在 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$，$y=0$ 上取零值。下面用不同的方法来给出系统 (4.1) 零解绝对稳定性的充分条件。

（二） 假设参数 β 及矩阵 C 这样选取，使其满足条件

$$\mathbf{d}'C^{-1}\mathbf{d} = -\beta C'\mathbf{b}, \tag{4.8}$$

这时，有

$$\dot{V} = -(x - C^{-1}df)'C(x - C^{-1}df). \tag{4.9}$$

我们看出，当 $\dot{V}$ 作为 $n+1$ 个变量 $x_1, \cdots, x_n, f$ 的函数时，$\dot{V} \leqslant 0$。并且它仅在这空间的一维直线 $\mathbf{x} = C^{-1}df$ 上取零值，但我们已知，$\dot{V}$ 在一维直线 $Ax + bf = 0$ 上取零值，因此，在这种情况下，这两条直线应该重合。于是，我们得出结论，$\dot{V}$ 仅在条件 (4.7) 满足的情况下取零值。现在，我们将 σ 考虑作为 $\mathbf{x}$ 的函数，则条件 (4.7) 给出了系统 (4.1) 的平衡位置。如果这样的平衡位置只有一个 $\mathbf{x} = 0$，由于第一篇第一章定理 3.5，我们就得到了这个平衡位置的绝对稳定性。

定理 4.1：如果存在满足条件 $\mathbf{d}'C^{-1}\mathbf{d} = -\beta C'\mathbf{b}$ 的正数 β 及正矩阵 C，并且系统 (4.1) 只有一个零平衡位置，则这个平衡位置是绝对稳定的。

（三）用下面的方式表示 $\dot{V}$，

$$\dot{V} = -S(\boldsymbol{x}, \sigma) - \sigma f(\sigma),$$

这里

$$S(\boldsymbol{x}, \sigma) = \boldsymbol{x}'C\boldsymbol{x} - 2f(\sigma)\left(\boldsymbol{d}' + \frac{\boldsymbol{c}'}{2}\right)\boldsymbol{x} - \beta\boldsymbol{c}'\boldsymbol{b}f^2(\sigma).$$

如果 $S(\boldsymbol{x}, \sigma)$ 作为 $n+1$ 个变量 $x_1, \cdots, x_n, f(\sigma)$ 的二次型是正定函数，则 $\dot{V}$ 是变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的负定函数，保证 $S(\boldsymbol{x}, \sigma)$ 正定的薛尔维斯特尔条件为（因为前 n 个条件自然满足）：

$$\begin{vmatrix} C & -\left(\boldsymbol{d} + \dfrac{\boldsymbol{c}}{2}\right) \\ -\left(\boldsymbol{d} + \dfrac{\boldsymbol{c}}{2}\right)' & -\beta\boldsymbol{c}'\boldsymbol{b} \end{vmatrix} > 0, \tag{4.10}$$

因为 C 是正的，所以 C^{-1} 也是正的．故矩阵

$$\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的行列式为正，因此二个矩阵之积

$$\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & -\left(\boldsymbol{d} + \dfrac{\boldsymbol{c}}{2}\right) \\ -\left(\boldsymbol{d} + \dfrac{\boldsymbol{c}}{2}\right)' & -\beta\boldsymbol{c}'\boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E & -C^{-1}\left(\boldsymbol{d} + \dfrac{\boldsymbol{c}}{2}\right) \\ -\left(\boldsymbol{d} + \dfrac{\boldsymbol{c}}{2}\right)' & -\beta\boldsymbol{c}'\boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

的行列式除去一个正因子外与 (4.10) 相同，因此 (4.10) 等价于

$$-\beta\boldsymbol{c}'\boldsymbol{b} - \left(\boldsymbol{d} + \frac{\boldsymbol{c}}{2}\right)'C^{-1}\left(\boldsymbol{d} + \frac{\boldsymbol{c}}{2}\right) > 0,$$

即

$$-\beta\boldsymbol{c}'\boldsymbol{b} > \left(\boldsymbol{d} + \frac{\boldsymbol{c}}{2}\right)'C^{-1}\left(\boldsymbol{d} + \frac{\boldsymbol{c}}{2}\right). \tag{4.11}$$

这样一来，我们得到了最终的结果．

定理 4.2: 如果可以选取满足条件 (4.11) 的正数 β 及正矩阵 C, 那末系统 (4.1) 的零解是绝对稳定的。

(四) 作为例子, 我们研究一个方程

$$\dot{x} = -ax + bf(\sigma), \tag{4.12}$$

这里 $\sigma = cx$, x, a, b, c 是纯量, $a > 0$.

如果方程 (4.12) 有唯一的平衡位置 $x = 0$, 那末方程 (4.12) 零解的绝对稳定性的充分条件是容易得出的, 由 (4.12), 我们有

$$x\dot{x} = -ax^2 + \frac{b}{c}cxf(cx).$$

取 $V = 2x^2$, 故如果 $bc \leqslant 0$, 总有

$$\frac{dV}{dt} < 0,$$

即得出 $bc \leqslant 0$ 是方程 (4.12) 零解绝对稳定性的充分条件。

用上面所讨论的方法, 也可以得出这个充分条件。

(I) 取李雅普诺夫函数

$$V = \alpha x^2 + \int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma, \tag{4.13}$$

得出

$$\dot{V} = (2\alpha x + f(\sigma)c)(-ax + bf(\sigma)),$$

显然, $\dot{V}$ 不可能是变量 x 及 $f(\sigma)$ 的负定函数。

经过计算后, 得到

$$\dot{V} = -2\alpha ax^2 + 2dxf(\sigma) + bcf^2(\sigma), \tag{4.14}$$

这里

$$d = \alpha b - a\frac{c}{2}. \tag{4.15}$$

当在 (4.14) 中配成完全平方时, (4.14) 可写成

$$\dot{V} = -2\alpha a\left(x - \frac{d}{2\alpha a}f(\sigma)\right)^2 + \left(bc + \frac{d^2}{2\alpha a}\right)f^2(\sigma), \tag{4.16}$$

根据 (二) 中方法我们取 $f^2(\sigma)$ 的前面的系数为 0, 由此, 我们得出确定 α 的方程

$$bc + \frac{\left(\alpha b - a\dfrac{c}{2}\right)^2}{2\alpha a} = 0,$$

或者

$$b^2\alpha^2 + abc\alpha + \frac{a^2c^2}{4} = 0.$$

解后面的方程,得出 $\alpha = -\dfrac{ac}{2b}$, 在 (4.16) 中代入 $\alpha = -\dfrac{ac}{2b}$,我们得到

$$\dot{V} = a^2\frac{c}{b}\left(x - \frac{b}{a}f(\sigma)\right)^2.$$

如果方程 (4.12) 有唯一的平衡位置 $x = 0$, 则当 $bc < 0$ 时,我们得到这个平衡位置的绝对稳定性.

当在方程 (4.12) 中取 $f(\sigma) = \varepsilon\sigma$ 时, 这里 $\varepsilon > 0$, 不难得出 (4.12) 零解绝对稳定性的必要条件为条件 $bc \leqslant 0$.

(2) 用下面的方法表示 $\dot{V}$:

$$\dot{V} = -S(x, \sigma) - \sigma f(\sigma),$$

这里

$$S(x, \sigma) = 2\alpha a x^2 - (2d + c)xf(\sigma) - bcf^2(\sigma),$$

如果函数 $S(x, \sigma)$ 是变量 x 及 $f(\sigma)$ 的正定函数,则 $\dot{V}$ 是 x 的负定函数,函数 $S(x, \sigma)$ 正定性的条件为

$$\alpha a > 0, \ \left(\frac{2d + c}{2}\right)^2 < -2\alpha abc,$$

从后面的不等式得出 $bc < 0$, 利用 (4.15), 我们得到不等式

$$\alpha^2b^2 + \alpha b(a + 1)c + \frac{(a - 1)^2}{4}c^2 < 0. \qquad (4.17)$$

不难看出,因为 $bc < 0$, 方程

$$\Phi(\alpha) = \alpha^2b^2 + \alpha b(a + 1)c + \frac{(a - 1)^2}{4}c^2 = 0$$

总有正实根. 实际上

$$\alpha_{1,2} = \frac{-bc(a + 1) \pm \sqrt{b^2c^2(a + 1)^2 - b^2c^2(a - 1)^2}}{2b^2},$$

故 $\alpha_1 \neq \alpha_2$，不妨取 $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$，那末我们可以这样选取 α：$0 < \alpha_2 < \alpha < \alpha_1$，使得不等式 (4.17) 满足．这样一来，就导致了以前得到的结论，即 $bc < 0$ 是方程 (4.12) 零解绝对稳定性的充分条件．

关于矩阵 A 有零的特征根的情形，也可以借助于作出李雅普诺夫函数的方法，给出系统的绝对稳定性的充分条件（参考 [5]）．

§5. 带两个执行机件的调节系统的稳定性

近代技术给出了许多形形色色的调节系统的实例，它们具有两个或更多的执行机件，因此，期望把鲁里叶以及其他的建立李雅普诺夫函数的方法推广到这类系统上，是完全有根据的．

为了讨论简单起见，将研究方程组 (2.1) 所描述的调节对象，并且假定它们受到两个执行机件的调节器的作用．

怎样用李雅普诺夫函数来研究稳定性问题，我们仅举出下面的例子来加以说明．

研究系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}f_1(\sigma_1) + \boldsymbol{g}f_2(\sigma_2), \\ \dot{\sigma}_1 &= \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} - \rho_{11}f_1(\sigma_1) - \rho_{12}f_2(\sigma_2), \\ \dot{\sigma}_2 &= \boldsymbol{d}'\boldsymbol{x} - \rho_{21}f_1(\sigma_1) - \rho_{22}f_2(\sigma_2), \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

这里 A 是 $n \times n$ 的方阵，b，g，x 是 n 维的列向量，$\boldsymbol{c}'$，$\boldsymbol{d}'$ 是 n 维的行向量，σ_1，σ_2，ρ_{ik} 是纯量．当假定 A 是稳定时，对于给定的正定矩阵 C，找出满足 (3.11) 的矩阵 B，对于这种情况，李雅普诺夫函数为

$$V = \boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x} + \int_0^{\sigma_1} f_1(\sigma_1)d\sigma_1 + \int_0^{\sigma_2} f_2(\sigma_2)d\sigma_2, \tag{5.2}$$

不难计算

$$\begin{aligned} \dot{V} = &-\boldsymbol{x}'C\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{x}f_1(\sigma_1) + 2\boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{x}f_2(\sigma_2) - \rho_{11}f_1^2(\sigma_1) \\ &- (\rho_{12} + \rho_{21})f_1(\sigma_1)f_2(\sigma_2) - \rho_{22}f_2^2(\sigma_2), \end{aligned} \tag{5.3}$$

这里

$$e_1 = B\boldsymbol{b} + \frac{\boldsymbol{c}}{2}, \quad e_2 = B\boldsymbol{g} + \frac{\boldsymbol{d}}{2}.$$

为了使得函数 $-\dot{V}$ 是变量 $\boldsymbol{x}$, $f_1(\sigma_1)$, $f_2(\sigma_2)$ 的正定二次型，其充分必要条件为：矩阵

$$\begin{pmatrix} C & -e_1 & -e_2 \\ -e_1' & +\rho_{11} & \dfrac{\rho_{12}+\rho_{21}}{2} \\ -e_2' & \dfrac{\rho_{12}+\rho_{21}}{2} & \rho_{22} \end{pmatrix}$$

的所有主子行列式是正的。

因为矩阵 C 已经是正的，薛尔维斯特尔条件化为两个不等式

$$\begin{vmatrix} C & -e_1 \\ -e_1' & \rho_{11} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} C & -e_1 & -e_2 \\ -e_1' & \rho_{11} & \frac{1}{2}(\rho_{12}+\rho_{21}) \\ -e_2' & \frac{1}{2}(\rho_{12}+\rho_{21}) & \rho_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

显然，第一个不等式等价于下面的

$$\rho_{11} > e_1' C^{-1} e_1,$$

在讨论中，当引进矩阵

$$C_1 = \begin{pmatrix} C & -e_1 \\ -e_1' & \rho_{11} \end{pmatrix}$$

及 $(n+1)$ 维向量 $\left\{e_2, -\frac{1}{2}(\rho_{12}+\rho_{21})\right\} = -e$ 时，后面一个薛尔维斯特尔不等式可以写成

$$\rho_{22} > e' C_1^{-1} e.$$

§6. 利用向量李雅普诺夫函数的方法来解决绝对稳定性问题

近年来，在自动调节理论中常常遇到较为复杂的多维调节系

统，关于其稳定性的研究，原则上可以用李雅普诺夫直接方法来解决，但是随着系统阶数的增加，在应用这个方法的过程中，存在着很大的计算上的困难。

F. N. 贝叶尔[6] 曾用向量李雅普诺夫函数的方法对多维系统进行了研究，他首先将原来的 n 阶系统分成若干个子系统，对每个子系统作出李雅普诺夫函数（当然假定每个子系统要满足一定的条件，例如其解为指数渐近稳定的条件），然后通过原来出发系统的关联性，得出 $r(r<n)$ 阶的常系数线性微分方程组（称为辅助方程组），最后由辅助方程组平凡解的渐近稳定性，可以推出原系统的平凡解的渐近稳定性。F. N. 贝叶尔的工作对于解决实际问题提供了很好的方法。

A. A. 彼阿特库夫斯基及 Л. Д. 罗特库夫斯卡娅[7] 在 A. M. 列托夫的指导下，用 F. N. 贝叶尔的向量李雅普诺夫函数方法对调节系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= A_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1 f_1(\sigma_1), \quad \sigma_1 = \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{y}, \\ \dot{\boldsymbol{y}} &= A_2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}_2 f_2(\sigma_2), \quad \sigma_2 = \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x}\end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

的平凡解的稳定性进行了研究。这里 x，y 是 n_1，n_2 维向量，A_1，A_2 分别为 $n_1\times n_1$ 及 $n_2\times n_2$ 阶的稳定矩阵（即其特征方程的所有根都具有负实部）；$0<f_1(\sigma_1)\sigma_1<k_1\sigma_1^2$，$0<f_2(\sigma_2)\sigma_2<k_2\sigma_2^2$. $\boldsymbol{b}_1$ 及 $\boldsymbol{c}_2$ 是 n_1 维向量；$\boldsymbol{b}_2$ 及 $\boldsymbol{c}_1$ 是 n_2 维向量。

首先研究子系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A_1\boldsymbol{x}, \tag{6.2}$$

$$\dot{\boldsymbol{y}} = A_2\boldsymbol{y}, \tag{6.3}$$

对它们作出李雅普诺夫函数。

$$V_1 = \boldsymbol{x}'B_1\boldsymbol{x}, \quad V_2 = \boldsymbol{y}'B_2\boldsymbol{y},$$

这里 B_1，B_2 是正定的矩阵。函数 V_1，V_2 满足不等式

$$\lambda_{11}\|x\|^2 \leqslant V_1 \leqslant \lambda_{12}\|x\|^2, \quad \lambda_{21}\|y\|^2 \leqslant V_2 \leqslant \lambda_{22}\|y\|^2.$$

由方程

$$A_i'B_i + B_iA_i = -E \quad (i=1, 2)$$

来找出 B_1，B_2。方程中 E 为单位矩阵，那末对 V_1 及 V_2 求导数

$$\left.\frac{dV_1}{dt}\right|_{(6.2)} = -\|x\|^2,$$

$$\left.\frac{dV_2}{dt}\right|_{(6.3)} = -\|y\|^2.$$

最后,不等式

$$\|b_i f_i(\sigma_i)\| \leqslant \|b_i\| k_i \|\sigma_i\|, \quad i = 1, 2$$

成立。由此得出

$$\|b_1 f_1(\sigma_1)\| \leqslant \|b_1\| K_1 \|c_1\| \|y\|,$$

$$\|b_2 f_2(\sigma_2)\| \leqslant \|b_2\| K_2 \|c_2\| \|x\|.$$

令 $l_{12} = k_1\|b_1\|\|c_1\|$, $l_{21} = K_2\|b_2\|\|c_2\|$, 利用贝叶尔方法,得出绝对稳定性的条件为:

$$\lambda_{11}\lambda_{21} > 16\lambda_{12}^3\lambda_{22}^3 l_{12}^2 l_{21}^2.$$

在同一工作[7]中,他们将 F. N. 贝叶尔的公式用于飞机纵向运动方程

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_s = -\rho_s x_s + \sigma, \\ &\dot{\sigma} = \sum_{s=1}^{4} \beta_s x_s + r p_2 \sigma - f(\sigma)\ (s = 1, 2, 3, 4), \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

其中 $\rho_s > 0$, $r > 0$, $p_2 < 0$, $f(0) = 0$, $\sigma f(\sigma) > 0$. 他们所得系统 (6.4) 是渐近稳定的充分条件为:

$$-\rho_1^2 p_2 r^2 + 16(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2) < 0. \tag{6.5}$$

如果令 $\xi_k = \dfrac{4\beta_k}{\rho_1 p_2 r}$, 则条件 (6.5) 可以写成

$$\sum_{k=1}^{4} \xi_k^2 < 1. \tag{6.5$'$}$$

文中指出,这个条件 (6.5)$'$ 比起 A. M. 列托夫[2]用李雅普诺夫直接方法所得类似充分条件

$$\sum_{k=1}^{4} \xi_k^2 < 1, \quad \text{但}\ \xi_k = \frac{1 + \beta_k}{\sqrt{1 - \rho_k r p_2}} \tag{6.6}$$

而言,条件 (6.5)$'$ 在系统的参数空间中,给出了新的稳定性区域。

我们利用 F. N. 贝叶尔方法来研究更为一般的非线性调节

系统[8]，得出这个系统的平凡解为渐近稳定性的充分条件．这里应当指出的是系统中的 σ 表示公共的（总和的）控制脉冲信号，通常具有形式 $\sigma = \boldsymbol{c}'x$，$\boldsymbol{c}$ 是 n 维向量．由此看出文 [7] 中所讨论的系统 (6.1) 只是一个特殊情形．

另外，由于我们用的是 F. N. 贝叶尔的思想方法来处理问题（并不是用他的公式），当我们研究系统 (6.4) 的稳定性时，所得充分条件为

$$-\rho_1^2 p_2 r^2 + 16\beta^2 < 0, \tag{6.7}$$

其中 $\beta^2 = \max\limits_{i=1,2,3,4} \{\beta_i^2\}$，显然这个条件比 [7] 中用 F. N. 贝叶尔公式讨论同一方程所得充分条件 (6.5) 为宽．

我们所研究的非线性调节系统为

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= A_1x_1 \qquad\qquad\qquad + b_1f_1(\sigma),\\
\frac{dx_2}{dt} &= \qquad A_2x_2 \qquad\qquad + b_2f_2(\sigma),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dx_r}{dt} &= \qquad\qquad\qquad A_rx_r + b_rf_r(\sigma),\\
\sigma &= \boldsymbol{c}'x,
\end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

这里 $x_1 = \mathrm{col}(x_1^{(1)}, \cdots, x_{n_1}^{(1)})$，$x_2 = \mathrm{col}(x_1^{(2)}, \cdots, x_{n_2}^{(2)}), \cdots,$

$$x_r = \mathrm{col}(x_1^{(r)}, \cdots, x_{n_r}^{(r)}),\ x = \mathrm{col}(x_1^{(1)}, \cdots, x_{n_1}^{(1)},$$

$$x_1^{(2)}, \cdots, x_{n_2}^{(2)}, \cdots, x_1^{(r)}, \cdots, x_{n_r}^{(r)}),$$

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n.$$

$A_1, A_2, \cdots, A_r$ 分别为 $n_1 \times n_1, n_2 \times n_2, \cdots, n_r \times n_r$ 阶的常量矩阵，并且是稳定的．$\boldsymbol{b}_i$ 是 n_i 维向量，$\boldsymbol{c}$ 是 n 维向量，σ 是纯量．并假设 $\sigma = c'x$，

$$|f_i(\sigma)| \leqslant l_i|\sigma|,$$

这里 $l_i > 0$．

显然

$$|f_i(\sigma)| \leqslant l_i c\{|x_1^{(1)}| + \cdots + |x_{n_1}^{(1)}|$$

$$+\cdots+|x_1^{(r)}|+\cdots+|x_{n_r}^{(r)}|\},\tag{6.9}$$

这里 $c=\max\{|c_1|,\cdots,|c_n|\}$.

先考虑 r 个子系统

$$\frac{dx_s}{dt}=A_s x_s\quad(s=1,2,\cdots,r),\tag{6.10}$$

对每个子系统而言，作出李雅普诺夫函数，因为 A_s 是稳定的，所以对于给定的负定函数 $w_s(x_1^{(s)},\cdots,x_{n_s}^{(s)})=-(x_1^{(s)^2}+\cdots+x_{n_s}^{(s)^2})$ 可以找到正定的

$$V_s(x_1^{(s)},\cdots,x_{n_s}^{(s)})=\sum_{i,j=1}^{n_s}\frac{1}{2}C_{ij}^{(s)}x_i^{(s)}x_j^{(s)}.$$

使得

$$\left.\frac{dV_s}{dt}\right|_{(6.10)}=-(x_1^{(s)^2}+\cdots+x_{n_s}^{(s)^2}).$$

这里 $C_{ij}^{(s)}$ 可由第二篇第四章 § 4 中 E. A. 巴尔巴欣公式给出，并且存在 $A_1^{(s)}>0$, $A_2^{(s)}>0$，使得

$$\begin{aligned}A_1^{(s)}(x_1^{(s)^2}+\cdots+x_{n_s}^{(s)^2})&\leqslant V_s(x_1^{(s)},\cdots,x_{n_s}^{(s)})\\&\leqslant A_2^{(s)}(x_1^{(s)^2}+\cdots+x_{n_s}^{(s)^2}),\end{aligned}$$

现在求

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV_1}{dt}\right|_{(6.8)}&=\frac{\partial V_1}{\partial x_1^{(1)}}\frac{dx_1^{(1)}}{dt}+\cdots+\frac{\partial V_1}{\partial x_{n_1}^{(1)}}\frac{dx_{n_1}^{(1)}}{dt}\\&=-(x_1^{(1)^2}+\cdots+x_{n_1}^{(1)^2})+\frac{\partial V_1}{\partial x_1^{(1)}}b_{11}f_1(\sigma)\\&\quad+\cdots+\frac{\partial V_1}{\partial x_{n_1}^{(1)}}b_{1n_1}f_1(\sigma)\leqslant-(x_1^{(1)^2}+\cdots+x_{n_1}^{(1)^2})\\&\quad+\left|\frac{\partial V_1}{\partial x_1^{(1)}}\right||b_{11}||f_1(\sigma)|+\cdots+\left|\frac{\partial V_1}{\partial x_{n_1}^{(1)}}\right||b_{1n}||f_1(\sigma)|\\&\leqslant-(x_1^{(1)^2}+\cdots+x_{n_1}^{(1)^2})+\left\{|b_{11}|l_1c\left|\frac{\partial V_1}{\partial x_1^{(1)}}\right|\right.\\&\quad\left.+\cdots+|b_{1n_1}|l_1c\left|\frac{\partial V_1}{\partial x_{n_1}^{(1)}}\right|\right\}\times\{|x_1^{(1)}|\\&\quad+\cdots+|x_{n_1}^{(1)}|+\cdots+|x_1^{(r)}|+\cdots+|x_{n_r}^{(r)}|\}\end{aligned}$$

记 $|b_{11}|l_1 c = l_{11}, \cdots, |b_{1n_1}|l_1 c = l_{1n_1}$.

$$
\begin{aligned}
&\leqslant -(x_1^{(1)^2} + \cdots + x_{n_1}^{(1)^2}) \\
&\quad + \left\{ l_{11} \left| \sum_{j=1}^{n_1} c_{1j}^{(1)} x_j^{(1)} \right| + \cdots + l_{1n_1} \left| \sum_{j=1}^{n_1} c_{n_1 j}^{(1)} x_j^{(1)} \right| \right\} \\
&\quad \times \{ |x_1^{(1)}| + \cdots + |x_{n_1}^{(1)}| + |x_1^{(2)}| + \cdots + |x_{n_2}^{(2)}| \\
&\quad + \cdots + |x_1^{(r)}| + \cdots + |x_{n_r}^{(r)}| \} \\
&\leqslant -(x_1^{(1)^2} + \cdots + x_{n_1}^{(1)^2}) + \{ l_{11}(|c_{11}^{(1)}| |x_1^{(1)}| \\
&\quad + \cdots + |c_{1n_1}^{(1)}| |x_{n_1}^{(1)}|) + \cdots + l_{1n_1}(|c_{n_1}^{(1)}| |x_1^{(1)}| \\
&\quad + \cdots + |c_{n_1 n_1}^{(1)}| |x_{n_1}^{(1)}|) \} \{ |x_1^{(1)}| + \cdots + |x_{n_1}^{(1)}| \\
&\quad + \cdots + |x_1^{(r)}| + \cdots + |x_{n_r}^{(r)}| \} \\
&= -(x_1^{(1)^2} + \cdots + x_{n_1}^{(1)^2}) + \{ (l_{11} |c_{11}^{(1)}| \\
&\quad + \cdots + l_{1n_1} |c_{n_1 1}^{(1)}|) |x_1^{(1)}| + \cdots + (l_{11} |c_{1n_1}^{(1)}| \\
&\quad + \cdots + l_{1n_1} |c_{n_1 n_1}^{(1)}|) |x_{n_1}^{(1)}| \} \{ |x_1^{(1)}| + \cdots + |x_{n_1}^{(1)}| \\
&\quad + |x_1^{(2)}| + \cdots + |x_{n_2}^{(2)}| + \cdots + |x_1^{(r)}| \\
&\quad + \cdots + |x_{n_r}^{(r)}| \}
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{aligned}
B_{11} &= l_{11} |c_{11}^{(1)}| + \cdots + l_{1n_1} |c_{n_1 1}^{(1)}|, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
B_{1n_1} &= l_{11} |c_{1n_1}^{(1)}| + \cdots + l_{1n_1} |c_{n_1 n_1}^{(1)}|.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -(x_1^{(1)^2} + \cdots + x_{n_1}^{(1)^2}) + (B_{11} |x_1^{(1)}| + \cdots + B_{1n_1} |x_{n_1}^{(1)}|) \\
&\quad \times \{ |x_1^{(1)}| + \cdots + |x_{n_1}^{(1)}| + |x_1^{(2)}| + \cdots + |x_{n_2}^{(2)}| \\
&\quad + \cdots + |x_1^{(r)}| + \cdots + |x_{n_r}^{(r)}| \}.
\end{aligned}
$$

令

$$
B_1 = \max_{i = 1, \cdots, n_1} \{ B_{1i} \}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant -(x_1^{(1)^2} + \cdots + x_n^{(1)^2}) + B_1(|x_1^{(1)}| + \cdots + |x_{n_1}^{(1)}|)^2 \\
&\quad + \{ B_{11} |x_1^{(1)}| + \cdots + B_{1n} |x_{n_1}^{(1)}| \} \{ |x_1^{(2)}| \\
&\quad + \cdots + |x_{n_2}^{(2)}| + \cdots + |x_1^{(r)}| + \cdots + |x_{n_r}^{(r)}| \} \\
&\leqslant -(x_1^{(1)^2} + \cdots + x_n^{(1)^2}) + n_1 B_1 (x_1^{(1)^2} + \cdots + x_{n_1}^{(1)^2}) \\
&\quad + \{ B_{11} |x_1^{(1)}| + \cdots + B_{1n_1} |x_{n_1}^{(1)}| \}
\end{aligned}
$$

$$\times\{|x_1^{(2)}|+\cdots+|x_{n_2}^{(2)}|+\cdots+|x_1^{(r)}|+\cdots+|x_{n_r}^{(r)}|\}$$

假设

$$-1+n_1B_1=-(1-n_1B_1)=-Q_1,$$

要求

$$Q_1=1-n_1B_1>0。$$

$$\begin{aligned}
&=-Q_1(x_1^{(1)^2}+\cdots+x_{n_1}^{(1)^2})\\
&\quad+\{B_{11}|x_1^{(1)}|+\cdots+B_{1n_1}|x_{n_1}^{(1)}|\}\{|x_1^{(2)}|\\
&\quad+\cdots+|x_{n_2}^{(2)}|+\cdots+|x_1^{(r)}|+\cdots+|x_{n_r}^{(r)}|\}\\
&=-Q_1x_1^{(1)^2}+B_{11}|x_1^{(1)}|\{|x_1^{(2)}|+\cdots+|x_{n_2}^{(2)}|\\
&\quad+\cdots+|x_1^{(r)}|+\cdots+|x_{n_r}^{(r)}|\}\\
&\quad+\cdots\\
&\quad-Q_1x_{n_1}^{(1)^2}+B_{1n_1}|x_{n_1}^{(1)}|\{|x_1^{(2)}|+\cdots+|x_{n_2}^{(2)}|\\
&\quad+\cdots+|x_1^{(r)}|+\cdots+|x_{n_r}^{(r)}|\}\\
&=\underbrace{-\frac{Q_1}{n-n_1}x_1^{(1)^2}-\cdots-\frac{Q_1}{n-n_1}x_1^{(1)^2}}_{(n-n_1)\text{项}}\\
&\quad+B_{11}|x_1^{(1)}|\{|x_1^{(2)}|+\cdots+|x_{n_2}^{(2)}|\\
&\quad+\cdots+|x_1^{(r)}|+\cdots+|x_{n_r}^{(r)}|\}\\
&\quad+\cdots\\
&\quad\underbrace{-\frac{Q_1}{n-n_1}x_{n_1}^{(1)^2}-\cdots-\frac{Q_1}{n-n_1}x_{n_1}^{(1)^2}}_{(n-n_1)\text{项}}\\
&\quad+B_{1n_1}|x_{n_1}^{(1)}|\{|x_1^{(2)}|+\cdots+|x_{n_2}^{(2)}|\\
&\quad+\cdots+|x_1^{(r)}|+\cdots+|x_{n_r}^{(r)}|\}\\
&\leqslant(n-n_1)\times\left(-\frac{Q_1}{2(n-n_1)}x_1^{(1)^2}\right)+\frac{B_{11}^2(n-n_1)}{2Q_1}\\
&\quad\times\{x_1^{(2)^2}+\cdots+x_{n_2}^{(2)^2}+\cdots+x_1^{(r)^2}+\cdots+x_{n_r}^{(r)^2}\}\\
&\quad+\cdots\\
&\quad+(n-n_1)\times\left(-\frac{Q_1}{2(n-n_1)}x_{n_1}^{(1)^2}\right)+\frac{B_{1n_1}^2(n-n_1)}{2Q_1}
\end{aligned}$$

$$\times \{x_1^{(2)^2} + \cdots + x_{n_2}^{(2)^2} + \cdots + x_1^{(r)^2} + \cdots + x_{n_r}^{(r)^2}\}$$

$$= -\frac{1}{2} Q_1(x_1^{(1)^2} + \cdots + x_{n_1}^{(1)^2}) + \frac{n - n_1}{2Q_1}$$

$$\times (B_{11}^2 + \cdots + B_{1n_1}^2)\{x_1^{(2)^2} + \cdots + x_{n_2}^{(2)}$$

$$+ \cdots + x_1^{(r)^2} + \cdots + x_{n_r}^{(r)^2}\}$$

令

$$\frac{n - n_1}{2Q_1}(B_{11}^2 + \cdots + B_{1n_1}^2) = P_1$$

$$= -\frac{1}{2} Q_1(x_1^{(1)^2} + \cdots + x_{n_1}^{(1)^2}) + P_1(x_1^{(2)^2} + \cdots$$

$$+ x_{n_2}^{(2)^2} + \cdots + x_1^{(r)^2} + \cdots + x_{n_r}^{(r)^2})$$

$$\leqslant -\frac{Q_1}{2A_2^{(1)}} V_1 + \frac{P_1}{A_1^{(2)}} V_2 + \cdots + \frac{P_1}{A_1^{(r)}} V_r,$$

$$\left.\frac{dV_2}{dt}\right|_{(6,8)} = \frac{\partial V_2}{\partial x_1^{(2)}} \frac{dx_1^{(2)}}{dt} + \cdots + \frac{\partial V_2}{\partial x_{n_2}^{(2)}} \frac{dx_{n_2}^{(2)}}{dt}$$

$$= -(x_1^{(2)^2} + \cdots + x_{n_2}^{(2)^2}) + \frac{\partial V_2}{\partial x_1^{(2)}} b_{21} f_2(\sigma)$$

$$+ \cdots + \frac{\partial V_2}{\partial x_{n_2}^{(2)}} b_{2n_2} f_2(\sigma) \leqslant -(x_1^{(2)^2} + \cdots + x_{n_2}^{(2)^2})$$

$$+ \left\{|b_{21}| l_2 c \left|\frac{\partial V_2}{\partial x_1^{(2)}}\right| + \cdots + |b_{2n_2}| l_2 c \left|\frac{\partial V_2}{\partial x_{n_2}^{(2)}}\right|\right\}$$

$$\times \{|x_1^{(1)}| + \cdots + |x_{n_1}^{(1)}| + \cdots + |x_1^{(r)}| + \cdots + |x_{n_r}^{(r)}|\}$$

令

$$|b_{21}| l_2 c = l_{21}, \cdots, |b_{2n_2}| l_2 c = l_{2n_2}$$

$$\leqslant -(x_1^{(2)^2} + \cdots + x_{n_2}^{(2)^2})$$

$$+ \{l_{21}(|c_{11}^{(2)}||x_1^{(2)}| + \cdots + |c_{1n_2}^{(2)}||x_{n_2}^{(2)}|)$$

$$+ \cdots + l_{2n_2}(|c_{n_2}^{(2)}||x_1^{(2)}| + \cdots + |c_{n_2 n_2}^{(2)}||x_{n_2}^{(2)}|)\}$$

$$\times \{|x_1^{(1)}| + \cdots + |x_{n_1}^{(1)}| + \cdots + |x_1^{(r)}|$$

$$+ \cdots + |x_{n_r}^{(r)}|\} = -(x_1^{(2)^2} + \cdots + x_{n_2}^{(2)^2})$$

$$+ \{B_{21}|x_1^{(2)}| + \cdots + B_{2n_2}|x_{n_2}^{(2)}|\}$$

$$\times \{|x_1^{(1)}| + \cdots + |x_{n_1}^{(1)}| + \cdots + |x_1^{(r)}| + \cdots + |x_{n_r}^{(r)}|\}$$

其中

$$B_{21}=l_{21}|c_{11}^{(2)}|+\cdots+l_{2n_2}|c_{n_21}^{(2)}|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_{2n_2}=l_{21}|c_{1n_2}^{(2)}|+\cdots+l_{2n_2}|c_{n_2n_2}^{(2)}|,$$

且令

$$B_2=\max_{i=1,\cdots,n_2}\{B_{2i}\}.$$

$$\begin{aligned}\leqslant&-(x_1^{(2)^2}+\cdots+x_{n_2}^{(2)^2})+B_2n_2(x_1^{(2)^2}+\cdots+x_{n_2}^{(2)^2})\\&+\{B_{21}|x_1^{(2)}|+\cdots+B_{2n_2}|x_{n_2}^{(2)}|\}\\&\times\{|x_1^{(1)}|+\cdots+|x_{n_1}^{(1)}|+|x_1^{(3)}|+\cdots\\&+|x_{n_3}^{(3)}|+\cdots+|x_1^{(r)}|+\cdots+|x_{n_r}^{(r)}|\}\end{aligned}$$

令

$$-1+n_2B_2=-(1-n_2B_2)=-Q_2,$$

假设

$$Q_2=1-n_2B_2>0.$$

$$\begin{aligned}=&-Q_2(x_1^{(2)^2}+\cdots+x_{n_2}^{(2)^2})\\&+\{B_{21}|x_1^{(2)}|+\cdots+B_{2n_2}|x_{n_2}^{(2)}|\}\\&\times\{|x_1^{(1)}|+\cdots+|x_{n_1}^{(1)}|+|x_1^{(3)}|+\cdots+|x_{n_3}^{(3)}|\\&+\cdots+|x_1^{(r)}|+\cdots+|x_{n_r}^{(r)}|\}\\\leqslant&-\frac{1}{2}Q_2(x_1^{(2)^2}+\cdots+x_{n_2}^{(2)^2})\\&+\frac{n-n_2}{2Q_2}(B_{21}^2+\cdots+B_{2n_2}^2)\{x_1^{(1)^2}+\cdots+x_{n_1}^{(1)^2}\\&+x_1^{(3)^2}+\cdots+x_{n_3}^{(3)^2}+\cdots+x_1^{(r)^2}+\cdots+x_{n_r}^{(r)^2}\}\end{aligned}$$

令

$$\frac{n-n_2}{2Q_2}(B_{21}^2+\cdots+B_{2n}^2)=P_2,$$

有

$$\frac{dV_2}{dt}\leqslant\frac{P_2}{A_1^{(1)}}V_1-\frac{Q_2}{2A_2^{(2)}}V_2+\cdots+\frac{P_2}{A_1^{(r)}}V_r.$$

同样可得

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dV_1}{dt} &\leqslant -\frac{Q_1}{2A_2^{(1)}}V_1+\frac{P_1}{A_1^{(2)}}V_2+\cdots+\frac{P_1}{A_1^{(r)}}V_r,\\
\frac{dV_2}{dt} &\leqslant \frac{P_2}{A_1^{(1)}}V_1-\frac{Q_2}{2A_2^{(2)}}V_2+\cdots+\frac{P_2}{A_1^{(r)}}V_r,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dV_r}{dt} &\leqslant \frac{P_r}{A_1^{(1)}}V_1+\frac{P_r}{A_1^{(2)}}V_2+\cdots-\frac{Q_r}{2A_2^{(r)}}V_r.
\end{aligned}\right\}\tag{6.11}
$$

注意 (6.11) 右端的系数行列式具有负的对角元素，并且非对角元素是非负的，故满足第二篇第五章引理 3.2 的条件.

考虑辅助方程

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dV^*}{dt} &= -\frac{Q_1}{2A_2^{(1)}}V_1^*+\frac{P_1}{A_1^{(2)}}V_2^*+\cdots+\frac{P_1}{A_1^{(r)}}V_r^*,\\
\frac{dV_2^*}{dt} &= \frac{P_2}{A_1^{(1)}}V_1^*-\frac{Q_2}{2A_2^{(2)}}V_2^*+\cdots+\frac{P_2}{A_1^{(r)}}V_r^*,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dV_r^*}{dt} &= \frac{P_r}{A_1^{(1)}}V_1^*+\frac{P_r}{A_1^{(2)}}V_2^*+\cdots-\frac{Q_r}{2A_2^{(r)}}V_r^*.
\end{aligned}\right\}\tag{6.12}
$$

由第二篇第五章引理 3.2 得 $V_i \leqslant V_i^*$，所以如果线性系统 (6.12) 的平凡解是渐近稳定的，故有

$$\lim_{t\to\infty} V_i^*(x_1^{(i)}, \cdots, x_{n_i}^{(i)}) = 0,$$

因为 $V_i \leqslant V_i^*$，故有 $\lim\limits_{t\to\infty} V_i(x_1^{(i)}, \cdots, x_{n_i}^{(i)}) = 0$，而 V_i 是 $x_1^{(i)}, \cdots, x_{n_i}^{(i)}$ 的正定二次型，故由 $\lim\limits_{t\to\infty} V_i = 0 (i=1, \cdots, r) \Longrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} x_i(t) = 0$ $(i = 1, \cdots, n)$，即系统 (6.8) 的平凡解是渐近稳定的. 故有下面定理.

定理 6.1：如果 $Q_i = 1 - n_i B_i > 0$，其中 $B_i = \max\limits_{j=1,\cdots,n_i} \{B_{ij}\}$，同时方程组 (6.12) 的系数满足使 (6.12) 的特征方程的根具有负实部的劳思-霍维茨条件(即给出了调节参数应满足的不等式)，那末非线性系统 (6.8) 的平凡解是渐近稳定的.

举例：飞机纵向运动的方程 (6.4)

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}_s = -\rho_s x_s + \sigma,\\&\dot{\sigma} = \sum_{s=1}^{4} \beta_s x_s + r p_2 \sigma - f(\sigma) \quad (s = 1, 2, 3, 4),\end{aligned}\right\}$$

这里 $\rho_s > 0$, $r > 0$, $p_2 < 0$, $f(0) = 0$, $\sigma f(\sigma) > 0$, 当 $\sigma \neq 0$ 时，不破坏一般性，可以认为 $\rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \rho_3 \leqslant \rho_4$.

现在将系统 (6.4) 分解成二个子系统:

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}_s = -\rho_s x_s,\\&\dot{\sigma} = -r|p_2|\sigma \quad (s = 1, 2, 3, 4).\end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

对系统 (6.13) 作出李雅普诺夫函数

$$V_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

$$V_2 = \sigma^2,$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV_1}{dt}\right|_{(6.4)} &= 2\left(x_1 \frac{dx_1}{dt} + \cdots + x_4 \frac{dx_4}{dt}\right)\\&= 2[x_1(-\rho_1)x_1 + \cdots + x_4(-\rho_4)x_4 + x_1\sigma\\&\quad + \cdots + x_4\sigma] \leqslant 2[(-\rho_1)(x_1^2 + \cdots + x_4^2)\\&\quad + |x_1||\sigma| + \cdots + |x_4||\sigma|]\\&\leqslant 2\left[-\frac{\rho_1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_4^2) + \frac{\sigma^2}{2\rho_1}\cdot 4\right]\\&= -\rho_1 V_1 + \frac{4}{\rho_1} V_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV_2}{dt}\right|_{(6.4)} &= 2\sigma\frac{d\sigma}{dt}\\&= 2\sigma\left(-r|p_2|\sigma - f(\sigma) + \sum_{s=1}^{4}\beta_s x_s\right)\\&\leqslant 2\left[-r|p_2|\sigma^2 + \sum_{s=1}^{4}|\beta_s||x_s||\sigma|\right]\\&= 2\left[-\frac{r|p_2|}{4}\sigma^2 + |\beta_1||x_1||\sigma|\right.\\&\quad - \frac{r|p_2|}{4}\sigma^2 + |\beta_2||x_2||\sigma| - \frac{r|p_2|}{4}\sigma^2\end{aligned}$$

$$+|\beta_3||x_3||\sigma| - \frac{r|p_2|}{4}\sigma^2 + |\beta_4||x_4||\sigma|\Big]$$

$$\leqslant 2\Big[-\frac{1}{8}r|p_2|\sigma^2 + \frac{2}{r|p_2|}\beta_1^2x_1^2$$

$$-\frac{1}{8}r|p_2|\sigma^2 + \frac{2}{r|p_2|}\beta_2^2x_2^2 - \frac{1}{8}r|p_2|\sigma^2$$

$$+\frac{2}{r|p_2|}\beta_3^2x_3^2 - \frac{1}{8}r|p_2|\sigma^2 + \frac{2}{r|p_2|}\beta_4^2x_4^2\Big]$$

$$= 2\Big[-\frac{1}{2}r|p_2|\sigma^2 + \frac{2}{r|p_2|}$$

$$\times(\beta_1^2x_1^2 + \beta_2^2x_2^2 + \beta_3^2x_3^2 + \beta_4^2x_4^2)\Big]$$

令

$$\beta^2 = \max\{\beta_1^2, \beta_2^2, \beta_3^2, \beta_4^2\}$$

$$\leqslant 2\Big[-\frac{r|p_2|}{2}\sigma^2 + \frac{2\beta^2}{r|p_2|}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\Big]$$

$$= -r|p_2|V_2 + \frac{4\beta^2}{r|p_2|}V_1.$$

即

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV_1}{dt} &\leqslant -\rho_1V_1 + \frac{4}{\rho_1}V_2,\\ \frac{dV_2}{dt} &\leqslant \frac{4\beta^2}{r|p_2|}V_1 - r|p_2|V_2.\end{aligned}\right\} \tag{6.14}$$

其辅助方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV_1^*}{dt} &= -\rho_1V_1^* + \frac{4}{\rho_1}V_2^*,\\ \frac{dV_2^*}{dt} &= \frac{4\beta^2}{r|p_2|}V_1^* - r|p_2|V_2^*.\end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

系统 (6.15) 的零解为渐近稳定的充分必要条件为

$$\rho_1r|p_2| - \frac{4}{\rho_1}\frac{4\beta^2}{r|p_2|} > 0,$$

即

$$\rho_1^2 r^2 p_2^2 - 16\beta^2 > 0,$$
$$-\rho_1^2 r^2 p_2^2 + 16\beta^2 < 0. \tag{6.16}$$

因为

$$V_1 \leqslant V_1^*,$$
$$V_2 \leqslant V_2^*,$$

所以如果 (6.15) 的零解是渐近稳定的，那末，当 $t \to \infty$ 时，有

$$V_1 \to 0, \ V_2 \to 0.$$

而

$$V_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \ V_2 = \sigma^2.$$

故当满足条件 (6.16) 时，系统 (6.4) 的零解是绝对稳定的，A. A. 彼阿特库尔斯基等曾用贝叶尔的公式，得出使 (6.4) 的零解为绝对稳定性的充分条件为：

$$-\rho_1^2 r^2 p_2^2 + 16(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2) < 0.$$

显然，我们这里所得条件 (6.16) 要比上述条件为宽.

注 1: A. И. 鲁里叶曾研究过调节系统的更为普遍的范式方程，即是

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\eta_k}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\eta_\alpha + h_k f(\sigma) \quad (k = 1, 2, \cdots, n), \\ &\sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \eta_\alpha, \end{aligned}\right\}$$

其中 h_k 是给定的常数.

我们可以将其写成向量形式

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}f(\sigma), \\ &\sigma = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}. \end{aligned}\right\} \tag{1*}$$

其中 A 为 $n \times n$ 阶的常量矩阵，$\boldsymbol{h} = \mathrm{col}(h_1, \cdots, h_n)$, $\boldsymbol{x} = \mathrm{col}(x_1, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{c} = \mathrm{col}(c_1, \cdots, c_n)$.

我们仅对

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} + h_k f(\sigma) \tag{2*}$$

进行了研究，至于更一般的系统 (1*) 的稳定性问题，完全可用 [8] 中同样的方法来进行讨论，先将

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_r\end{pmatrix},$$

然后对 A 中的参数 (在 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 中不出现的) 进行估计，给出系统 (1*) 平凡解渐近稳定性的充分条件，这里不再重述.

注 2: 考虑系统

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x}, \tag{1**}$$

这里 $\boldsymbol{x}=\mathrm{col}(x_1, \cdots, x_n)$，如果 A 是 $n\times n$ 阶的实对称矩阵，并且 $|A-\lambda E|=0$ 的所有根都是负的(因为矩阵 A 是对称的，故其特征根是实的)，在这种情况下，我们可以方便地取

$$V=x_1^2+\cdots+x_n^2,$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1^{**})}=2x'Ax\leqslant -2\rho_1(x_1^2+\cdots+x_n^2)=-2\rho_1 V, \tag{2**}$$

这里 $\rho_1>0$ 是 $|A-\rho E|=0$ 的根中的绝对值的最小者.

由 (2**) 得

$$V\leqslant V_0 e^{-\rho_1(t-t_0)},$$

$$\lim_{t\to\infty}V(x_1(t), \cdots, x_n(t))=0,$$

但因

$$V(x_1(t), \cdots, x_n(t))=x_1^2(t)+\cdots+x_n^2(t),$$

故有

$$\lim_{t\to\infty}x_1(t)=0, \cdots, \lim_{t\to\infty}x_n(t)=0.$$

以上可以不用第一篇第一章定理 3.2 (即李雅普诺夫关于稳定性的第二定理)，而直接得出 (1**) 的平凡解是渐近稳定性的结论. 但一般说来，矩阵 A 的对称性的要求是很强的，但也有这样的情形，矩阵 A 不是对称的，但可将系统分解成一些子系统，而使子系统的矩阵满足对称的条件. 仍以飞机纵向运动方程作为例子，

$$\frac{dx_s}{dt}=-\rho_s x_s+\sigma,$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sum_{s=1}^{4} \beta_s x_s + rp_2\sigma - f(\sigma) \quad (s = 1, 2, 3, 4).$$

其线性部分的行列式为

$$A = \begin{pmatrix} -\rho_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\rho_2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\rho_3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_4 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & rp_2 \end{pmatrix},$$

显然，A 不是对称的．但如果将系统分成二个子系统

$$\frac{dx_s}{dt} = -\rho_s x_s \quad (s = 1, 2, 3, 4),$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = rp_2\sigma,$$

这里

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_4 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = (rp_2),$$

显然 A_1, A_2 是对称矩阵． 现在我们将系统 (1^{**}) (其中 A 不是对称的)分解成 r 个子系统，

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}, \qquad (3^{**})$$

这里 $A_1, \cdots, A_r$ 分别是 $n_1 \times n_1, \cdots, n_r \times n_r$ 阶实对称矩阵，

$$x_1 = \mathrm{col}(x_1^{(1)}, \cdots, x_{n_1}^{(1)}), \cdots, x_r = \mathrm{col}(x_1^{(r)}, \cdots, x_{n_r}^{(r)}),$$

$$n_1 + \cdots + n_r = n.$$

并假定 $|A_i - \rho E| = 0 (i = 1, \cdots, r)$ 的根都是负的．

作李雅普诺夫函数

$$V_k = (x_1^{(k)^2} + \cdots + x_{n_k}^{(k)^2}) \quad (k = 1, \cdots, r),$$

容易算出

$$\frac{dV_1}{dt} \leqslant -\rho_1^* V_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dV_r}{dt} \leqslant -\rho_r^* V_r.$$

($\rho_i^* > 0$ 分别是 $|A_i - \rho E| = 0$ 的根的绝对值的最小者，$i = 1, \cdots, r$.)

显然有

$$\lim_{t\to\infty} V_1 = \cdots = \lim_{t\to\infty} V_r = 0.$$

因为 $V_k = (x_1^{(k)^2} + \cdots + x_{n_k}^{(k)^2})$，故可得出系统 (3^{**}) 的平凡解渐近稳定性的结论.

对一般非线性系统 (1^*)，如果 (1^*) 中的 A 可以分成

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix},$$

其中 $A_1, \cdots, A_r$ 是实对称矩阵，我们来讨论系统 (1^*) 的平凡解的稳定性问题时，就可以作出向量李雅普诺夫函数

$$V_k = (x_1^{(k)^2} + \cdots + x_{n_k}^{(k)^2}),$$

然后用本节中所用方法进行讨论. 对这种特殊情形而言，显然要简单得多.

§7 直接调节系统的绝对稳定性[9]

讨论系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}f(\sigma), \\ \sigma = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}. \end{cases} \tag{7.1}$$

这里 A 是稳定的 $n \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维列向量，$\boldsymbol{c}'$ 是 n 维的行向量，$f(\sigma)$ 是满足条件

$$f(\sigma)\sigma > 0, \qquad 当\ \sigma \neq 0\ 时 \tag{7.2}$$

的连续函数。

若对任何适合条件 (7.2) 的连续函数 $f(\sigma)$，系统 (7.1) 的零解是全局渐近稳定的，我们就说系统 (7.1) 在角 $(0, \infty)$ 内是绝对稳定的。

А. И. 鲁里叶[10]，А. М. 列托夫[11]，И. Г. 马尔金[12]等用构造形如"二次型加积分项"的李雅普诺夫函数的办法，得出了保证绝对稳定性的判别准则. [13] 中曾指出，这些准则是无用的. 赵素霞用与 [13] 中不同的方法指出这些准则是无用的. 并指出产生上述问题的共同根源在于错误地把中间变量 σ 当作独立变量来处理. 下面介绍她的工作.

在 [10], [11] 中研究了已化成标准型的直接调节系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_k = -\rho_k x_k + f(\sigma) \quad (k = 1, \cdots, n+1), \\ \sigma = \sum_{k=1}^{n+1} r_k x_k, \end{cases} \tag{7.3}$$

(其中 ρ_k, r_k 是系统的已知参数，且所有 ρ_k 具有正实部，为了便于说明问题，设所有 ρ_k 是实数.) 在角 $(0, \infty)$ 内的绝对稳定性.

由 (7.3) 可得

$$\dot{\sigma} = \sum_{k=1}^{n+1} \beta_k x_k - r f(\sigma),$$

其中

$$\beta_k = -r_k \rho_k, \quad r = -\sum_{k=1}^{n+1} r_k,$$

易知 $r \geqslant 0$ 是绝对稳定的必要条件. [10], [11] 中研究 $r > 0$ 情况.

鲁里叶所给出的判定准则是:

准则 I. 若存在正的实数 $A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$，使方程组

$$A_k + \beta_k + 2\sqrt{r}\, a_k + 2a_k \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{\rho_k + \rho_i} = 0 \tag{7.4}$$

$$(k = 1, \cdots, n+1)$$

有实数解 (a_k 看作未知数)，则 (7.3) 在角 $(0, \infty)$ 内绝对稳定.

准则 II. 若方程组

$$\beta_k + 2\sqrt{r}\ a_k + 2a_k \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{\rho_k + \rho_i} = 0 \tag{7.5}$$

$$(k = 1, \cdots, n+1)$$

有实数解,则 (7.3) 在角 $(0, \infty)$ 内绝对稳定.

列托夫所给的判定准则是:

若存在一个实数 $R > 0$, 满足

$$4rR > \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(1 + R\beta_k)^2}{\rho_k}, \tag{7.6}$$

则 (7.3) 在角 $(0, \infty)$ 内绝对稳定.

对最简单的系统 $(k = 1)$,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\rho_1 x_1 + f(\sigma), \quad \rho_1 > 0, \\ \sigma = r_1 x_1 \end{cases}$$

来说,鲁里叶的准则 I 和列托夫的判定准则都是不能实现的.

事实上,此时准则 I 是: 存在一个正数 A_1, 使

$$A_1 + \beta_1 + 2\sqrt{r}\ a_1 + 2a_1 \frac{a_1}{2\rho_1} = 0$$

有实数解,即

$$A_1 + \rho_1 r + 2\sqrt{r}\ a_1 + \frac{a_1^2}{\rho_1} = 0$$

$$(\beta_1 = -\rho_1 r_1, r = -r_1)$$

有实数解. 即

$$A_1 + \left(\frac{a_1}{\sqrt{\rho_1}} + \sqrt{r\rho_1}\right)^2 = 0$$

有实数解. 但是, 对任何参数 ρ_1, r_1 和任何正数 A_1, 上述方程 (a_1 看作未知数)都没有实数解. 这就说明准则 I 是空的,是不能实现的.

此时,列托夫的充分条件是: 存在 $R > 0$, 满足

$$4rR > \frac{(1 + R\beta_1)^2}{\rho_1},$$

即满足

$$4rR > \frac{(1+Rr\rho_1)^2}{\rho_1},$$

即

$$(1-Rr\rho_1)^2 < 0,$$

这也是不能实现的.

由于鲁里叶的准则 II 是从准则 I 中,让 $A_k \to 0$, 即取 $A_k = 0$ 而得出的. 由于我们已经指出,使准则 I 成立的正数 A_k 根本不存在,因而在准则 I 中,对 A_k 取极限也是无意义的,所以,在准则 I 中取极限,来证明准则 II 成立,这种推理是错误的.

对于一般系统 (7.1)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}f(\sigma),$$
$$\sigma = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$$

而言,马尔金的判别准则是:

若存在一实系数的负定二次型

$$\omega = -\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x},$$

使得 $Z(\boldsymbol{x}, f) = \boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{c}'A + 2\boldsymbol{b}'P)\boldsymbol{x}f - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{b}f^2$ 是关于变元 $\boldsymbol{x}, f$ 的正定二次型, 则 (7.1) 在角 $(0, \infty)$ 内绝对稳定. 其中 P 是由 $A'P + PA = -B$ 唯一确定的正定的对称方阵.

对 $n = 1$ 的系统,

$$\frac{dx}{dt} = ax + bf(\sigma), \quad (a < 0)$$
$$\sigma = cx \tag{7.7}$$

而言,上述的准则是不能实现的.

事实上,令 $B = (\alpha)$, $\alpha > 0$, 可求出 $P = \left(-\frac{\alpha}{2a}\right)$, 此时, 马尔金的充分条件为: 存在一正数 α, 使

$$Z(x, f) = \alpha x^2 - \left(ca + 2b\frac{-\alpha}{2a}\right)xf - cbf^2$$

是 x, f 的正定二次型,即使

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \frac{1}{2}\left(\frac{b\alpha}{a} - ca\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{b\alpha}{a} - ca\right) & -cb \end{vmatrix} > 0.$$

即

$$\begin{aligned} \Delta &= -cb\alpha - \frac{1}{4}\left(\frac{b\alpha}{a} - ca\right)^2 \\ &= -cb\alpha - \frac{b^2\alpha^2}{4a^2} + \frac{1}{2}cb\alpha - \frac{1}{4}c^2a^2 \\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{b\alpha}{a} + ca\right)^2 > 0, \end{aligned}$$

这是不能实现的.

以上的充分条件,都是用建立形如

$$V = \boldsymbol{x}'P\boldsymbol{x} + \int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma$$

的李雅普诺夫函数,使 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.1)}$ 是变量 $\boldsymbol{x}, f$ 的负定二次型得到的,在系统 (7.1) 中, $\boldsymbol{x}$ 是独立变量, σ 是中间变量,为了保证 (7.1) 的零解是全局渐近稳定的,只要 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.1)}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的负定函数,由于 $f(\sigma)$ 的任意性,要判断 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.1)}$ 是变量 $\boldsymbol{x}$ 的负定函数是较困难的. 因此,就用使 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.1)}$ 是变量 $\boldsymbol{x}, f$ 的负定函数. 但是,这样做的结果,实际上把 σ 看成是独立的变量,即把研究 (7.1) 的零解的稳定性问题化成研究系统:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}f(\sigma), \\ \dot{\sigma} = \boldsymbol{c}'A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}'\boldsymbol{b}f(\sigma) \end{cases} \tag{7.8}$$

的零解的稳定性问题,在 (7.8) 中,取 $f(\sigma) = \sigma$,就可以看出 (7.8) 的零解在任何情况下都不能是渐近稳定的. 因此,用它们的方法得出的充分条件必然都是不能实现的. 事实上,系统 (7.1) 与系统 (7.8) 是不等价的. 我们必须直接研究 (7.1) 的零解的绝对稳定性,即必须把 σ 看成是中间变量.

下面给出直接调节系统的稳定性准则. 预备知识:

(a) 考虑 $\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}$, 如果 A 的所有的特征值都具有负实部, 那么, 对无论怎样预先给定的负定的二次型 $w=-\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x}$, 都存在一个且只有一个二次型 $U=\boldsymbol{x}'P\boldsymbol{x}$, 满足 $\frac{dU}{dt}=w$. 并且这个 U 一定是正定的.

也就是说, 对任一对称的正定的方阵 B, 都存在唯一的一个正定的对称方阵 P, 使 $A'P+PA=-B$ 成立.

(b) 对任一正定的二次型 $\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x}$, 都有一非奇异的线性变换 $\boldsymbol{x}=H\boldsymbol{y}$, 能将 $\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x}$ 化成法式 $\boldsymbol{y}'E\boldsymbol{y}$.

也就是说, 对任一正定的对称方阵 B, 都存在非异的方阵 H, 使 $H'BH=E$, E 是单位方阵, 显然

$$HH'=B^{-1}.$$

(c) **全局渐近稳定性定理 (LBK 定理)**

对系统 (7.1), 若存在无穷大的正定函数 $V(\boldsymbol{x})$, 使 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.1)}$ 负定, 则系统 (7.1) 的零解全局渐近稳定.

定理 7.1: 若存在一个负定的实系数二次型

$$w=-\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x},$$

满足条件:

(1) 当 $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}=0$ 时, $u(\boldsymbol{x})\geqslant 0$.

其中 $u(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{c}'A+2\boldsymbol{b}'P)\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}'\boldsymbol{b}$, 而 P 是由

$$A'P+PA=-B$$

所决定的正定的对称方阵.

(2) $\boldsymbol{c}'B^{-1}(A'\boldsymbol{c}+2P\boldsymbol{b})\leqslant 0$, 则系统 (7.1) 在角 $(0,\infty)$ 内绝对稳定.

这一定理的结果改正了马尔金准则, 在马尔金准则中充分条件是: 二次型

$$Z(\boldsymbol{x},f)=\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{c}'A+2\boldsymbol{b}'P)\boldsymbol{x}f-\boldsymbol{c}'\boldsymbol{b}f^2$$

是变量 $\boldsymbol{x}, f$ 的正定二次型, 即 $u(\boldsymbol{x})=Z(\boldsymbol{x},1)$ 在整个 $\boldsymbol{x}$ 空间都

取正值，而这里的充分条件是只要 $u(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}$ 空间的一个 $n-1$ 维子空间，即这个空间中的一张超平面 $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}=0$ 上非负．这就大大减弱了充分条件．

在定理证明之前，也以 $n=1$ 为例来实现一下，当 $n=1$ 时，(7.1) 为 (7.7)

$$\dot{x}=ax+bf(\sigma)\quad(a<0),$$

$$\sigma=cx,$$

取 $w=-x'Bx=-\alpha x^2\ (\alpha>0)$，由 $A'P+PA=-B$，得

$$P=\left(-\frac{\alpha}{2a}\right),$$

此时，定理 7.1 的条件为：

(1) 当 $cx=0$ 时，即 $x=0$ 时，

$$u(x)\Big|_{x=0}=\left[\alpha x^2-\left(ca+2b\frac{-\alpha}{2a}\right)x-cb\right]\Big|_{x=0}=-cb\geqslant 0.$$

(2) $c\dfrac{1}{\alpha}\left(ca+2b\dfrac{-\alpha}{2a}\right)=\dfrac{c^2}{\alpha}a-\dfrac{cb}{a}\leqslant 0,$

只要 $cb\leqslant 0$，条件 (1)，(2) 均成立，即 (7.7) 在角 $(0,\infty)$ 内绝对稳定的充分条件是 $cb\leqslant 0$，显然这个充分条件恰好与必要条件一致．

证： 取

$$V(x)=x'Px+\int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma,$$

显然 V 是无穷大的正定函数，又

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(7.1)}=-x'Bx+(c'A+2b'P)xf+c'bf^2,$$

故

$$-\frac{dV}{dt}\Big|_{(7.1)}=x'Bx-(c'A+2b'P)xf-c'bf^2$$

$$\overset{\text{记作}}{=}Z(x,f).$$

由 LBK 定理，为了证明系统 (7.1) 是绝对稳定的，只需证明

对于任何满足条件 (7.2) 的连续函数 $f(\sigma)$, $Z(x, f)$ 在整个 x 空间正定. 即 $Z(x, f(c'x)) > 0 (x \neq 0)$.

引理: 若条件 (1)、(2) 成立,且 $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}_0 > 0$, 则 $u(\boldsymbol{x}_0) > 0$.

证: 作变换

$$\boldsymbol{x} = H\left[\boldsymbol{y} + \frac{1}{2}H'(A'\boldsymbol{c} + 2P\boldsymbol{b})\right], \tag{7.9}$$

就有

$$\begin{aligned}
u(x) = Z(\boldsymbol{x}, 1) &= \boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{c}'A + 2\boldsymbol{b}'P)\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{b} \\
&= \left[\boldsymbol{y} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{c}'A + 2\boldsymbol{b}'P)H\right]H'BH \\
&\quad \times \left[\boldsymbol{y} + \frac{1}{2}H'(A'\boldsymbol{c} + 2P\boldsymbol{b})\right] - (\boldsymbol{c}'A + 2\boldsymbol{b}'P)H \\
&\quad \times \left[\boldsymbol{y} + \frac{1}{2}H'(A'\boldsymbol{c} + 2P\boldsymbol{b})\right] - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{b} \\
&= \left[\boldsymbol{y}' + \frac{1}{2}(\boldsymbol{c}'A + 2\boldsymbol{b}'P)H\right]\left[\boldsymbol{y} + \frac{1}{2}H'(A'\boldsymbol{c} + P\boldsymbol{b})\right] \\
&\quad - (\boldsymbol{c}'A + 2\boldsymbol{b}'P)H\left[\boldsymbol{y} + \frac{1}{2}H'(A'\boldsymbol{c} + 2P\boldsymbol{b})\right] - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{b} \\
&= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - v,
\end{aligned}$$

其中

$$v = \frac{1}{4}(\boldsymbol{c}'A + 2\boldsymbol{b}'P)HH'(A'\boldsymbol{c} + 2P\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}'\boldsymbol{b},$$

考虑 λ 的连续函数

$$g(\lambda) = \boldsymbol{c}'H\left[\lambda\boldsymbol{y}_0 + \frac{1}{2}H'(A'\boldsymbol{c} + 2P\boldsymbol{b})\right],$$

其中 $\boldsymbol{y}_0$ 是 $\boldsymbol{x}_0$ 的对应值,即 $\boldsymbol{x}_0 = H\left[\boldsymbol{y}_0 + \frac{1}{2}H'(A'\boldsymbol{c} + 2P\boldsymbol{b})\right]$, 考虑到条件 (2), 有

$$g(0) = \frac{1}{2}\boldsymbol{c}'HH'(A'\boldsymbol{c} + 2P\boldsymbol{b}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{c}'B^{-1}(A'\boldsymbol{c} + 2P\boldsymbol{b}) \leqslant 0,$$

又因 $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}_0 > 0$,

故 $$g(1) = \boldsymbol{c}'H\left[g_0 + \frac{1}{2}H'(A'\boldsymbol{c} + 2P\boldsymbol{b})\right] = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}_0 > 0,$$

于是一定存在一个 λ_1, $0 \leqslant \lambda_1 < 1$, 使 $g(\lambda_1) = 0$, 即

$$\boldsymbol{c}'H\left[\lambda_1\boldsymbol{y}_0 + \frac{1}{2}H'(A'\boldsymbol{c} + 2P'\boldsymbol{b})\right] = 0. \tag{7.10}$$

于是

$$\begin{aligned}\lambda_1^2\boldsymbol{y}_0'\boldsymbol{y}_0 - \nu &= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}\big|_{\boldsymbol{y}=\lambda_1\boldsymbol{y}_0} - \nu = (\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \nu)\big|_{\boldsymbol{y}=\lambda_1\boldsymbol{y}_0} \\ &= u(\boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}=H\left[\lambda_1\boldsymbol{y}_0+\frac{1}{2}H'(A'\boldsymbol{c}+2P'\boldsymbol{b})\right]},\end{aligned}$$

由 (7.10) 知, 当 $\boldsymbol{x} = H\left[\lambda_1\boldsymbol{y}_0 + \frac{1}{2}H'(A'\boldsymbol{c} + 2P'\boldsymbol{b})\right]$ 时, $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}=0$, 故由条件 (1), 知

$$u(\boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}=H\left[\lambda_1\boldsymbol{y}_0+\frac{1}{2}H'(A'\boldsymbol{c}+2P'\boldsymbol{b})\right]} \geqslant 0.$$

即 $\lambda_1^2\boldsymbol{y}_0'\boldsymbol{y}_0 - \nu \geqslant 0$. 又因 $\boldsymbol{y}_0 \neq 0$, 得 $\boldsymbol{y}_0'\boldsymbol{y}_0 > 0$, 且 $0 \leqslant \lambda_1 < 1$, 故

$$\lambda_1^2\boldsymbol{y}_0'\boldsymbol{y}_0 - \nu < \boldsymbol{y}_0'\boldsymbol{y}_0 - \nu.$$

于是 $u(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \nu\big|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_0} = \boldsymbol{y}_0'\boldsymbol{y}_0 - \nu > \lambda_1^2\boldsymbol{y}_0'\boldsymbol{y}_0 - \nu \geqslant 0$,
故

$$u(\boldsymbol{x}_0) > 0.$$

引理证毕.

现在证明 $-\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.1)} > 0$ $(\boldsymbol{x} \neq 0)$, 分三种情况:

(a) $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} = 0$,

因为 $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} = 0$, 即 $\sigma = 0$, $f(\sigma) = 0$, 故

$$-\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.1)} = \boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x} > 0 \quad (x \neq 0).$$

(b) $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} > 0$,

因为 $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} > 0$, 即 $\sigma > 0$, $f(\sigma) > 0$,故

$$\boldsymbol{c}'\frac{\boldsymbol{x}}{f(\sigma)} = \frac{1}{f(\sigma)}\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} > 0.$$

由引理知 $u\left(\frac{\boldsymbol{x}}{f}\right) > 0$, 于是

$$\begin{aligned}-\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.1)} &= \boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{c}'A + 2\boldsymbol{b}'P)\boldsymbol{x}f - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{b}f^2 \\ &= f^2\left[\frac{\boldsymbol{x}'}{f}B\frac{\boldsymbol{x}}{f} - (\boldsymbol{c}'A + 2\boldsymbol{b}'P)\frac{\boldsymbol{x}}{f} - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{b}\right]\end{aligned}$$

$$= f^2 u\left(\frac{\boldsymbol{x}}{f}\right) > 0.$$

(c) $\mathbf{c}'\boldsymbol{x} < 0$,

因为 $\mathbf{c}'\boldsymbol{x} < 0$，即 $\sigma < 0$，$f(\sigma) < 0$，

$$c'\frac{\boldsymbol{x}}{f} = \frac{1}{f}\mathbf{c}'\boldsymbol{x} > 0,$$

故由引理知 $u\left(\frac{\boldsymbol{x}}{f}\right) > 0$. 于是

$$-\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.1)} = \boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x} - (\mathbf{c}'A + 2\boldsymbol{b}'P)\boldsymbol{x}f - \mathbf{c}'\boldsymbol{b}f^2$$

$$= f^2\left[\frac{\boldsymbol{x}'}{f}B\frac{\boldsymbol{x}}{f} - (\mathbf{c}'A + 2\boldsymbol{b}'P)\frac{\boldsymbol{x}}{f} - \mathbf{c}'\boldsymbol{b}\right]$$

$$= f^2 u\left(\frac{\boldsymbol{x}}{f}\right) > 0.$$

综合上述三种情况，即得 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.1)}$ 负定. 故符合 LBK 定理的条件，所以对于任何满足条件 (7.2) 的连续函数 $f(\sigma)$，(7.1) 的零解是全局渐近稳定的，故 (7.1) 在角 $(0, \infty)$ 内绝对稳定. 定理 7.1 证毕.

定理 7.2: 若存在一个负定的二次型

$$w = -\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x},$$

满足条件:

(1) $\boldsymbol{b}'\mathbf{c} + \boldsymbol{\eta}'B^{-1}\boldsymbol{\eta} - \dfrac{(\mathbf{c}'B^{-1}\boldsymbol{\eta})^2}{\mathbf{c}'B^{-1}\mathbf{c}} \leqslant 0$,

(2) $\mathbf{c}'B^{-1}\boldsymbol{\eta} \leqslant 0$.

其中 $\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2}(A'\mathbf{c} + 2P\boldsymbol{b})$，则 (7.1) 在角 $(0, \infty)$ 内绝对稳定.

证: 这个定理中的条件 (2) 与定理 1 中的条件 (2) 是一样的，因此，只要证明定理 1 中的条件 (1) 成立即可. 即只要证明：当 $\mathbf{c}'\boldsymbol{x}_0 = 0$ 时，$u(\boldsymbol{x}_0) \geqslant 0$ 即可. 为此作变换 (7.9)

$$\boldsymbol{x} = H\left[\boldsymbol{y} + \frac{1}{2}H'(A'\mathbf{c} + 2P\boldsymbol{b})\right],$$

以 $\boldsymbol{y}_0$ 表与 $\boldsymbol{x}_0$ 对应的向量，由 $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}_0 = 0$ 得

$$\boldsymbol{c}'H\boldsymbol{y}_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}'HH'(A'\boldsymbol{c} + 2P\boldsymbol{b}) = 0.$$

因 $HH' = B^{-1}$，且 $\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2}(A'\boldsymbol{c} + 2P\boldsymbol{b})$，即得

$$\boldsymbol{c}'H\boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{c}'B^{-1}\boldsymbol{\eta} = 0,$$

得

$$(\boldsymbol{c}'H\boldsymbol{y}_0)^2 = (\boldsymbol{c}'B^{-1}\boldsymbol{\eta})^2.$$

由哥西不等式，得

$$(\boldsymbol{c}'B^{-1}\boldsymbol{\eta})^2 \leqslant \|\boldsymbol{c}'H\|^2 \cdot \|\boldsymbol{y}_0\|^2,$$

即

$$\boldsymbol{y}_0'\boldsymbol{y}_0 \geqslant \frac{(\boldsymbol{c}'B^{-1}\boldsymbol{\eta})^2}{(\boldsymbol{c}'H)(H'\boldsymbol{c})} = \frac{(\boldsymbol{c}'B^{-1}\boldsymbol{\eta})^2}{\boldsymbol{c}'B^{-1}\boldsymbol{c}}.$$

于是，当 $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}_0 = 0$ 时，

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}_0) &= \boldsymbol{y}_0'\boldsymbol{y}_0 - \nu = \boldsymbol{y}_0'\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{\eta}'B^{-1}\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{b}'\boldsymbol{c} \\ &\geqslant \frac{(\boldsymbol{c}'B^{-1}\boldsymbol{\eta})^2}{\boldsymbol{c}'B^{-1}\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{\eta}'B^{-1}\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{b}'\boldsymbol{c} \\ &= -\left[\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c} + \boldsymbol{\eta}'B^{-1}\boldsymbol{\eta} - \frac{(\boldsymbol{c}'B^{-1}\boldsymbol{\eta})^2}{\boldsymbol{c}'B^{-1}\boldsymbol{c}}\right]. \end{aligned}$$

故由本定理的条件 (1) 知 $u(\boldsymbol{x}_0) \geqslant 0$，即定理 7.1 的条件成立，所以 (7.1) 在角 $(0, \infty)$ 内绝对稳定。

第十五章　在锁相技术中的应用

锁相技术作为一门新技术，近几年来在无线电通讯、雷达、空间技术等各方面都已得到广泛的应用．很多实际和理论工作者都是从事于二阶锁相环路的设计和理论分析，到目前为止，对三阶环路的研究还很少．但即使在分析二阶锁相环路的工作中，绝大部分都是考虑规格化的鉴相特性其最大值为 1 或有限的情形，例如余弦特性、三角形或锯齿形的鉴相特性就是这一类，又如在 [1] 中曾考虑了鉴相特性是有界的周期的奇函数的情形，然而对具有正切鉴相特性的锁相环路的研究在文献中却很少见到，根据实际工作者反映，当他们分析具有正切鉴相特性的锁相环路时，发现很少有失锁点，环路都能锁住．但为什么会出现这种现象，还没有见到理论上的论证！本文对这种锁相环路给予定性分析，从数学上提供了为什么具有正切鉴相特性的锁相环路没有失锁点的理论根据．

§1．几种锁相环路方程[2]

按照下列方块图来导出我们所要研究的几种环路方程：

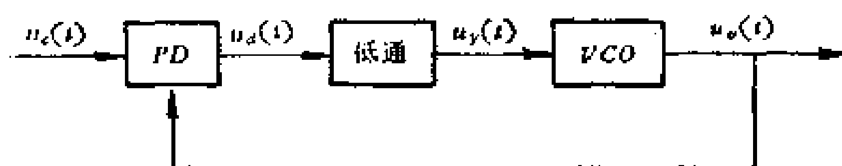


图 1　锁相环路方块图

输入信号

$$u_c(t) = U_{cm}\sin(\omega_c t + \varphi_c), \tag{1.1}$$

其中 ω_c 和 φ_c 是常量；

输出信号

$$u_v(t) = U_{vm}\sin(\omega_c t + \varphi_v(t)), \tag{1.2}$$

鉴相器 (PD) 输出电压

$$u_d(t) = U_{dm}F(\varphi), \tag{1.3}$$

其中 $F(\varphi)$ 是规格化的鉴相特性，$F(\varphi) = \tan\varphi$，相位差

$$\varphi = \varphi_c(t) - \varphi_c.$$

低通滤波器输出电压

$$u_y(t) = K_F(s)u_d(t). \tag{1.4}$$

$K_F(s)$ 为低通滤波器的传递函数，S 既是拉普拉斯算子，也是微分符号，我们可以灵活理解，即把 S 看成微分符号时就不妨碍 S 和 t 同时出现在一个式子中，但运算仍可按拉氏变换进行.

根据 VCO 的特性，显然有如下关系：

$$\omega_v = \omega_{v_0} - K_v u_y, \tag{1.5}$$

这里 $-K_v$ 是把 VCO 特性看成是一条斜率为 $-K_v$ 的直线时的斜率值. ω_{v_0} 为 VCO 的自由频率(即不加控制电压 ($u_y=0$) 时 VCO 的频率)，它是常数. 按 (1.2) 式应有

$$\omega_v = \frac{d}{dt}(\omega_c t + \varphi_v(t)) = \omega_c + \frac{d\varphi_v}{dt},$$

由 (1.5) 得

$$\omega_c + S\varphi_v = \omega_{v_0} - K_v u_y. \tag{1.6}$$

注意到 $S\varphi_c = 0$；记 $\omega_{v_0} - \omega_c = \Omega_0$，这是开环频率差，及 $u_y = K_F(S)U_{dm}\tan\varphi$，那么 (1.6) 就可改写成

$$S\varphi + K_v U_{dm} K_F(S)\tan\varphi = \Omega_0.$$

而 $K_v U_{dm} = \Omega_c$ 是 VCO 的最大频移，被称为同步带，最终就得到了我们所要的具有正切鉴相特性的基本环路方程

$$S\varphi + \Omega_c K_F(S)\tan\varphi = \Omega_0. \tag{1.7}$$

这个方程的物理意义很明确.

Ω_0 为开环频率差，是常数.

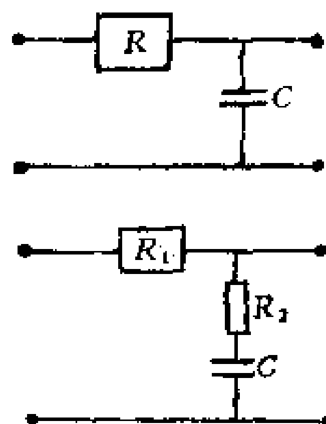
$S\varphi = \dfrac{d\varphi}{dt}$ 是闭环频率差，也可以叫剩余频率差. 一般说来，

它是时间 t 的函数，用 $S\varphi = \frac{d\varphi}{dt} = \Omega$ 表示.

$\Omega_c K_F(S)\tan\varphi$ 是环路闭合后，控制电压 u_y 作用于 VCO 上所引起的频率变化．由于 ω_c 是常数，因此 VCO 的频率变化就是输入输出信号频差的变化，由于它是由控制电压 u_y 引起的，故用 Ω_y 表示之，叫做控制频差，所以 (1.7) 表明

$$\Omega\,(\text{剩余频差}) + \Omega_y\,(\text{控制频差}) = \Omega_c\,(\text{开环频差}).$$

此外，从 (1.7) 立即看出方程的阶数取决于低通滤波器的传递函数 $K_F(S)$．我们现在针对下列几种滤波器来立出环路方程：



1. 当采用 RC 积分滤波器，其传递函数为

$$K_F(S) = \frac{1}{TS+1},\quad T = RC.$$

代入 (1.7) 得

$$S\varphi + \Omega_c\frac{1}{TS+1}\tan\varphi = \Omega_0,$$

经整理得

$$S^2\varphi + \frac{1}{T}S\varphi + \frac{1}{T}\Omega_c\tan\varphi = \Omega_0\frac{1}{T}.$$

记 $\alpha = \frac{1}{T}$，$\gamma = \frac{1}{T}\Omega_c$，$\beta = \frac{1}{T}\Omega_0$，即得

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \alpha\frac{d\varphi}{dt} + \gamma\tan\varphi = \beta. \qquad \text{(I)}$$

显见，$\alpha > 0$，$\beta > 0$，$\gamma > 0$.

2. 当采用 RC 比例积分滤波器，此时传递函数为

$$K_F(S) = \frac{mTS+1}{TS+1},\quad T = (R_1+R_2)C,\quad m = \frac{R_2}{R_1+R_2},$$

代入 (1.7) 得

$$S\varphi + \Omega_c\frac{mTS+1}{TS+1}\tan\varphi = \Omega_0,$$

经整理后，得到

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\alpha + \Omega_c m\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dt} + \gamma\tan\varphi = \beta. \qquad \text{(II)}$$

3. 当采用无源比例积分滤波器，此时传递函数为

$$K_F(S) = K_F \frac{S+\alpha}{S+\beta},$$

其中

$$K_F = \frac{R_2}{R_1+R_2}, \quad \alpha = \frac{1}{R_2C} = \frac{1}{mT}, \quad \beta = \frac{1}{T} = \frac{1}{(R_1+R_2)C},$$

将 $K_F(S)$ 代入 (1.7) 得

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\beta + \Omega_c K_F \frac{1}{\cos^2\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dt} + \Omega_c K_F \alpha \tan\varphi = \beta\Omega_0. \quad \text{(III)}$$

4. 当采用有源 RC 比例积分滤波器时，其传递函数为

$$K_F(S) = K_F \frac{S+\alpha}{S+\beta},$$

其中

$$K_F = \frac{R_2}{R_1}, \quad \alpha = \frac{1}{R_2C}, \quad \beta = \frac{1}{AR_0C}, \quad R_0 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2}, \quad \text{(IV)}$$

其环路方程与无源情形的形式一样.

因此对这四种环路方程的定性分析，只要将前二个方程在相柱面上之全局定性结构分析清楚就可以了.

§2. 环路方程(I)的定性分析[4]

考虑

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \alpha\frac{d\varphi}{dt} + \gamma\tan\varphi = \beta, \quad (2.1)$$

这里 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. 令 $Z = \frac{d\varphi}{dt}$, 方程 (2.1) 就化为方程组

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = Z = P(\varphi, Z), \\ \dfrac{dZ}{dt} = -\alpha Z - \gamma\tan\varphi + \beta = Q(\varphi, Z). \end{cases} \quad (2.2)$$

由于方程右端对变量φ而言只包含$\tan\varphi$项,所以我们首先在条形区域$\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2};\ -\infty<Z<\infty\right)$上来讨论。

显然,在条形区域$\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2},\ -\infty<Z<+\infty\right)$上存在唯一的奇点$M\left(\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma},\ 0\right)$,且由(2.2)所确定的方向场为图(2)所示. 图中所画的曲线由$Q(\varphi, Z)=-\alpha-\gamma\tan\varphi+\beta=0$确定,

区域 I: $P>0,\ Q<0$,

区域 II: $P<0,\ Q<0$,

区域 III: $P<0,\ Q>0$,

区域 IV: $P>0,\ Q>0$.

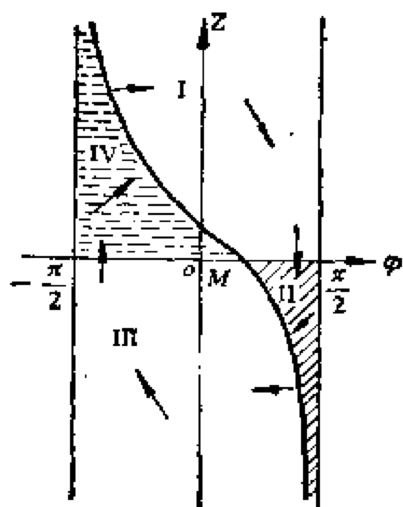


图 2

(A) 现在我们来分析奇点

$$M\left(\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma},\ 0\right)$$

的特性,作变换

$$\begin{cases}\varphi-\bar{\varphi}=\varphi^*, & \bar{\varphi}=\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma}. \\ Z=Z, \end{cases} \tag{2.3}$$

方程(2.2)经变换(2.3)后为

$$\begin{cases}\frac{d\varphi^*}{dt}=Z, \\ \frac{dZ}{dt}=-\alpha Z-\frac{\gamma\left(1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)\tan\varphi^*}{1-\frac{\beta}{\gamma}\tan\varphi^*}.\end{cases} \tag{2.4}$$

其线性部分为

$$\begin{cases}\frac{d\varphi^*}{dt}=Z, \\ \frac{dZ}{dt}=-\gamma\left(1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)\varphi^*-\alpha Z.\end{cases} \tag{2.5}$$

现考虑(2.5)的特征方程

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\gamma\left(1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right) & -\alpha-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+\alpha\lambda+\gamma\left(1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)=0. \quad (2.6)$$

由于 $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, 所以特征方程 (2.6) 的根均具有负实部,故系统 (2.5) 的原点是渐近稳定的. 由定理 4.1 和 5.1[3] 系统 (2.4) 的原点 $\left[\text{即系统 (2.2) 的奇点} \left(\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma},\ 0\right)\right]$ 也是渐近稳定的,并且有下列情况:

1°. 当 $\alpha^2-4\gamma\left(1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)<0$ 时,线性系统 (2.5) 的奇点 (0.0) 是稳定的焦点,而非线性系统 (2.4) 的奇点 (0.0) $\left[\text{即系统 (2.2) 的奇点} \left(\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma},\ 0\right)\right]$, 也是稳定的焦点.

2°. 当 $\alpha^2-4\gamma\left(1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)>0$ 时,线性系统 (2.5) 的奇点 (0.0) 是稳定的结点,而非线性系统 (2.4) 的奇点 (0.0) $\left[\text{即系统 (2.2) 的奇点} \left(\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma},\ 0\right)\right]$ 也是稳定的结点.

(B) 我们现在再进一步分析由方程 (2.2) 在条形区域

$$\left\{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2},\ -\infty<Z<+\infty\right\}$$

上所确定之轨线不可能与直线 $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ 相交, 首先证明下面的一个定理:

定理 1.1: 当 $t=t_0$ 时, 由 $p_0(\varphi_0 Z_0)$ 点出发的方程 (2.2) 的轨线不能与直线 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 相交, 且当 $t\to\infty$ 时, 轨线趋于奇点

$$M\left(\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma},\ 0\right).$$

证: 由 (2.2)

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = Z, \\ \dfrac{dZ}{dt} = -\alpha Z - \gamma \tan\varphi + \beta, \end{cases}$$

故在区域 I 中有

$$\frac{d\varphi}{dt} > 0, \quad \frac{dZ}{dt} < 0.$$

设在区域 I 中，在初始时刻 $t = t_0$，由点 $p_0(\varphi_0, Z_0)$ 出发之方程 (2.2) 的轨线为 Γ，作方程 (2.2) 的控制方程：

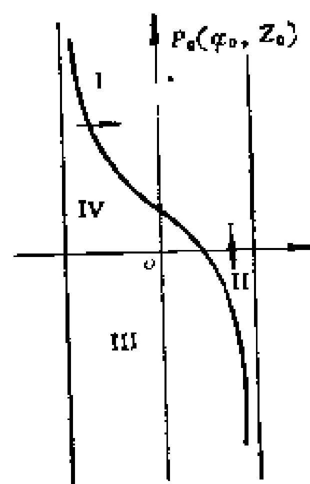


图 3

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi^*}{dt} = Z_0, \\ \dfrac{dZ^*}{dt} = -\gamma \tan\varphi^* + \beta. \end{cases} \tag{2.2*}$$

记方程 $(2.2)^*$ 在 $t = t_0$ 时由点 $p_0(\varphi_0, Z_0)$ 出发的轨线为 Γ^*，则可见 Γ 在 Γ^* 之下方。

方程 $(2.2)^*$ 可直接积分

$$\varphi^*(t) - \varphi^*(t_0) = Z_0(t - t_0),$$

所以

$$\varphi^*(t) = (\varphi_0 - Z_0 t_0) + Z_0 t,$$

$$\frac{dZ^*}{dt} = -\gamma \tan[(\varphi_0 - Z_0 t_0) + Z_0 t] + \beta,$$

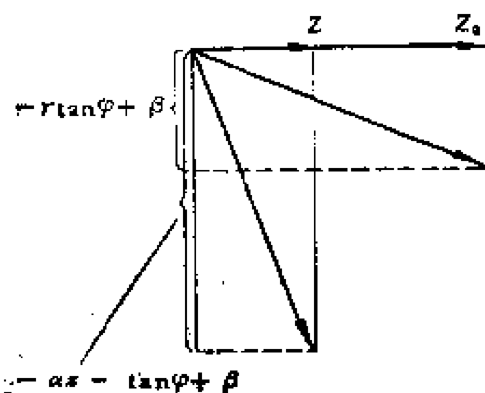


图 4

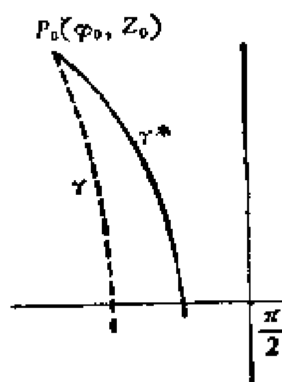


图 5

故

$$
\begin{aligned}
Z^*(t) - Z^*(t_0) &= \beta(t - t_0) \\
&\quad - \gamma \int_{t_0}^{t} \tan[(\varphi_0 - Z_0 t_0) + Z_0 t]\, dt \\
&= \beta(t - t_0) - \frac{\gamma}{Z_0} \int_{t_0}^{t} \tan[(\varphi_0 - Z_0 t_0) \\
&\quad + Z_0 t] d[(\varphi_0 - Z_0 t_0) + Z_0 t] = \beta(t - t_0) \\
&\quad - \frac{\gamma}{Z_0} \int_{\varphi_0}^{\varphi^*} \tan\phi\, d\phi = \beta(t - t_0) + \frac{\gamma}{Z_0} \log\cos\phi \Big|_{\varphi_0}^{\varphi^*} \\
&= \beta(t - t_0) + \frac{\gamma}{Z_0} \log\cos\varphi^* - \log\cos\varphi_0.
\end{aligned}
$$

当 $\varphi^* = \frac{\pi}{2}$，即 $t = t_1 = \frac{1}{Z_0}\left[\frac{\pi}{2} - \varphi_0 + Z_0 t_0\right]$ 时，则 $Z^*(t_1) = -\infty$，所以 $(2.2)^*$ 的轨线，当 $t = t_0$ 时，有 $Z^*(t_0) = Z_0 > 0$；当 $t = t_1$ 时，有 $Z^*(t_1) = -\infty < 0$。因此必定存在 T，$t_0 < T < t_1$，有 $Z^*(T) = 0$。

这就是说当 $t = T$ 时，方程 $(2.2)^*$ 由 p_0 出发的轨线 Γ^* 与 φ 轴相交，其交点为 $(\varphi^*(T), 0)$，并且有

$$
\varphi_0 < \varphi^*(T) < \frac{\pi}{2}.
$$

这是因为在 I 中有 $\frac{d\varphi}{dt} > 0$，故有 $\varphi_0 < \varphi^*(T)$，又

$$
\begin{aligned}
\varphi^*(T) &= (\varphi_0 - Z_0 t_0) + Z_0 T < (\varphi_0 - Z_0 t_0) + Z_0 t_1 \\
&= (\varphi_0 - Z_0 t_0) + Z_0 \frac{1}{Z_0}\left[\frac{\pi}{2} - \varphi_0 + Z_0 t_0\right] \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

由于在 I 中，当 $t = t_0$ 时，通过 $p_0(\varphi_0 Z_0)$ 点的方程 (2.2) 的轨线 Γ 不能穿过 Γ^*，也不能穿过等倾线

$$
Q = -\alpha Z - \gamma \tan\varphi + \beta = 0,
$$

所以在 $t = t_0$ 时过点 $p_0(\varphi_0, Z_0)$ 的 (2.2) 的轨线 Γ 有二种可能：

(i) 在 I 中经无限时间趋于奇点 $M\left(\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma}, 0\right)$，

(ii) 在 I 中经有限时间与 φ 轴相交，交点为 $(\varphi_{r_1}, 0)$，其中

$$\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma} < \varphi_{r_1} < \varphi^*(T).$$

由于在 II 中 $\frac{d\varphi}{dt} < 0$，$\frac{dZ}{dt} < 0$，故轨线 Γ 在 II 中不能与 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 相交，而是经过有限时间穿过等倾线 $Q = 0$ 进入区域 III 中。III 与 I 的讨论类似。或在 III 中 Γ 经无限时间趋于奇点

$$\left(\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma},\ 0\right);$$

或经有限时间与 φ 轴相交，其交点为 $(\varphi_{\Gamma_2}, 0)$，其中有

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_{\Gamma_2} < \tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma};$$

在后一种情况轨线进入区域 IV，然后再进入 I，在区域 I 中可以如前同样讨论。但最终亦是趋于奇点 $M\left(\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma},\ 0\right)$.

(C) 由于 $\frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0$，$\frac{\partial Q}{\partial z} = -\alpha$，

故方程 (2.2) 在 $\left\{-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, -\infty < Z < +\infty\right\}$ 上所定义之速度场的发散量 $\operatorname{div}X = \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{\partial Q}{\partial Z} = -\alpha \neq 0$，根据本迪克森 (Bendixson) 判据知在上述条形区域上不存在由 (2.2) 的轨线组成的闭回路。

到目前为止，我们仅分析了方程 (2.2) 在条形区域

$$\left\{-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2},\ -\infty < Z < +\infty\right\}$$

上之轨线之全局相图，可是方程 (2.2) 的右端在直线

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{2} \text{ 及 } \varphi = \frac{3}{2}\pi$$

上是没有定义的，因此为了弄清环路方程 (I) 在整个相柱面

$$\left\{-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3}{2}\pi,\ -\infty < Z < +\infty\right\}$$

上的相图,在考虑方程 (2.2) 的同时，我们必须还要考虑

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = Z\cos\varphi, \\ \dfrac{dZ}{dt} = (\beta - \alpha Z)\cos\varphi - \gamma\sin\varphi. \end{cases} \tag{2.7}$$

首先我们指出:

(i) 当 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ 时,方程(2.7)与方程(2.2)所确定的方向场是一致的，当 $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3}{2}\pi$ 时，方程 (2.7) 与方程 (2.2) 所确定的方向场的斜率一样,但方向相反.

(ii) 方程 (2.7) 的右端在 $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ 上都有定义，且由 (2.7) 得

$$\frac{d\varphi}{dZ} = \frac{Z\cos\varphi}{(\beta - \alpha Z)\cos\varphi - \sin\varphi},$$

显见 $\varphi = \pm\frac{1}{2}\pi$, $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ 是此微分方程所定义的积分曲线,由此立即看出方程 (2.2) 不存在绕相柱面的第二类周期解.

(iii) 由于 (2.7) 的右端是 φ 的周期为 2π 的周期函数,所以在上述相柱面上方程 (2.7) 有两个奇点: $M\left(\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma}, 0\right)$(稳定的), $M_1\left(\pi + \tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma}, 0\right)$(不稳定的).

综合上述，我们可以得到环路方程 (I) 所确定的积分曲线在展开的相柱面

$$\left\{-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3}{2}\pi, -\infty < Z < +\infty\right\}$$

上的拓扑结构．就情形 1° 而言．(2.7) 的轨线之全局相图如下:

由 (i) 可知,对方程 (2.2) 而言,奇点 M 是渐近稳定的.

由上面的定性分析，我们可以得到下面结论：对锁相环路方程 (I) 而言,既不存在跳周现象,而且总是能锁住.

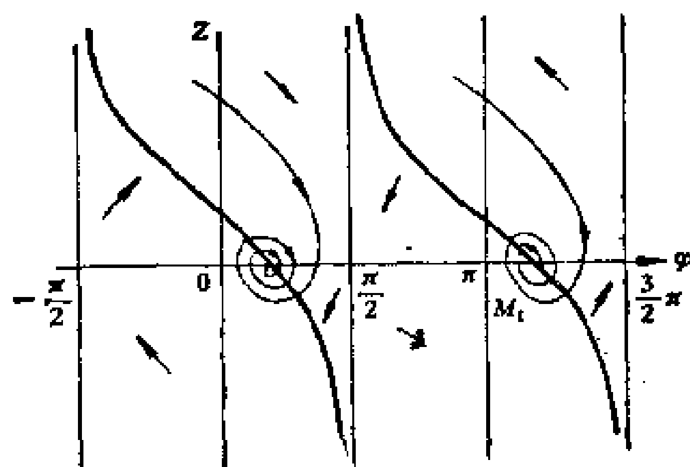


图 6

§3. 环路方程(II)的定性分析[4]

考虑方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\left(\alpha+\Omega_c m\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dt}+\gamma\tan\varphi=\beta. \tag{3.1}$$

令 $\frac{d\varphi}{dt}=Z$，则 (3.1) 化为

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dt}=Z=P(\varphi, Z),\\ \dfrac{dZ}{dt}=-(\alpha+\eta\sec^2\varphi)Z-\gamma\tan\varphi+\beta=Q(\varphi, Z).\end{cases} \tag{3.2}$$

这里 $\eta=\Omega_c m$，显见方程 (3.2) 的右端是关于 φ 的周期为 π 的周期函数，因此我们首先在条形区域

$$\left\{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2},\ -\infty<Z<+\infty\right\}$$

上来讨论。

在这条形区域上，由

$$Q(\varphi, Z)=-(\alpha+\eta\sec^2\varphi)Z-\gamma\tan\varphi+\beta=0$$

所确定的曲线为

$$Z = \frac{\beta - \gamma\tan\varphi}{\alpha + \eta(1 + \tan^2\varphi)}. \tag{3.3}$$

显然曲线 (3.3) 与 φ 轴的交点为

$$\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right),\ \left(\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma},\ 0\right),\ \left(\frac{\pi}{2},\ 0\right).$$

它与 Z 轴的交点为 $\left(0,\ \frac{\beta}{\alpha+\eta}\right)$，因此系统 (3.2) 在条形区域上的方向场由图 (7) 确定.

(A) 分析奇点 $M\left(\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma},\ 0\right)$ 的性质.

作变换

$$\begin{cases} \tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_1,\ \varphi_1 = \tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma}, \\ Z = Z_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

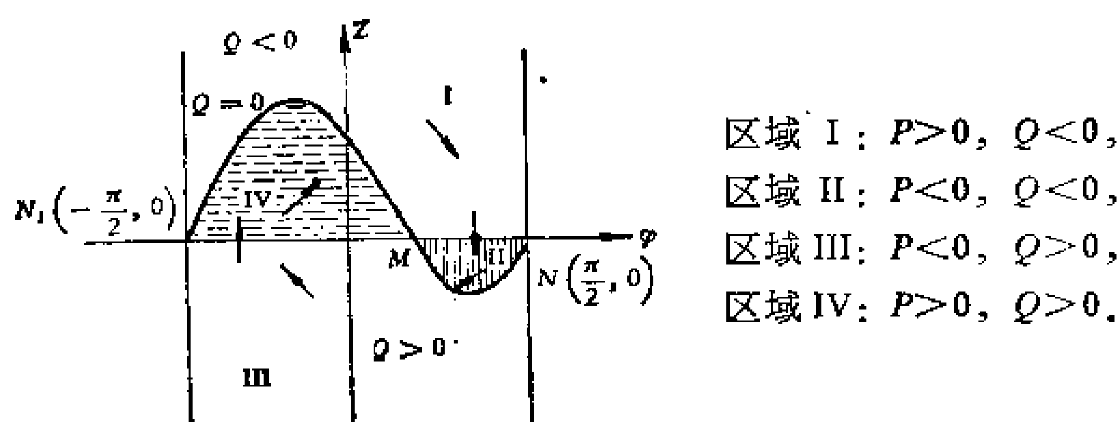


图 7

方程 (3.2) 经变换 (3.4) 后为

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{\varphi}}{dt} = Z, \\ \dfrac{dZ}{dt} = -[\alpha + \eta(1 + \tan^2(\tilde{\varphi} + \varphi_1)]Z \\ \qquad - \gamma\tan(\tilde{\varphi} + \varphi_1) + \beta \end{cases} \tag{3.5}$$

$$= -\left[\alpha + \eta\left(1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right) + 2\eta\frac{\beta}{\gamma}\left(1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)\tan\tilde{\varphi}\right.$$

$$+\cdots\Big]Z-\gamma\left(1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)\tan\tilde{\varphi}+\cdots.$$

其线性系统为

$$\begin{cases}\dfrac{d\tilde{\varphi}}{dt}=Z,\\ \dfrac{dZ}{dt}=-\gamma\left(1+\dfrac{\beta^2}{\gamma^2}\right)\tilde{\varphi}-\left[\alpha+\eta\left(1+\dfrac{\beta^2}{\gamma^2}\right)\right]Z.\end{cases}\tag{3.6}$$

考虑 (3.6) 的特征方程

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -\gamma\left(1+\dfrac{\beta^2}{\gamma^2}\right) & -\left[\alpha+\eta\left(1+\dfrac{\beta^2}{\gamma^2}\right)\right]-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2+\left[\alpha+\eta\left(1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)\right]\lambda+\gamma\left(1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)=0,\tag{3.7}$$

由于 (3.7) 的系数都大于零，故 (3.7) 的根均具有负实部，所以系统 (3.6) 的原点是渐近稳定的，由定理 4.1 和 5.1[3]，系统 (3.5) 的原点 $\left[\text{即系统 (3.2) 的奇点}\left(\tan^{-1}\dfrac{\beta}{\gamma},\ 0\right)\right]$ 也是渐近稳定的，并且有下面的结论:

1°. 当 $\left[\alpha+\eta\left(1+\dfrac{\beta^2}{\gamma^2}\right)\right]^2<4\gamma\left(1+\dfrac{\beta^2}{\gamma^2}\right)$ 时，线性系统 (3.6) 的原点是稳定的焦点，而非线性系统 (3.5) 的原点 $\left[\text{即系统 (3.2) 的奇点}\left(\text{tg}^{-1}\dfrac{\beta}{\gamma},\ 0\right)\right]$ 也是稳定的焦点.

2°. 当 $\left[\alpha+\eta\left(1+\dfrac{\beta^2}{\gamma^2}\right)\right]^2>4\gamma\left(1+\dfrac{\beta^2}{\gamma^2}\right)$ 时，线性系统 (3.6) 的原点是稳定结点，而非线性系统 (3.5) 的原点 $\left[\text{即系统 (3.2) 的奇点}\left(\tan^{-1}\dfrac{\beta}{\gamma},\ 0\right)\right]$ 也是稳定的结点.

这里仍旧如同分析方程 (2.2) 之情况一样，我们可以作同样的控制方程 (2.2)*，来证明方程 (3.2)

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = Z, \\ \dfrac{dZ}{dt} = -(\alpha + \eta\sec^2\varphi)Z - \gamma\tan\varphi + \beta \end{cases}$$

在条形区域

$$\left\{-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2},\ -\infty < Z < +\infty\right\}$$

上所确定之轨线不可能与直线 $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$ 相交，而且有和 (2.2) 一样的定性结论.

再则由于 (3.2) 的右端在 $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$ 时无定义，因此在考虑方程 (3.2) 的同时，我们必须考虑

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = Z\cos^2\varphi, \\ \dfrac{dZ}{dt} = -(\alpha\cos^2\varphi + \eta)Z + \beta\cos^2\varphi - \dfrac{1}{2}\gamma\sin 2\varphi. \end{cases} \tag{3.8}$$

我们指出下面几点

(1) 当 $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{1}{2}\pi < \varphi < \dfrac{3}{2}\pi$ 时，方程 (3.8) 和方程 (3.2) 二者所确定的相轨线是一致的.

(2) 方程 (3.8) 的右端在 $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$ 及 $\varphi = \dfrac{3}{2}\pi$ 上有定义.

(3) 方程 (3.8) 在 $\left\{\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{3}{2}\pi,\ -\infty < Z < \infty\right\}$ 上的相轨线与方程 (3.8) 在 $\left\{-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2},\ -\infty < Z < +\infty\right\}$ 上的相轨线是一样的. 因此我们只要讨论清楚方程 (3.8) 在条形区域 $\left\{-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2},\ -\infty < Z < +\infty\right\}$ 上的相轨线就行了.

容易看出，水平等倾线 (3.3) 与 φ 轴的三个交点 $N_1\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$,

$M\left(\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma},\ 0\right)$及$N\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$就是(3.8)的三个奇点，关于奇点$M$的性质前面已经分析了. 剩下只要分析奇点$N$和奇点$N_1$的性质,但由方程(3.8)可以看出奇点$N$和奇点$N_1$具有同样的性质,因此只要分析奇点$N$的性质就可以了.

(B) 奇点$N\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$的性质. 为了研究奇点$N\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$的性质,作坐标变换

$$\begin{cases}\varphi^* = \varphi - \dfrac{\pi}{2}, \\ Z = Z.\end{cases} \tag{3.9}$$

(3.8)就化为

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi^*}{dt} = Z\sin^2\varphi^* = \Phi(\varphi^*,\ Z), \\ \dfrac{dZ}{dt} = -(\alpha\sin^2\varphi^* + \eta)Z + \beta\sin^2\varphi^* \\ \qquad\qquad + \dfrac{\gamma}{2}\sin 2\varphi^* = \Psi(\varphi^* Z).\end{cases} \tag{3.10}$$

其线性部分为

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi^*}{dt} = 0, \\ \dfrac{dZ}{dt} = \gamma\varphi^* - \eta Z.\end{cases} \tag{3.11}$$

所以特征方程为

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 0 \\ \gamma & -\eta-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 + \eta\lambda = 0,\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -\eta < 0.$$

所以(3.10)的原点 ($\varphi^* = 0,\ Z = 0$) 是李雅普诺夫型奇点，根据[3]知李雅普诺夫型奇点的拓扑结构有四种情形. 就方程 (3.10) 而言,奇点 ($\varphi^* = 0,\ Z = 0$) 到底属于哪一种情形?

由 $\Psi(\varphi^*,\ Z) = 0$ 解出

$$Z = -\frac{\beta\sin^2\varphi^* + \dfrac{\gamma}{2}\sin 2\varphi^*}{\eta + \alpha\sin^2\varphi^*} = u(\varphi^*), \tag{3.12}$$

将其代入 (3.10) 第一式右端得

$$\Phi(\varphi^* u(\varphi^*)) = \frac{\gamma}{\eta}\varphi^{*3} + (\varphi^{*4}). \qquad (3.13)$$

其中 (φ^{*4}) 表示至少为 φ^{*4} 之项的全体. 由此立即看出 $m=3$ 奇数, $g=\frac{\gamma}{\eta}>0$, 奇点 $(\varphi^*=0, Z=0)$ 是鞍点, 这也就是说方程 (3.8) 的奇点 $N\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 是鞍点. 此外,从 (3.8) 得

$$\frac{d\varphi}{dZ} = \frac{Z\cos^2\varphi}{-(\alpha\cos^2\varphi+\eta)Z+\beta\cos^2\varphi-\frac{1}{2}\gamma\sin 2\varphi}, \qquad (3.14)$$

所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ $(Z\neq 0)$ 是此方程的积分曲线, 也就是说存在两条半直线

$$l_1^+: \left(\varphi=\frac{\pi}{2}, \ Z>0\right) \text{和} \ l_1^-: \left(\varphi=\frac{\pi}{2}, \ Z<0\right).$$

它们都是 (3.8) 的积分曲线, 当 t 趋于无穷时, 它们都趋于奇点

$$N\left(\frac{\pi}{2}, \ 0\right).$$

(C) 奇点 $N_1\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 和奇点 $N\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 具有同样的性质, 亦是鞍点, 同样也存在两条分别趋于奇点 $N_1\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 的方程 (3.8) 的积分直线

$$l_2^+: \left\{\varphi=-\frac{\pi}{2}, \ Z>0\right\}, \ l_2^-: \left\{\varphi=-\frac{\pi}{2}, \ Z<0\right\}.$$

(D) 周期解的不存在性.

1°. 根据上面的分析,显然知道不可能存在绕相柱面

$$\left\{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3}{2}\pi, \ -\infty<Z<+\infty\right\}$$

的第二类周期解.

2°. 由 (3.2) 知

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi}=0, \quad \frac{\partial Q}{\partial Z}=-(\alpha+\eta\sec^2\varphi),$$

所以方程 (3.2) 在条形区域

$$\left\{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}, \ -\infty<Z<+\infty\right\}$$

上所定义之速度场的发散量为

$$\operatorname{div}X=\frac{\partial P}{\partial \varphi}+\frac{\partial Q}{\partial Z}=-(\alpha+\eta\sec^2\varphi)<0.$$

根据本迪克森判据知在此域内不存在由 (3.2) 的相轨线组成的闭迴路. 即方程 (3.2) 在此域内不存在第一类周期解.

综合上述，我们就得到了方程 (3.8) 在展开的相柱面

$$\left\{-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3}{2}\pi, \ -\infty<Z<+\infty\right\}$$

上之积分曲线的全局定性结构，在此相柱面上共有四个奇点：

$$N_1\left(-\frac{\pi}{2}, \ 0\right), \ M\left(\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma}, \ 0\right), \ N\left(\frac{\pi}{2}, \ 0\right),$$

$$M_1\left(\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma}+\pi, \ 0\right),$$

例如当

$$\left[\alpha+\eta\left(1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)\right]^2<4\gamma\left(1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)$$

时方程 (3.8) 之全局相图如下：

注： 这里我们只画出 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ 这个条形区域的积分曲线的全局定性结构，至于条形区域 $\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 中的图形与上面画出的完全一样.

上面定性分析的结果，阐明了下面的物理现象：即对锁相环路方程 (II) 而言，环路总是能锁住，而且不存在跳周现象.

上述定性分析的结论对环路方程 III 和 IV 亦适用.

最后我们还要指出，就是在 § 2 中推导环路方程时，一般考虑的输入信号为

$$u_c(t) = U_{cm}\sin(\omega_c t + \varphi_c),$$

其中 ω_c 和 φ_c 为常量，这是输入信号属于频率阶跃的情形；如果考

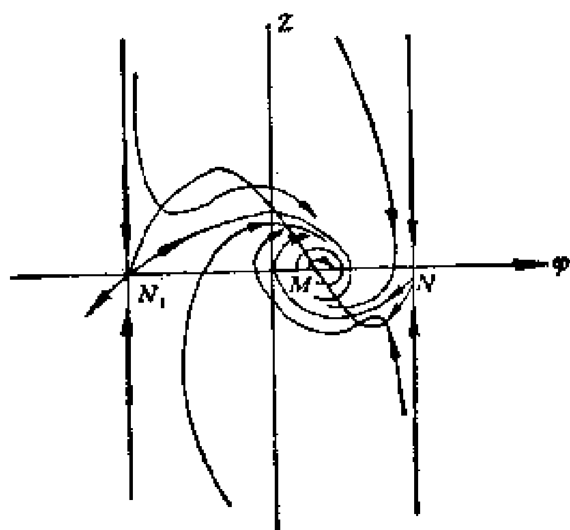


图 8

虑输入信号为频率斜升时，即

$$u_c(t) = U_{cm}\sin\left(\frac{1}{2}Rt^2 + \omega_c t + \varphi_c\right)(R > 0\ \text{常数}),$$

再在环路中采用理想积分滤波器，即其传递函数为

$$K_F(s) = \frac{S + a}{S}.$$

那末根据 (1.7)，即可导出具有正切鉴相特性的环路方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \Omega_c\sec^2\varphi\frac{d\varphi}{dt} + a\Omega_c\tan\varphi = -R. \qquad \text{(V)}$$

显见对这种环路方程的定性研究完全可归并到环路方程 (II) 这一类型，因此它亦有和 (II) 同样的结论.

从上述对环路方程 I. II. III. IV. V. 的定性分析，即可明白，对具有正切鉴相特性的锁相环路，在分别采取上面所述之低通滤波器时，为什么环路没有失锁点，而总是能锁住这个问题我们给予了理论上的证明.

众所周知，锁相环的各种良好特性，都必须在确保锁定状态下才能得到。因此在设计和制作环路时，毫无例外的都必须把确保

锁定作为最重要的任务. 因此,从理论上对上述之环路方程进行定性分析是完全必要的. 至于如何实现具有正切鉴相特性的鉴相器,这是一个线路设计和制作的实际问题.

§4. 柱面上一类微分方程的研究[7]

讨论方程

$$\ddot{\varphi}+f(\varphi)\dot{\varphi}+g(\varphi)=0, \tag{4.1}$$

其中 $f(\varphi)$, $g(\varphi)$ 是周期函数,不失一般性,可以假定其周期为 2π. 首先我们将方程 (4.1) 化为

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt}=z & =\Phi(\varphi,z), \\ \dfrac{dz}{dt}=-f(\varphi)z-g(\varphi) & =Z(\varphi,z). \end{cases} \tag{4.2}$$

由于系统 (4.2) 的右端是 φ 的周期为 2π 的周期函数, 故由点列 $(\varphi+2k\pi, z)$ (k 是整数) 所描述的系统 (4.2) 的物理状态是一致的,如果我们将以上所述的点列均看成是一个点,我们就得到相柱面,实际上它由欧氏平面沿着 $\pm\pi$ 处剪开,然后再在剪开处粘合而成.

关于系统 (4.2) 在柱面 $\bar{H}$:$\{-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi;\ -\infty<z<+\infty\}$ 上的积分曲线的拓扑结构,已经作了很多研究,但是一般都只限于考虑 $f(\varphi)$, $g(\varphi)$ 是周期、有界的情形. 当我们讨论具有正切鉴相特性的连续二阶锁相环路方程[4]

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\alpha\frac{d\varphi}{dt}+\gamma\tan\varphi=\beta \tag{4.3}$$

及

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+(\alpha+\eta\sec^2\varphi)\frac{d\varphi}{dt}+\gamma\tan\varphi=\beta \tag{4.4}$$

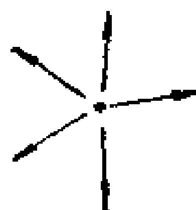
时, 就出现 $f(\varphi)$、$g(\varphi)$ 为周期无界的情形, 上两节中证明了条形域 H_1: $\left\{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2};\ -\infty<\frac{d\varphi}{dt}<+\infty\right\}$ 是方程 (4.3),

(4.4) 的平衡状态的快捕带．即系统 (4.3), (4.4) 的平衡状态在条形域 H 上是全局稳定的． 本节进一步给出系统 (4.2) 的零解在条形域 H 上全局稳定的充分必要条件．

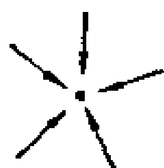
在平面上研究列娜方程的全局稳定性虽有类似的结果[3]，但因柱面与平面有本质不同，因此方程的拓扑图形有本质区别．举例说明之．

在平面上全局稳定的拓扑结构如下：

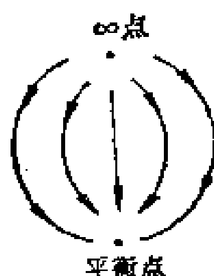
将平面的∞点看作一点，则在∞处有图形：



在平衡点处有图形：



整个球面上有图形：



如地球经度之情形．

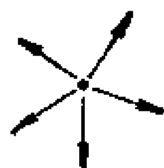
这时两个奇点指数均为 +1，

$$1 + 1 = \sum I(P_i) = \chi(M_2) = 2$$

(参阅球面上的欧拉-庞加莱指数和定理)[3]．

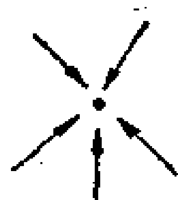
在柱面上研究全局稳定性，则由于柱面与平面有本质不同，因此拓扑图形有本质区别．

柱面两端 ∞ 处各看作一个点，则有两个 ∞ 奇点 P_1, P_2, 柱面加上 P_1, P_2 成一拓扑球形. 如果 P_1, P_2 点都是不稳定的，故有图象:



每个点的指数各为 +1.

在平衡点 o 附近所有的积分曲线都要进去，因此有图象:

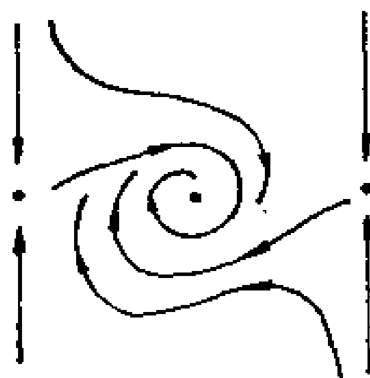


指数也是 +1, 这样有关系

$$1+1+1+x=\sum_i I(P_i)=\chi(\text{柱面}+P_1+P_2)=2,$$

故 $x=-1$. 亦即至少还有一个奇点是鞍点，即在 P_1, P_2 两个 ∞ 点是不稳定的情况下，柱面上要研究全局稳定性，则鞍点是不可少的.

反过来说，加上一个鞍点，如下图:



则沿进入鞍点的两线割开，这个柱面就成为一个平面，不谈进入鞍点的两条线，就得到一个全局稳定. 因此，上述情形下柱面上全局稳定的拓扑图形是

一个稳定结点或焦点，

一个鞍点，

两个 ∞ 处不稳定的焦点或结点.

以上说明在柱面上研究全局稳定性与在平面上研究有着本质的不同，所以我们在柱面上研究这类方程不仅有实际意义，也有理论意义.

定理：讨论系统 (4.2)

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = z & = \Phi(\varphi, z), \\ \dfrac{dz}{dt} = -f(\varphi)z - g(\varphi) = Z(\varphi, z). \end{cases}$$

其中 $f(\varphi)$, $g(\varphi)$ 为 2π 的周期函数，$f(\varphi)$, $g(\varphi)$ 在 $-\pi < \varphi < \pi$ 内连续可微，$g(0) = 0$; $\varphi g(\varphi) > 0$, $f(\varphi) > 0$, 则条件

$$\int_0^{\pm\pi} [f(\varphi) + |g(\varphi)|] d\varphi = \pm\infty$$

为系统 (4.2) 的零解在条形域 H: $\{-\pi < \varphi < \pi;\ -\infty < z < +\infty\}$ 上全局稳定的充分必要条件.

证：首先证明在条形域 H 上不存在围绕奇点的第 I 类极限环，这是因为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -f(\varphi) < 0.$$

下面证明充分性.

(A) 如果有

$$\int_0^{\pm\pi} |g(\varphi)| d\varphi = \pm\infty,$$

这时我们用以下两种方法来证明 (4.2) 的零解在条形域 H 上的全局稳定性.

(I) 作李雅普诺夫函数

$$V = \frac{1}{2} z^2 + \int_0^{\varphi} g(u) du,$$

显然，V 是正定的，$V = c$ 在条形域 H 上为围绕原点的一族闭曲

线，这一族闭曲线有下列性质，当 $c_1 > c_2$ 时，曲线 $V = c_1$ 包含曲线 $V = c_2$ 在其内，当 $c = 0$ 时 $V = 0$ 为原点，当 $c = \infty$ 时，即为 $\varphi = \pm\pi$ 轴。

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(4.2)} = -f(\varphi)z^2 \leqslant 0,$$

在条形域 H 上都成立，并且只有当 $z = 0$ 时，$\frac{dV}{dt} = 0$，而 $z=0$ 不是解，除非 $\varphi = 0$，$z = 0$，即平衡位置，所以系统 (4.2) 的原点在条形域 H 上是全局稳定的。

(II) 作控制方程的方法

由定理条件知，曲线 $\Phi(\varphi, z) = 0$ 及 $Z(\varphi, z) = 0$ 将展开的相柱面分成四个部分（参阅图 (9)，(10)，(11))，其方向场如图，我们假定

$$\lim_{x\to\pi-0} \frac{g(\varphi)}{f(\varphi)} \text{ 及 } \lim_{x\to-\pi+0} \frac{g(\varphi)}{f(\varphi)}$$

存在），

I. $\frac{d\varphi}{dt} > 0$, $\frac{dz}{dt} < 0$,

II. $\frac{d\varphi}{dt} < 0$, $\frac{dz}{dt} < 0$,

III. $\frac{d\varphi}{dt} < 0$, $\frac{dz}{dt} > 0$,

IV. $\frac{d\varphi}{dt} > 0$, $\frac{dz}{dt} > 0$.

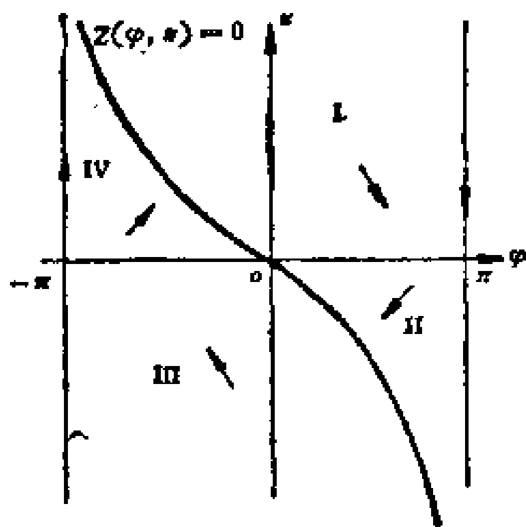


图 9

图 9 相当于

$$\lim_{\varphi\to\pi-0} \frac{g(\varphi)}{f(\varphi)} = +\infty,$$

$$\lim_{\varphi\to\pi+0} \frac{g(\varphi)}{f(\varphi)} = -\infty$$

的情形。

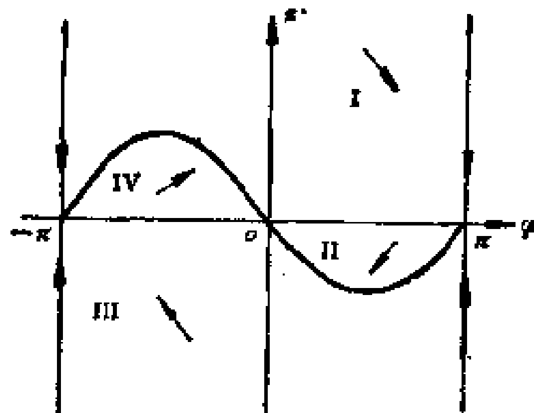


图 10

图 10 相当于

$$\lim_{\varphi\to\pi-0}\frac{g(\varphi)}{f(\varphi)}=0,$$

$$\lim_{\varphi\to-\pi+0}\frac{g(\varphi)}{f(\varphi)}=0$$

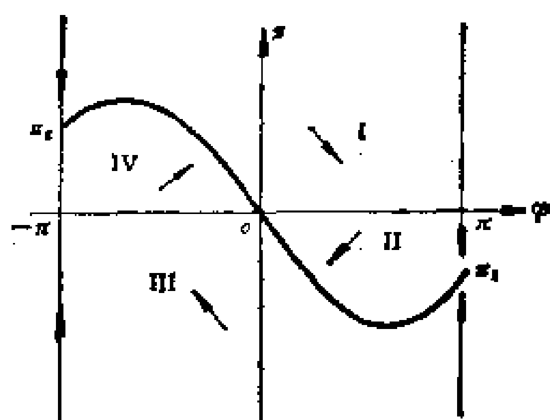


图 11

的情形。图 11 相当于

$$\lim_{\varphi\to\pi-0}\frac{g(\varphi)}{f(\varphi)}=z_1,$$

$$\lim_{\varphi\to-\pi+0}\frac{g(\varphi)}{f(\varphi)}=z_2$$

的情形，这里 z_1, z_2 为常量。

在区域 I 中，由于 $\frac{dz}{dt}<0$，即当 t 增加时，z 减少，所以从 I 中任一点 $P_0(\varphi_0, z_0)$ 出发的 (4.2) 的轨线 $\varphi=\varphi(t)$, $z=z(t)$ 都有 $z\leqslant z_0$。现在要证明当 $t=t_0$ 时通过区域 I 中任一点 $P_0(\varphi_0, z_0)$ 的系统 (4.2) 的轨线不与直线 $\varphi=\pi$ 相交，为此，我们作控制方程

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi^*}{dt}&=z_0,\\ \frac{dz^*}{dt}&=-g(\varphi^*).\end{aligned}\tag{4.5}$$

设控制方程 (4.5) 的当 $t=t_0$ 时通过 $P_0(\varphi_0, z_1)$ 的轨线为 Γ^*，方程(4.2)的当 $t=t_0$ 时通过 $P_0(\varphi_0, z_0)$ 的轨线为 Γ。由于

$$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{(4.2)}\leqslant\left.\frac{d\varphi^*}{dt}\right|_{(4.5)},$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{(4.2)}\leqslant\left.\frac{dz^*}{dt}\right|_{(4.5)},$$

故 Γ 总在 Γ^* 的左侧(图 12, 图 13)。

现在讨论控制方程 (4.5) 的积分曲线，将 (4.5) 写成

$$\frac{dz^*}{d\varphi^*}=-\frac{g(\varphi^*)}{z_0}=G(\varphi^*).\tag{4.6}$$

这里 $G(\varphi^*)=-\frac{g(\varphi^*)}{z_0}$.

由于 $g(\varphi^*)$ 在 $-\pi<\varphi^*<\pi$ 时连续，故在条形域 $-\pi<\varphi^*<\pi$，$-\infty<z<+\infty$ 内给定任一点 (φ_0, z_0)，经过这点必有唯一的一条积分曲线

$$z^*(\varphi^*)=z_0+\int_{\varphi_0}^{\varphi^*}G(\xi)d\xi,$$

由于

$$\lim_{\varphi^*\to\pi-0}\int_{\varphi_0}^{\varphi^*}g(\xi)d\xi=+\infty,$$

故有

$$\lim_{\varphi^*\to\pi-0}\int_{\varphi_0}^{\varphi^*}G(\xi)d\xi=-\infty,$$

所以

$$\lim_{\varphi^*\to\pi-0}z^*(\varphi^*)=z_0+\lim_{\varphi^*\to\pi-0}\int_{\varphi_0}^{\varphi^*}G(\xi)d\xi=-\infty. \tag{4.7}$$

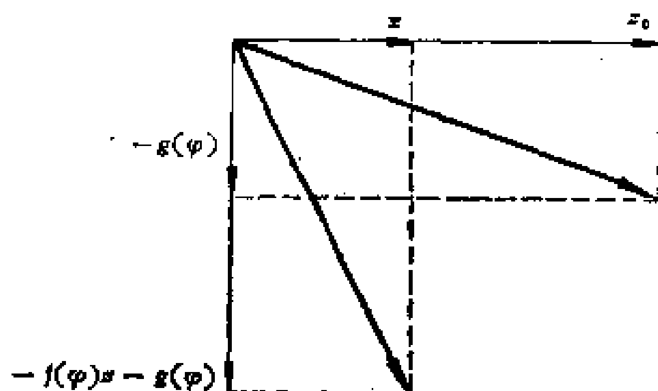


图 12

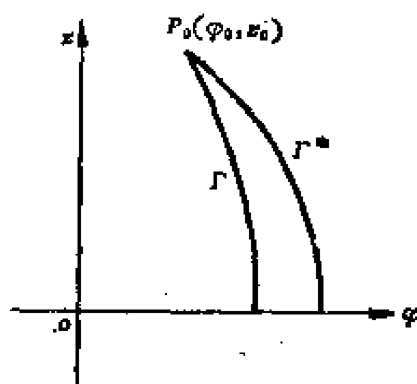


图 13

且在区域 1 中，

当 $\varphi^*<0$ 时，有 $g(\varphi^*)<0$，故有 $G(\varphi^*)>0$，

当 $\varphi^*=0$ 时，有 $g(0)=0$，故有 $G(0)=0$，

当 $\varphi^*>0$ 时，有 $g(\varphi^*)>0$，故有 $G(\varphi^*)<0$.

所以 (4.5) 的积分曲线 Γ^* 当 $\varphi_0<0$ 时，如图 14 所示；当 $\varphi_0>0$ 时，如图 15 所示。

由 (4.7)，

$$\lim_{\varphi^*\to\pi-0}z^*(\varphi^*)=-\infty,$$

故任给 $M>0$，可以找到 $\delta>0$，使当 $\varphi^*>\pi-\delta$ 时，有

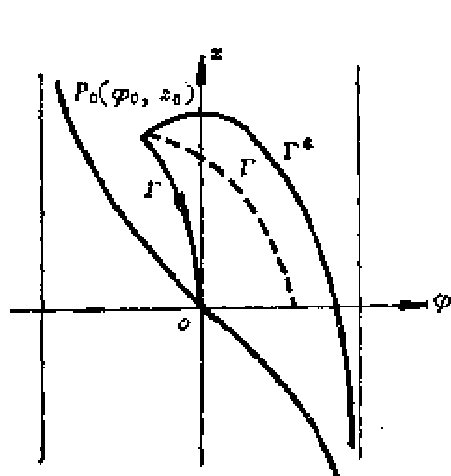


图 14

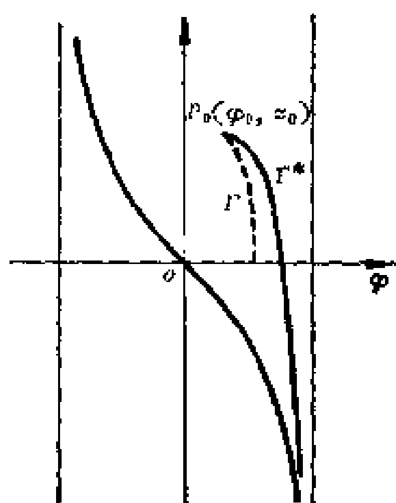


图 15

$$z^*(\varphi^*)<-M.$$

由 (4 5) 中第一个方程，得

$$\varphi^*(t)=\varphi_0+z_0(t-t_0),$$

现在要找 t_1，使 $\varphi^*(t_1)=\pi-\delta$，由上式，得

$$t_1=\frac{1}{y_0}[(\pi-\delta)-(\varphi_0-z_0t_0)].$$

由于当 $t=t_0$ 时，有 $z^*=z_0>0$，

当 $t=t_1$ 时，有 $z^*(\varphi^*(t_1))=z^*(\pi-\delta)<-M<0$，

故存在 T $(t_0<T<t_1)$，使 $z^*(T)=0$. 这就是说，方程(4.5)的由$P_0(\varphi_0, z_0)$ 出发的轨线 Γ^* 经有限时间当 $t=T$ 时与 φ 轴相交，其交点为 $(\varphi^*(T), 0)$，并且有

$$\varphi_0<\varphi^*(T)<\pi.$$

这是因为在 I 中有 $\frac{d\varphi^*}{dt}>0$，故有 $\varphi_0<\varphi^*(T)$，又

$$\varphi^*(T)=(\varphi_0-z_0t)+z_0T<(\varphi_0-z_0t_0)$$
$$+z_0t_1=\pi-\delta<\pi.$$

由于在区域 I 中，当 $t=t_0$ 时，通过 $P_0(\varphi_0, z_0)$ 的方程 (4.2) 的轨线 Γ 不能穿过 Γ^*，也不能穿过等倾线 $Z(\varphi, z)=0$，所以当

$t=t_0$ 时，通过点 $P_0(\varphi_0, z_0)$ 的轨线 Γ 有二种可能:

(i) 区域 I 中经无限时间趋于奇点 (0,0).

(ii) 在区域 I 中经有限时间与 φ 轴相交，交点为 $(\varphi_1, 0)$，其中 $0<\varphi_1<\varphi^*(T)<\pi$. 由于在区域 II 中有 $\frac{d\varphi}{dt}<0$, $\frac{dz}{dt}<0$, 故轨线 Γ 在区域 II 中不能与 $\varphi=\pi$ 轴相交. 而是经过有限时间穿过等倾线 $Z(\varphi, z)=0$ 而进入区域 III 中. 区域 III 与区域 I 的讨论类似. 或在区域 III 中经无限时间趋于奇点 (0,0);或经有限时间与 φ 轴相交,其交点为$(\varphi_2, 0)$,其中 $-\pi<\varphi_2<0$; 在后一种情况，轨线进入区域 IV，然后再进入区域 I，在区域 I 中可以如前同样讨论.即或者积分曲线经无限时间趋于奇点 (0, 0),或者经有限时间与 φ 轴相交,其交点为 $(\varphi_3, 0)$,则一定有 $\varphi_3<\varphi_1$, 这是因为 (0, 0) 是渐近稳定的，并且在条形域 H 上不存在围绕 (0, 0) 的第一类极限环之故.总之,当 $t\to\infty$ 时,积分曲线总趋于奇点 (0,0).

(B) 如果有

$$\int_0^{\pm\pi} f(\varphi)d\varphi=\pm\infty.$$

这时我们作控制方程

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dt}=z,\\[2mm] \dfrac{dz}{dt}=-f(\varphi)z.\end{cases}\tag{4.8}$$

对系统 (4.8) 而言,φ 轴上的每一点都是 (4.8) 的奇点，且在第一象限中,有

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{(4.8)}>\left.\frac{dz}{dt}\right|_{(4.2)},$$

故通过同一点的由系统 (4.2) 所确定的方向场总在由系统 (4.8) 所确定的方向场的下面. 通过点 $P_0(\varphi_0, z_0)$ 的系统 (4.8) 的积分曲线，当 $t\to+\infty$ 时一定趋于 φ 轴上某一点(积分曲线不能通过 $\varphi=\pi$, $z\neq0$). 这是因为当 $z\neq0$ 时,系统 (4.8) 可以写成

$$\frac{dz}{d\varphi}=-f(\varphi),$$

故

$$\lim_{\varphi\to\pi-0} z(\varphi) = -\infty.$$

而 (4.2) 的积分曲线总在 (4.8) 的积分曲线的左边，所以 (4.2) 的积分曲线不能穿过 $\varphi=\pi$ 轴. 往下的证明同情形 (A)，这里不再重复。

以下讨论必要性。

我们先在第一象限考虑，设不然这时有

$$\int_0^\pi [f(\varphi)+g(\varphi)]d\varphi = A > 0.$$

显然 (0,0) 为渐近稳定的，事实上将系统 (4.2) 写成

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -f(0)z - g'(0)\varphi + Z_2(\varphi, z). \end{cases}$$

其中 $Z_2(\varphi, z)$ 为 φ, z 的二次以上的项，其线性部分的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -g'(0) & -f(0)-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + f(0)\lambda + g'(0) = 0,$$

由于 $f(0)>0$, $g'(0)>0$, 故特征方程的根均具有负实部。因此原点是渐近稳定的. 故当点 $P(0, z_0)$ 足够接近于原点时，即当 z_0 足够小时，通过 $P(0, z_0)$ 的系统 (4.2) 的轨线必与 φ 轴相交$\left(\text{这是因为在第一象限中有 } \dfrac{d\varphi}{dt}>0\right)$，如图 16 所示。

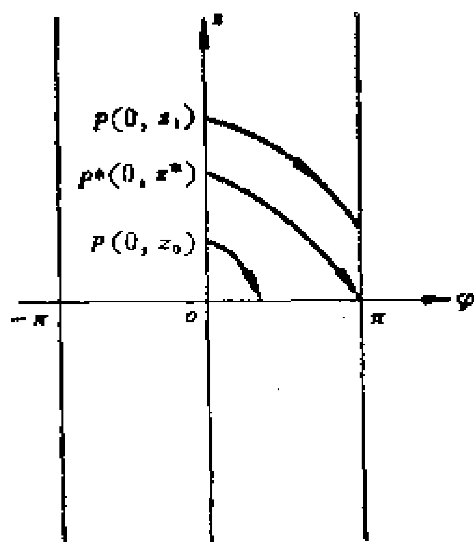


图 16

引理 1: 如果

$$\int_0^\pi [f(\varphi)+g(\varphi)]d\varphi = A > 0,$$

则存在 z_1, 使得通过 $P_1(0, z_1)$ 的系统 (4.2) 的积分曲线必与 $\varphi=\pi$ 轴相交。

证： 因为在第一象限有 $f(\varphi)>0$, $g(\varphi)>0$, $z>0$, 令 $w(\varphi)=f(\varphi)+g(\varphi)$, 故

$$\int_0^\pi w(\varphi)d\varphi=\int_0^\pi[f(\varphi)+g(\varphi)]d\varphi=A.$$

考虑

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dt}=z,\\[2mm] \dfrac{dz}{dt}=-w(\varphi)z-w(\varphi),\end{cases}\tag{4.9}$$

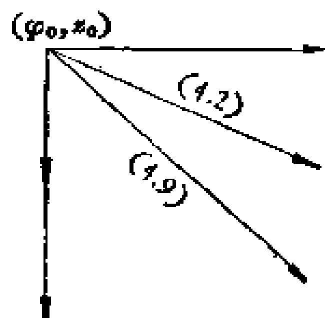
因为

$$f(\varphi)\leqslant w(\varphi),\quad g(\varphi)<w(\varphi),$$

故

$$-f(\varphi)z-g(\varphi)>-w(\varphi)z-w(\varphi).$$

所以通过同一点 (φ_0, z_0) 的系统 (4.9) 的积分曲线，总在系统 (4.2) 的积分曲线之下。



由系统 (4.9) 得

$$\frac{dz}{d\varphi}=\frac{-w(\varphi)(z+1)}{z},$$

即

$$\frac{z}{z+1}dz=-w(\varphi)d\varphi,$$

$$dz-\frac{dz}{z+1}=-w(\varphi)d\varphi.$$

通过 z 轴上任何点 $(0, z_0)$ 的系统 (4.9) 的积分曲线为

$$z-z_0-\log\frac{z+1}{z_0+1}=-\int_0^\varphi w(\varphi)d\varphi.$$

我们要证明，存在 z_1，使 (4.9) 的通过点 $(0, z_1)$ 的积分曲线通过 $(\pi, 0)$ 点。

即要证明存在 z_1，使得

$$-z_1-\log\frac{1}{z_1+1}=-\int_0^\pi w(\varphi)d\varphi=-A.$$

下面我们证明,方程

$$-z_0-\log\frac{1}{z_0+1}=-A \tag{4.10}$$

有解,(4.10)式可以写成

$$\log(z_0+1)=-A+z_0,$$

$$z_0+1=e^{-A}e^{z_0},$$

$$e^{z_0}=e^{A}(z_0+1).$$

令

$$F(z_0)=e^{z_0}-e^{A}(z_0+1),$$

$$F(0)=1-e^{A}<0,$$

$$F(\infty)=\infty>0,$$

故存在 $0<z_1<\infty$,使得 $F(z_1)=0$. 即 z_1 满足

$$-z_1-\log\frac{1}{z_1+1}=-A.$$

因为系统(4.2)的通过 $P_1(0,z_1)$ 的积分曲线总在系统(4.9)的通过 $P_1(0,z_1)$ 的积分曲线之上,故它必与 $\varphi=\pi$ 轴相交,引理1证毕。

现在继续证明定理,因为通过 $P(0,z_0)$ 的系统(4.2)的积分曲线与 φ 轴相交,而通过 $P_1(0,z_1)$ 的系统(4.2)的积分曲线与 $\varphi=\pi$ 轴相交,则根据解对初值的连续依赖性,必存在 z^*,$z_0<z^*<z_1$,使得系统(4.2)的通过 $P^*(0,z^*)$ 的积分曲线通过 $(\pi,0)$ 点。

在第三象限,我们可以得出类似的结果.这时

$$\int_0^{-\pi}[f(\varphi)+|g(\varphi)|]d\varphi=-B<0,$$

因为(0,0)是渐近稳定的,故当 $P_0'(0,-z_0')$ $(z_0'>0)$ 足够接近于原点时,即当 z_0' 足够小时,通过 $P_0'(0,-z_0')$ 的系统(4.2)的轨线必与负 φ 轴相交$\left(这是因为在第三象限,有\ \frac{d\varphi}{dt}<0\right)$,同样我们可以证明以下引理。

引理2: 如果

$$\int_0^{-\pi}[f(\varphi)+|g(\varphi)|]d\varphi=-B<0,$$

则存在 $-z_1'(z_1'>0)$，使得通过 $P_1'(0,-z_1')$ 的系统 (4.2) 的积分曲线必与 $\varphi=-\pi$ 轴相交。

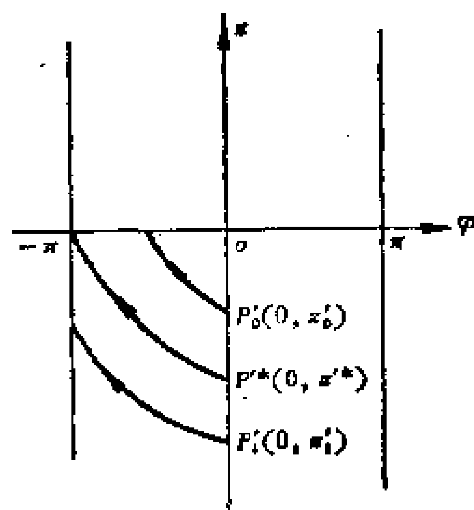


图 17

证： 在第三象限，有

$$f(\varphi)>0,\ g(\varphi)<0,\ z<0.$$

令

$$w_2(\varphi)=f(\varphi)+|g(\varphi)|>0,$$

故

$$\int_0^{-\pi}w_2(\varphi)d\varphi=\int_0^{-\pi}[f(\varphi)+|g(\varphi)|]d\varphi=-B<0.$$

考虑

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dt}=z,\\ \dfrac{dz}{dt}=-w_2(\varphi)z+w_2(\varphi),\end{cases}\tag{4.9$'$}$$

因为

$$f(\varphi)\leqslant w_2(\varphi),\ |g(\varphi)|<w_2(\varphi),$$

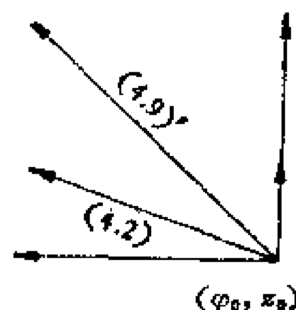
故

$$-w_2(\varphi)<g(\varphi)<w_2(\varphi),\ \text{即}\ -g(\varphi)<w_2(\varphi).$$

所以有

$$-f(\varphi)z-g(\varphi)<-w_2(\varphi)z+w_2(\varphi),$$

即 (4.2) 的积分曲线总在 (4.9)′ 的积分曲线之下。



由系统 (4.9)′ 得

$$\frac{dz}{d\varphi}=\frac{-w_2(\varphi)(z-1)}{z}.$$

即

$$\frac{z}{z-1}dz=-w_2(\varphi)d\varphi,$$

$$\left(\frac{z-1}{z-1}+\frac{1}{z-1}\right)dz=-w_2(\varphi)d\varphi.$$

通过负 z 轴上任何点 $(0,-z_0^*)$ 的 $(4.9)'$ 的积分曲线为

$$z+z_0^*+\log\frac{z-1}{-z_0^*-1}=-\int_0^{\varphi}w_1(\varphi)d\varphi.$$

我们要证明 $(4.9)'$ 的通过点 $(0, z_1')$ 的积分曲线通过 $(-\pi, 0)$ 点。

即要证明存在 z_1'，使

$$z_1'+\log\frac{1}{z_1'+1}=B, \tag{4.10}$$

由引理 1 可知这样的 z_1' 是存在的，因为系统 (4.2) 通过 $P_1'(0, z_1')$ 的积分曲线总在系统 $(4.9)'$ 的通过 $P_1'(0, z_1')$ 的积分曲线的下面，故它必与 $\varphi=-\pi$ 轴相交。引理 2 证毕。

由于通过 $P'(0, z_0')$ 的系统(4.2)的积分曲线与负 φ 轴相交，而通过 $P_1'(0, z_1')$ 的系统 (4.2) 的积分曲线与 $\varphi=-\pi$ 轴相交，根据解对初值连续依赖性，必存在 z'^*，$z_0'<z'^*<z_1'$，使得系统 (4.2) 的通过 $P'^*(0, z'^*)$ 的积分曲线通过 $(-\pi, 0)$ 点。总结起来，有下图，

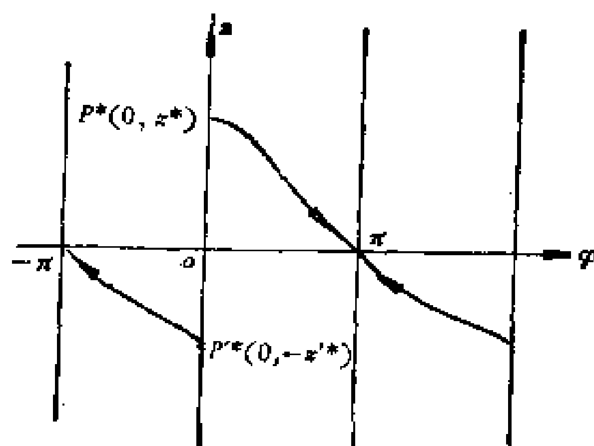


图 18

由此证明了系统 (4.2) 的积分曲线不是全局稳定的，定理证毕。

例 1. 具有正切鉴相特性，采用一般 RC 低通滤波器时的二阶锁相环路方程为

$$\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + \gamma\tan\varphi - \beta = 0, \tag{4.11}$$

这里 $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $\beta > 0$.

作变换

$$\varphi^* = \varphi - \tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma},$$

则方程 (4.11) 化为

$$\ddot{\varphi}^* + \alpha\dot{\varphi}^* + \gamma\,\frac{\left(1 + \dfrac{\beta^2}{\gamma^2}\right)\tan\varphi^*}{1 - \dfrac{\beta}{\gamma}\tan\varphi^*} = 0, \tag{4.12}$$

这里

$$f(\varphi^*) = \alpha > 0, \quad g(\varphi^*) = \frac{A\tan\varphi^*}{1 - \dfrac{\beta}{\gamma}\tan\varphi^*};$$

$$A = \gamma\left(1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right) > 0.$$

显然 $g(0) = 0$,

$$g'(\varphi^*) = \frac{\left(1 - \dfrac{\beta}{\gamma}\tan\varphi^*\right)\dfrac{A}{\cos^2\varphi^*} - A\tan\varphi^*\left(-\dfrac{\beta}{\gamma}\right)\dfrac{1}{\cos^2\varphi^*}}{\left(1 - \dfrac{\beta}{\gamma}\tan\varphi^*\right)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{A}{\cos^2\varphi^*}}{\left(1 - \dfrac{\beta}{\gamma}\tan\varphi^*\right)^2}.$$

故当 $-\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}\dfrac{\beta}{\gamma} < \varphi^* < \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}\dfrac{\beta}{\gamma}$ 时，有

$$\frac{dg(\varphi^*)}{d\varphi^*} > 0,$$

即当 $\varphi^* \neq 0$ 时,满足 $\varphi^* g(\varphi^*) > 0$.

且

$$\lim_{\varphi^*\to\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma}}\int_{\varphi_0}^{\varphi^*}g(u)du=+\infty.$$

这是因为

$$\lim_{\varphi^*\to\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma}}\left(1-\frac{\beta}{\gamma}\tan\varphi^*\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{1-\frac{\beta}{\gamma}\tan\left[\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)-\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma}\right]\right\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(1-\frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)-\tan\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma}}{1+\left[\tan\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma}\right]\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(1-\frac{\beta}{\gamma}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)-\frac{\beta}{\gamma}}{1+\frac{\beta}{\gamma}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}}{1+\frac{\beta}{\gamma}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}=0.$$

同样可证

$$\lim_{\varphi^*\to-\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma}}\int_{\varphi_0}^{\varphi^*}g(u)du=-\infty.$$

故在方程(4.12)中 $f(\varphi^*)$, $g(\varphi^*)$ 为 π 的周期函数, $f(\varphi^*)$, $g(\varphi^*)$, 在 $-\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma}<\varphi^*<\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma}$ 内连续，有 $g(0)=0$, $\varphi^* g(\varphi^*)>0$, $f(\varphi^*)>0$, 且

$$\lim_{\varphi^*\to\pm\pi-\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma}}\int_0^{\varphi^*}[f(\varphi)+|g(\varphi)|]d\varphi=\pm\infty.$$

因此根据上述定理得出：从条形域

$$H^*:\left\{-\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma}<\varphi^*<\frac{\pi}{2}\right.$$

$$-\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma},\ -\infty < \dot{\varphi}^* < +\infty \Big\}$$

上任一点出发的方程 (4.12) 的积分曲线，当 $t\to\infty$ 时，都趋于奇点 (0,0)，也就是说，在条形域

$$H:\ \left\{-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2},\ -\infty < \dot{\varphi} < +\infty\right\}$$

上任何点出发的方程 (4.11) 的积分曲线，当 $t\to+\infty$ 时，都趋于奇点 $\left(\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma},\ 0\right)$，所以这就证明了具有正切鉴相特性的这种二阶锁相环路的快捕带是整个条形域。

例 2. 具有正切鉴相特性，采用 RC 比例积分滤波器时的二阶锁相环路方程为

$$\ddot{\varphi} + (\alpha + \eta\sec^2\varphi)\dot{\varphi} + \gamma\tan\varphi - \beta = 0. \tag{4.13}$$

这里 $\alpha > 0$, $\eta > 0$, $\gamma > 0$, $\beta > 0$.

作变换

$$\varphi^* = \varphi - \tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma},$$

则方程 (4.13) 化为

$$\ddot{\varphi}^* + \left[\alpha + \eta + \eta\left(\frac{\tan\varphi^* + \frac{\beta}{\gamma}}{1 - \frac{\beta}{\gamma}\tan\varphi^*}\right)^2\right]\dot{\varphi}^*$$

$$+\frac{\gamma\left(1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)\tan\varphi^*}{1-\frac{\beta}{\gamma}\tan\varphi^*} = 0, \tag{4.14}$$

故

$$f(\varphi^*) = \alpha + \eta + \eta\left(\frac{\tan\varphi^* + \frac{\beta}{\gamma}}{1 - \frac{\beta}{\gamma}\tan\varphi^*}\right)^2 > 0,$$

$$g(\varphi^*) = \gamma \frac{\left(1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)\tan\varphi^*}{1-\frac{\beta}{\gamma}\tan\varphi^*}.$$

所以 $f(\varphi^*)$，$g(\varphi^*)$ 满足上述定理的条件，且

$$\lim_{\varphi^*\to\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma}} \frac{g(\varphi^*)}{f(\varphi^*)} = 0.$$

即 $\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma},\ 0\right)$，$\left(-\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma},\ 0\right)$ 为鞍点。

所以从条形区域

$$H^*: \left\{-\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma} < \varphi^* < \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma},\ -\infty < \dot{\varphi}^* < +\infty\right\}$$

上任何点出发的方程 (4.14) 的积分曲线，当 $t\to\infty$ 时，都趋于奇点 (0,0)。也就是说在条形域

$$H: \left\{-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2},\ -\infty < \dot{\varphi} < \infty\right\}$$

上任何点出发的方程 (4.13) 的积分曲线，当 $t\to\infty$ 时，都趋于奇点 $\left(\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma},\ 0\right)$。

例 3. 研究系统

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = z & = \Phi(\varphi,\ z), \\ \dfrac{dz}{dt} = -\alpha z - g(\varphi) = Z(\varphi,\ z), \end{cases} \tag{4.15}$$

假设 $g(\varphi)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续，且为 2π 的周期函数，$g(0)=0$，$g'(0)\neq 0$，当 $\varphi\neq 0$ 时，$\varphi g(\varphi) > 0$，$g(\pi)=0$，$\alpha > 0$。

这时 $o(0,0)$，$o_1(-\pi,0)$，$o_1'(\pi,0)$ 为奇点，且 $o(0,0)$ 为稳定焦点或结点，$o_1(-\pi,0)$ 及 $o'(\pi,0)$ 为鞍点。

由于 $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial Z}{\partial z} = -\alpha < 0$，故系统 (4.15) 不存在围绕奇点

的第 I 类极限环．如果存在围绕相柱面的第 II 类极限环的话，则这种第 II 类极限环是唯一的，稳定的．并且这种第 II 类极限环必整条地位于上半柱面或整条地位于下半柱面(证明类似于 [6]，这里证明从略)．

设

$$\int_0^{\pi} g(\varphi)d\varphi = A, \quad \int_0^{-\pi} g(\varphi)d\varphi = B.$$

以下分三种情况讨论之，

1. $A = B$，

当 $\alpha = 0$ 时，(4.15) 式为

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -g(\varphi), \end{cases} \tag{4.16}$$

(4.16) 可以写成

$$\frac{dz}{d\varphi} = -\frac{g(\varphi)}{z}, \text{ 故 } \frac{1}{2} z^2 = -\int_0^{\varphi} g(u)du + c.$$

即

$$z^2 = -2\int_0^{\varphi} g(u)du + 2c.$$

记

$$Y = -2\int_0^{\varphi} g(u)du + 2c,$$

$$Y' = -2g(\varphi)\begin{cases} < 0, \text{ 当 } \varphi > 0, \\ > 0, \text{ 当 } \varphi < 0, \end{cases}$$

$$Y(-\pi) = Y(\pi) = -2A + 2c.$$

系统 (4.16) 的积分曲线如图 19 所示．因为由 (4.15) 得

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{dz}{d\varphi}\right) = -1,$$

所以当 α 增加时，系统 (4.15) 的方向场按顺时针方向旋转，当 $\alpha \neq 0$ 时，系统 (4.15) 的积分曲线的拓扑结构如图 20 所示．

这时原点不是全局稳定的，在相柱面上有测度为零的积分曲

线趋于鞍点.

2. $A > B$,

这时系统(4.16)的积分曲线如图21所示.

由于当α增加时,系统(4.15)的积分曲线按顺时针方向旋转,不难证明存在$\alpha_0>0$,当$\alpha<\alpha_0$时,系统(4.15)在下半柱面存在唯一稳定的第II类极限环.这时系统(4.15)的积分曲线的拓扑结构如图22所示.当$\alpha=\alpha_0$时,此极限环上升为通过鞍点o_1及o_1'的分界线环.当$\alpha>\alpha_0$时,此分界线环消失,这时系统(4.15)的积分曲线的拓扑结构如图20所示.

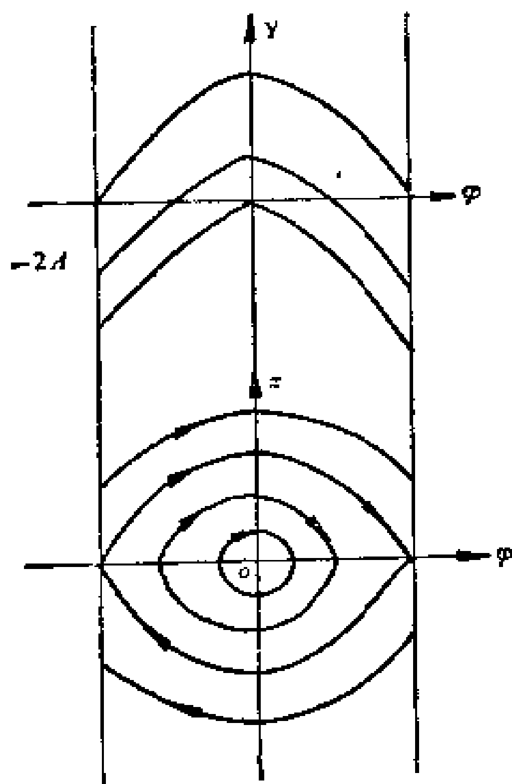


图 19

总结以上所述,在$A > B$的情况下,系统(4.15)的平衡位置$o(0, 0)$在整个条形域H上总不是全局稳定的.

3. $A < B$,

这时系统(4.16)的积分曲线如图23所示.

不难证明,存在$\alpha_0^* > 0$,当$\alpha < \alpha_0^*$时,系统(4.15)在上半柱面存在唯一稳定的第II类极限环.当$\alpha = \alpha_0^*$时,此极限环下降为通过鞍点o_1,o_1'的分界线环,当$\alpha > \alpha_0^*$时,此分界线环消失.这时积分曲线拓扑结构如图20所示.不难看出,当$A < B$时,系统(4.15)的平衡位置$o(0, 0)$在整个条形域H上总不是全局稳定的.

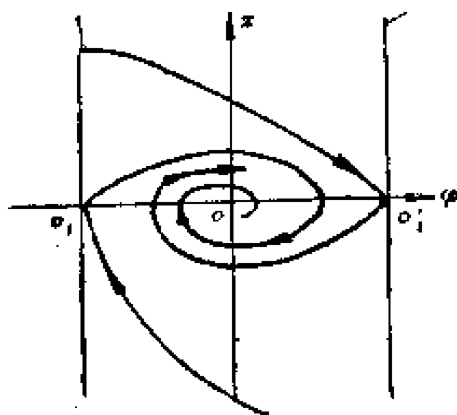


图 20

系统(4.15)相当于系统(4.2)

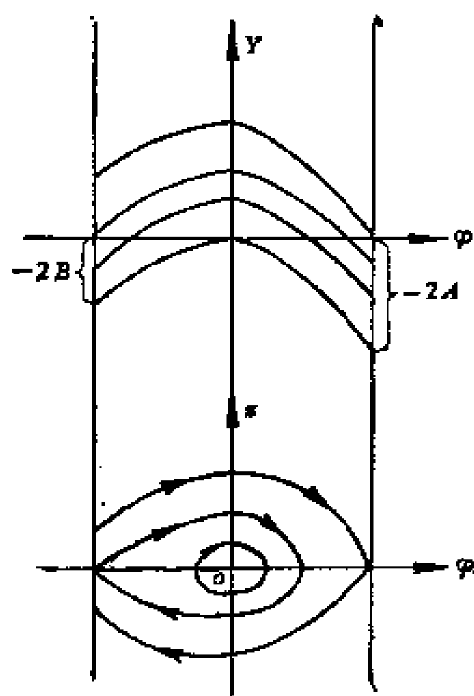


图 21

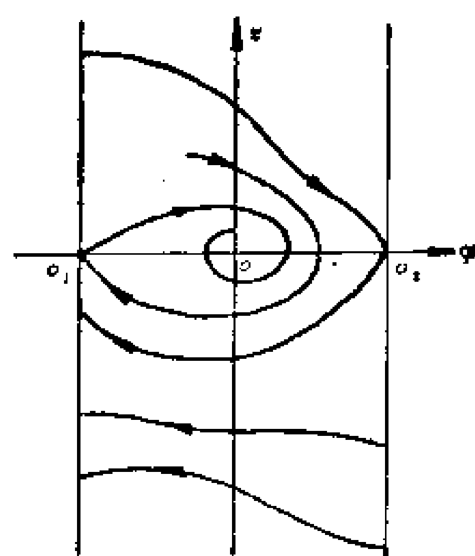


图 22

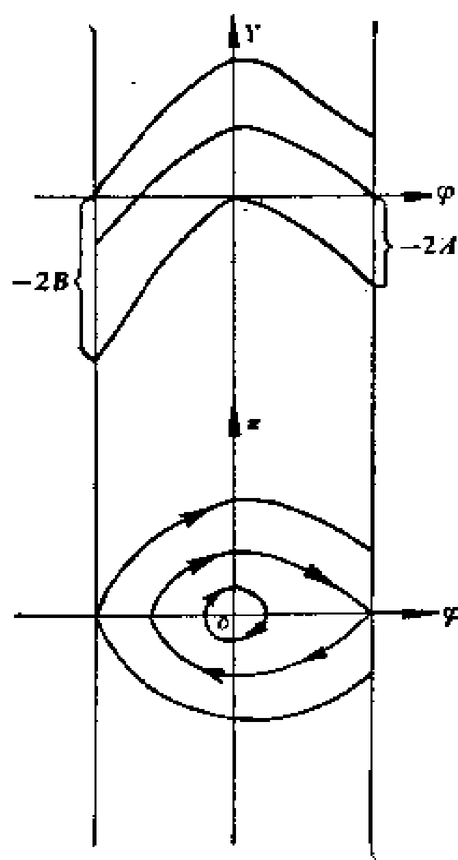


图 23

中 $f(\varphi)=\alpha$, $g(0)=0$, $\varphi g(\varphi)<0$, $g(\varphi)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上是连续、周期函数，且有

$$\int_0^{\pm\pi}[\alpha+|g(\varphi)|]d\varphi \neq \infty$$

的情形. 由上述定理立即给出系统 (4.15) 的原点不是全局稳定的. 这个例子，我们进一步给出了系统 (4.15) 的积分曲线的拓扑结构.

在锁相技术中有关环路的定性分析研究，还可参阅 [8]—[13].

第十六章　在星系密度波理论中的应用

§1. 问题与结论

密度波理论成功地解释了星系螺旋结构的缠卷困难[1]. 徐遐生[8]证明了弱扰动引力场的连续周期解就是自洽的线性密度波解;在数值计算时发现非线性解极敏感地依赖于初值的选择,并指出解可能是不稳定的. 许多迹象都预示着密度波可能是不稳定的. 本章采用气体盘模型,在准稳紧卷螺旋近似下证明了密度波存在着非线性的不稳定性,以及基态为超声速时的准稳性.

仿效星系激波的处理方法,在等角螺旋正交坐标系(ξ,η)中,扰动场的方程为

$$
\begin{cases}
(\sigma_0+\sigma_1)(w_{\eta 0}+w_\eta)=\sigma_0 w_{\eta 0}, & (1.1)\\
[(w_{\eta 0}+w_\eta)^2-a^2]\dfrac{\partial w_\eta}{\partial \eta}=(w_{\eta 0}+w_\eta)(Aw_\xi+G-x_2) & \\
\qquad\qquad +a^2\left(1+\dfrac{\bar{w}}{\sigma_0+\sigma_1}\dfrac{d\sigma_0}{d\bar{w}}\right)x_1, & (1.2)\\
(w_{\eta 0}+w_\eta)\dfrac{\partial w_\xi}{\partial \eta}=Bw_\eta-x_3, & (1.3)\\
\Delta U_1=4\pi G\sigma_1\delta(Z). & (1.4)
\end{cases}
$$

其中符号的含义在[1]中给出. 只是这里的a是恒星的弥散速度;扰动引力

$$G=-\frac{\partial U_1}{\partial \eta} \tag{1.5}$$

在线性密度波时,有

$$G=C\sin(b\eta+\eta_0),\quad b=\frac{2}{\sin i}; \tag{1.6}$$

而

$$A=2\Omega\bar{w}>0,\quad B=-\frac{K^2\bar{w}}{2\Omega}<0,\quad C=F(\bar{w}\Omega)^2. \tag{1.7}$$

恒星弥散速度都比较大，在一般的紧卷螺旋中

$$w_{\eta 0} = (\Omega - \Omega_p)\bar{w}\sin i$$

都小于 a. 因此，我们讨论基本亚声速流基态附近的非线性连续周期解(即非线性密度波)，即满足条件

$$w_{\eta 0} < a, \quad |w_\eta + w_{\eta 0}| < a. \tag{1.8}$$

我们将证明它是不稳定的. 而在

$$w_{\eta 0} > a \tag{1.9}$$

的条件下，则可证明其准稳性.

§2. 非线性不稳定性的论证

为了方便，将 w_η, $w_{\eta 0}$, w_ξ, η 分别记为 y, y_0, z, x. 先忽略小量 x_i 则方程 (1.2) 和 (1.3) 可重新写成

$$\begin{cases} \dfrac{(y+y_0)^2 - a^2}{(y+y_0)} \dfrac{dy}{dx} = Az + G, \\ (y+y_0)\dfrac{dz}{dx} = By. \end{cases} \tag{2.1}$$

其中扰动引力 G 由泊松方程 (1.4) 确定.

现在，我们来证明下面的定理.

定理: 给定微分方程组 (2.1)，其中 a 为常数，并存在常数 A_0, B_0, K 使得

$$A(x) > A_0 > 0, \quad B(x) < B_0 < 0, \quad 0 < y_0 < a, \tag{2.2}$$

$$|G(x)| < K, \quad K > 0, \tag{2.3}$$

则在区域

$$|y| < y_0, \quad |y + y_0| < a \tag{2.4}$$

当中 (2.1) 不存在稳定的周期解.

证: 方程组 (2.1) 左方系数在

$$y + y_0 = 0 \quad 及 \quad (y+y_0)^2 - a^2 = 0 \tag{2.5}$$

变为零或 ∞，在 (x, y, z) 三维空间中，(2.5) 表示方程组 (2.1) 有三张奇面，当 x 增长时，(2.1) 的积分曲线一般不能通过它们，

因此加上 (2.4) 的限制.

分别两种情形：即 (2.1) 在 (2.4) 区内无周期解和有周期解. 对于前者定理不需证明；对于后者，任取一个周期解以 $(y^{(0)}(x), z^{(0)}(x))$ 记. 下面来证明 $(y^{(0)}(x), z^{(0)}(x))$ 对于 (2.1) 的积分曲线族为不稳定的周期解. 为此，引入新变量

$$\varphi = y(x) - y^{(0)}(x),\quad \psi = z(x) - z^{(0)}(x), \tag{2.6}$$

将 (2.6) 代入 (2.1)，将方程对 (φ, ψ) 作幂级数展开，

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1(x) & \alpha_2(x)\\ \alpha_3(x) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} + (\varphi, \psi)_2, \tag{2.7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1(x) &= \frac{[Az^{(0)}(x) + G(x)][a^2 + (y_0 + y^{(0)}(x))^2]}{[a^2 - (y_0 + y^{(0)}(x))^2]^2},\\ \alpha_2(x) &= \frac{y_0 + y^{(0)}(x)}{(y_0 + y^{(0)}(x))^2 - a^2}A,\\ \alpha_3(x) &= \frac{B}{(y_0 + y^{(0)}(x))^2},\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

$(\varphi, \psi)_2$ 表示 (φ, ψ) 的二次以上的项.

注意到 $(y^{(0)}(x), z^{(0)}(x))$ 为 (2.4) 中的连续周期解，在一个周期中，它是有界闭集上的连续函数，因此，利用 (2.3) 及 (2.4)，由 (2.8) 可有三个常数 K_1, K_2, K_3 使得

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1(x) \geqslant -K_1,\ K_1 \geqslant 0,\\ &\alpha_2(x) \leqslant -K_2 < 0,\ \alpha_3(x) \leqslant -K_3 < 0.\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

只要能证明 (2.7) 的线性部分，$(\varphi, \psi) = (0, 0)$ 是不稳定的，则加上非线性部分 $(\varphi, \psi)_2$ 后，这个结论仍成立. 这里关于稳定与不稳定的意义是按众所周知的李雅普诺夫意义来定义的，例如参考 [11].

由此，定理的证明归结为，

引理 1：对线性微分方程组

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1(x) & \alpha_2(x)\\ \alpha_3(x) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

满足条件 (2.9)，则 (2.10) 的零解 $(\varphi, \psi)=(0,0)$ 是不稳定的.

这个引理是下面引理 2 的一个特例.

引理 2: 考虑微分方程组

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1(x) & \alpha_2(x)\\ \alpha_3(x) & \alpha_4(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

假设对所有的 $x\geqslant 0$，存在常数 K_1, K_2, K_3 及 K_4，使得

$$\left.\begin{aligned}&\text{(a)}\ \ \alpha_1(x)\geqslant -K_1,\ K_1\geqslant 0,\ \alpha_2(x)\leqslant -K_2<0,\\ &\qquad \alpha_3(x)\leqslant -K_3<0,\ \alpha_4(x)\geqslant -K_4,\ K_4\geqslant 0,\\ &\text{(b)}\ \ K_2K_3-K_1K_4>0,\end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

则 $(\varphi, \psi)=(0,0)$ 为不稳定.

证: $K_2>0$，$K_3>0$ 可将 K_2, K_3 稍变小一些使条件 (b) 仍保持，即取 $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \bar{K}_3, \bar{K}_4$ 使得

$$\left.\begin{aligned}&\text{(a)}'\ \ \alpha_1(x)\geqslant -\bar{K}_1,\ K_1\geqslant \bar{K}_1\geqslant 0,\\ &\qquad \alpha_2(x)\leqslant -K_2<-\bar{K}_2<0,\\ &\qquad \alpha_3(x)\leqslant -K_3<-\bar{K}_3<0,\\ &\qquad \alpha_4\geqslant -\bar{K}_4,\ K_4\geqslant \bar{K}_4\geqslant 0,\\ &\text{(b)}'\ \ \bar{K}_2\bar{K}_3-\bar{K}_1\bar{K}_4>0.\end{aligned}\right\}$$

(i) 现在取比较方程组

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dx}=-\bar{K}_1\varphi-\bar{K}_2\psi,\\[2mm] \dfrac{d\psi}{dx}=-\bar{K}_3\varphi-\bar{K}_4\psi,\end{cases} \tag{2.13}$$

研究 (φ, ψ) 平面上第二象限 $(\varphi<0, \psi>0)$，则有

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(2.11)}<\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(2.13)},$$

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(2.11)}>\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(2.13)}.$$

方程组 (2.13) 的特征方程为(参考 [2])

$$\begin{vmatrix}-\bar{K}_1-\lambda & -\bar{K}_2\\ -\bar{K}_3 & -\bar{K}_4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+p\lambda+q=0,$$

其中 $p=\bar{K}_1+\bar{K}_4\geqslant 0$，$q=\bar{K}_1\bar{K}_4-\bar{K}_2\bar{K}_3<0$.

特征根

$$\lambda_1=\frac{1}{2}(-p+\sqrt{p^2-4q})>0,$$

$$\lambda_2=\frac{1}{2}(-p-\sqrt{p^2-4q})<0.$$

由于 $\bar{K}_3\neq 0$ 作变换

$$\begin{cases}X=\bar{K}_3\varphi+(-\bar{K}_1-\lambda_1)\psi,\\ Y=\bar{K}_3\varphi+(-\bar{K}_1-\lambda_2)\psi.\end{cases}\tag{2.14}$$

方程 (2.13) 经变换 (2.14) 化为

$$\frac{dX}{dx}=\lambda_1X,\quad \frac{dY}{dx}=\lambda_2Y,\tag{2.15}$$

其积分曲线族为

$$V(X,\ Y)=|X|^{-\lambda_2}|Y|^{\lambda_1}=\text{常数},$$

(ii) 将第二象限 ($\varphi<0$, $\psi>0$) 用两半直线

l_1: $\bar{K}_1\varphi+\bar{K}_2\psi=0$,

l_2: $\bar{K}_3\varphi+\bar{K}_4\psi=0$

分为三块 A 区，B 区，C 区. 其中按 ψ 而言 A 区在 B 区上方，B 区在 C 区上方. 按 φ 而言 A 区在 B 区右方，B 区在 C 区右方.

由于条件 (b)′，显然 l_2 在 l_1 上方.

下面我们分别在区域 A, B, C 中作出李雅普诺夫函数

(甲) 研究区域 A.

在第二象限内，半直线 l_2 在直线 $Y=0$ 之上方，故 A 区内有 $X<0$, $Y>0$.

在区域 A 中作李雅普诺夫函数

$$\begin{aligned}V_1(\varphi,\ \psi)&=V(-X,\ Y)=(-X)^{-\lambda_2}Y^{\lambda_1}\\ &=[-\bar{K}_3\varphi+(\bar{K}_1+\lambda_1)\psi]^{-\lambda_2}[\bar{K}_3\varphi+(-\bar{K}_1-\lambda_2)\psi]^{\lambda_1},\end{aligned}$$

将它沿 (2.11) 之积分曲线关于 x 求全导数，

$$\frac{dV}{dx}=\frac{\partial V}{\partial X}\left(\frac{\partial X}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{\partial X}{\partial\psi}\frac{d\psi}{dx}\right)+\frac{\partial V}{\partial Y}\left(\frac{\partial Y}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{\partial Y}{\partial\psi}\frac{d\psi}{dx}\right),$$

由于

$$\frac{\partial V}{\partial X}=-\frac{\lambda_2}{X}V,\ \frac{\partial V}{\partial Y}=\frac{\lambda_1}{Y}V,$$

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi}=\bar{K}_3,\ \frac{\partial Y}{\partial \varphi}=\bar{K}_3,\ \frac{\partial X}{\partial \phi}=-\bar{K}_1-\lambda_1,\ \frac{\partial Y}{\partial \phi}=-\bar{K}_1-\lambda_2,$$

故

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV}{dx}\right|_{(2.11)}=&\frac{V}{XY}\left\{\left[\bar{K}_3(-\lambda_2 Y+\lambda_1 X)\frac{d\varphi}{dx}\right]_{(2.11)}\right.\\&\left.+\left[\lambda_2(\bar{K}_1+\lambda_1)Y-\lambda_1(\bar{K}_1+\lambda_2)X\frac{d\phi}{dx}\right]_{(2.11)}\right\}\\=&\bar{K}_3(\lambda_1-\lambda_2)\frac{V}{(-XY)}\left[\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(2.11)}\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{(2.13)}\right.\\&\left.-\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(2.13)}\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{(2.11)}\right].\end{aligned}$$

在区域A中有

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(2.13)}<0,\ \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{(2.13)}<0,$$

且

$$0>\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(2.13)}>\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(2.11)},\ \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{(2.13)}<\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{(2.11)},$$

故

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(2.11)}\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{(2.13)}>\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(2.13)}\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{(2.13)}>0,$$

故

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV}{dx}\right|_{(2.11)}>&\bar{K}_3(\lambda_1-\lambda_2)\frac{V}{(-XY)}\left[\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(2.13)}\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{(2.13)}\right.\\&\left.-\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(2.13)}\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{(2.11)}\right]\\=&\bar{K}_3(\lambda_1-\lambda_2)\frac{V}{(-XY)}\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(2.13)}\left[\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{(2.13)}-\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{(2.11)}\right]>0.\end{aligned}$$

（乙）在区域B中讨论．取李雅普诺夫函数为

$$V_2(\varphi,\ \phi)=\phi-\varphi,$$

则在 B 内有 $V_2(\varphi, \phi) > 0$,

并且

$$\left.\frac{dV_2}{dx}\right|_{(2.11)} = \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{(2.11)} - \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(2.11)}$$

$$> \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{(2.13)} - \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(2.13)} > 0.$$

（丙）在区域 C 中，$X < 0$, $Y < 0$,

取李雅普诺夫函数

$$V_3(\varphi, \phi) = V(-X, -Y) = (-X)^{-\lambda_2}(-Y)^{\lambda_1},$$

对它沿（2.11）之积分曲线关于 x 求全导数，

$$\left.\frac{dV_3}{dx}\right|_{(2.11)} = \bar{K}_3(\lambda_1 - \lambda_2)\frac{V}{(-X)(-Y)}\left(\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(2.13)}\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{(2.11)}\right.$$

$$\left. - \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(2.11)}\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{(2.13)}\right),$$

但在区域 C 中有

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(2.13)} > 0, \quad \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{(2.13)} > 0,$$

并且有

$$\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{(2.11)} > \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{(2.13)}, \quad \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(2.11)} < \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(2.13)},$$

故有

$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_{(2.11)} > \bar{K}_3(\lambda_1 - \lambda_2)\frac{V}{XY}\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{(2.13)}\left(\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(2.13)}\right.$$

$$\left. - \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(2.11)}\right) > 0.$$

因此根据非驻定系统不稳定的切达耶夫定理[13]，知（2.11）的零解是不稳定的．引理证毕．在引理的基础上，定理也证毕．

§3. 讨　　论

（一）不稳定性的发展速率

若 G 取（1.6）之形式，当 $F \ll 1$ 时就得自洽的线性密度波，

略去 x_1, x_2, x_3 即得 (2.1) 之形. 由此可见，本文的结论对线性密度波是成立的. 徐遐生[8]在用计算机计算时已发现周期解很难算，初值稍一有差，解即发散，但没有进一步从理论加以考察，我们则从理论上论证了这种不稳定性的必然性.

另一方面，当 $|C|$ 足够小时，方程组 (2.1) 在 $(\varphi, \phi) = (0, 0)$ 附近可以有周期解. 例如在 $|y| \ll y_0$ 的假设下，将 (2.1) 左方系数中的 $y + y_0$ 用 y_0 代替，则 (2.1) 变成常系数线性的方程组，有通解

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1 e^{\tau x} + C_2 e^{-\tau x} + C_3 \cos(bx + x_0), \\ z &= \frac{y_0^2 - a^2}{A y_0} C_1 e^{\tau x} - \frac{y_0^2 - a^2}{A y_0} C_2 e^{-\tau x} + C_4 \sin(bx + x_0), \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

其中 C_1, C_2 为任意常数，

$$C_3 = \frac{b y_0}{b^2(a^2 - y_0^2) - AB} C, \quad C_4 = \frac{B}{b^2(a^2 - y_0^2) - AB} C, \quad (3.2)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{A(-B)}{a^2 - y_0^2}} > 0. \quad (3.3)$$

这里当 $C_1 = C_2 = 0$ 为唯一的周期解.

当 $C_1 = 0$，积分曲线当 $C \to +\infty$ 趋于这个周期解.

当 $C_1 \neq 0$，则积分曲线以 $e^{\tau x}$ 的指数发散. 亦即在 (x, y, z) 三维空间中除了一个零测度的二维曲面外，其余的积分曲线均以 $e^{\tau x}$ 量级发散，故周期解虽存在，但不稳定. 另一方面，由于有一个零测度的二维曲面上的积分曲线趋于此周期解，因此又可以勉强用计算机将它近似地算出.

由 (3.3) 可以估计出 τ 的大小约为 10 左右. 由于 x 即

$$\eta = \cos i \ln\left(\frac{\bar{\varpi}}{\bar{\varpi}_U}\right) + \sin i(\theta - \Omega_p t),$$

所以 η 变化 0.1 左右，就可以使速度变化 e 倍. 在太阳附近 η 变化 0.1 对应于 1/8 银年，即约 3×10^7 年. 这个发展速率比托姆 (Toomre)[2] 由群速度给出的还要快.

条件 $|y| \ll y_0$，即要求 $|C_3| \ll y_0$，或

$$F \ll \frac{b^2(a^2 - y_0^2) + A(-B)}{(\bar{w}\Omega)^2} = F_0, \tag{3.4}$$

在徐遐生[8]计算的例中，$F_0 \cong 0.3$ 他取了

$$F = 0.01 \sim 0.05$$

周期解可用近似解析解

$$y = C_3 \cos(bx + x_0), \quad z = C_4 \sin(bx + x_0) \tag{3.5}$$

来描述.

（二）二级量 x_i 的影响

考虑 x_1, x_2, x_3 三个小量，方程 (2.10) 化为 (2.11)，条件 (2.9) 要加强到引理 2 的 (2.12)．这时方程 (2.11) 可写成

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(y+y_0)(Az+f)}{(y+y_0)^2 - a^2} + \frac{y+y_0}{a^2 - (y+y_0)^2} x_2 \\ &\quad + \frac{a^2(1+\beta)}{(y+y_0)^2 - a^2} x_1, \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{By}{y+y_0} - \frac{1}{y+y_0} x_3, \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

其中

$$\begin{aligned} x_1 &= y\cos i - z\sin i, \\ x_2 &= \alpha(y\cos i - z\sin i)\sin i - z(y\sin i + z\cos i) \\ &\qquad + \alpha^2\beta\cos i, \\ x_3 &= -\alpha z\sin i\cos i + y(y\sin i + z\cos i) - \alpha^2\beta\sin i, \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\alpha = \bar{w}^2 \frac{d\Omega}{d\bar{w}}, \quad \beta = \frac{\bar{w}}{\sigma_0 + \sigma} \frac{d\sigma}{d\bar{w}}, \tag{3.8}$$

则在原来 (2.10) 的矩阵 $\begin{pmatrix} \alpha_1(x) & \alpha_2(x) \\ \alpha_3(x) & 0 \end{pmatrix}$ 的基础上还要加上一个小量矩阵

$$\begin{pmatrix} \Delta\alpha_1(x) & \Delta\alpha_2(x) \\ \Delta\alpha_3(x) & \Delta\alpha_4(x) \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

其具体函数如下：

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\alpha_1(x) &= \frac{a^2+(y_0+y^{(0)})^2}{[a^2-(y_0+y^{(0)})^2]^2}[\alpha y^{(0)}\cos i\sin i \\
&\quad -\alpha z^{(0)}(\sin i)^2 - z^{(0)}y^{(0)}\sin i - z^{(0)2}\cos i \\
&\quad + a^2\beta\cos i] + \frac{y_0+y^{(0)}}{a^2-(y_0+y^{(0)})^2} \\
&\quad \times[\alpha\cos i\sin i - z^{(0)}\sin i] - \frac{2a^2(1+\beta)(y_0+y^{(0)})}{[a^2-(y_0+y^{(0)})^2]^2} \\
&\quad \times[y^{(0)}\cos i - z^{(0)}\sin i] - \frac{a^2(1+\beta)\cos i}{a^2-(y_0+y^{(0)})^2}, \\
\Delta\alpha_2(x) &= \frac{-(y_0+y^{(0)})}{a^2-(y_0+y^{(0)})^2}[\alpha(\sin i)^2 + y^{(0)}\sin i \\
&\quad + 2z^{(0)}\cos i] + \frac{a^2(1+\beta)\sin i}{a^2-(y_0+y^{(0)})^2}, \\
\Delta\alpha_3(x) &= -\frac{2y^{(0)}\sin i + z^{(0)}\cos i}{y_0+y^{(0)}} + \frac{1}{(y_0+y^{(0)})^2} \\
&\quad \times[-\alpha z^{(0)}\sin i\cos i + (y^{(0)})^2\sin i + y^{(0)}z^{(0)}\cos i \\
&\quad - a^2\beta\sin i], \\
\Delta\alpha_4(x) &= \frac{\alpha\sin i\cos i - y^{(0)}\cos i}{y_0+y^{(0)}}.
\end{aligned}\right\}\qquad(3.10)$$

其中 $y^{(0)}$, $z^{(0)}$ 可用 (3.2) 的 C_3 及 C_4 来控制. 不难验算, 当 $F = 0.01 \sim 0.05$ 时,这些 $\Delta\alpha_i$ 并不改变 (2.10) 的不稳定性, 因而 (1.1)-(1.4) 系统不存在稳定周期解,即考虑二级量后, 密度波仍是不稳定的.

(三) 关于解的自洽性

线性[1] 和弱非线性[7] 的密度波解都是自洽的. 一般讨论气体的非线性响应和星系激波时都不满足自洽条件 [5,6,8,9,10]. 我们在利用气体盘模型时没有具体地要求出自洽的非线性解,但是,在上一节的证明中,对扰动引力场提的条件是很宽的. 条件 (2.3) 只要求扰动引力场是空间的有界函数. 显然, 有物理意义的自洽解也应该包括在这个条件之内. 完全自洽解可以通过数值计算解出.

从另一个角度看,由于当扰动引力场很弱时,非线性解就是通常的线性密度波,因而,本节的结论对于自洽密度波解应该是能够适用的.

（四）对气体的非线性响应和星系激波的影响

将(1.6)式代入(1.2)，并把 a 理解为气体的等效声速，则本节的结果就可应用到气体的非线性响应和星系激波中。这表明，亚声速流动基态附近的周期解是不稳定的，而声速线是奇异线。因此，完全亚声速流动时不存在有物理意义的周期解。本节严格地证明了我们在简单分析时得到的结论[9]。完全亚声速流动出现在共转圈附近。因此，这个结论对于星系螺旋结构的含义是，在共转圈附近不会有稳定的密度波，而且也不会形成星系激波。这样，明亮的螺旋结构就应该中止于共转圈以内的某个半径处。本节得到的共转圈附近的行为，与讨论共转奇异性影响[14]的结果有相似之处。

（五）关于方程的近似性

基本方程组(1.1)—(1.4)是在许多近似和简化假设下推导出来的。它们是：

(i) 准稳螺旋结构。基本方程组是在以等 Ω_p 旋转的坐标系中推导出来的，其中假设了随时间的变化很慢，而忽略不计。

(ii) 紧卷螺旋。一般认为星系存在螺旋宏图。在紧卷螺旋的情况下，$\left|\frac{\partial}{\partial \xi}\right| \ll \left|\frac{\partial}{\partial \eta}\right|$，$|\tan i| \ll 1$。因而忽略了对 ξ 的导数项和 x_i 项。从整体来看，这种省略是允许的。当扰动引力很小时，由基本方程可以得到线性密度波解[8]就是一个证据。上节还证明了，包括小量 x_i 后我们的结论不变。

(iii) 无限薄盘模型。这是通常分析时采用的一个近似，即忽略厚度效应。

(iv) 气体盘模型。这里是用气体盘来模拟星系盘。这是广泛采用的一种简便的行之有效的方法。许多情况都证实，气体盘与恒星盘主要行为有对应关系，但也应意识到气体盘与恒星盘之行为也会有相异之处。

(v) 等角螺旋线近似。在星云激波的研究中，大多采用这个简化假设。看来不会引起重大的出入。

结论： 本节证明了，在上述假设下密度波存在非线性不稳定

性．因为很弱的非线性密度波就是线性密度波，所以这种不稳定性也存在于自洽的线性密度波中．这种不稳定性是在上述五个基本假设下推导出来的．有必要对这些假设做进一步的深入分析．这样就能进一步认识密度波的性质．

§4. 基态流为超声速时的准稳性证明

现在我们研究基态流为超声速（$W_{\eta_0} > a$）时星系密度波非线性周期解的性质．我们将证明，只要扰动引力场强度不太大，周期解具有准稳性质．本节推导出了保证准稳的条件，并用数据加以验证．

方程组 (2.1) 等价于下列二阶方程:

$$\frac{d}{dx}\left[m(y)\frac{dy}{dx}\right] + \tau(y)y = \frac{dG(x)}{dx}, \tag{4.1}$$

其中

$$m(y) = \frac{(y + y_0)^2 - a^2}{y + y_0}, \tag{4.2}$$

$$\tau(y) = \frac{A(-B)}{y + y_0}. \tag{4.3}$$

方程 (4.1) 可以理解为一个在外力 $\frac{dG(x)}{dx}$ 作用下的变质量 $m(y)$ 及变弹性力 $\tau(y)$ 的振荡系统．当 $(y + y_0)^2 < a^2$ 时，

$$m(y)\tau(y) < 0,$$

这可类比于一个具有排斥力的系统，如同一个向上倒立的摆（见图 1 a）．在 [15] 中已证明其周期解的不稳定性．当

$$(y + y_0)^2 > a^2$$

时，$m(y)\tau(y) > 0$，这可类比于一个下垂的摆（见图 1 b）．由此可见，在不很大的外力作用下，

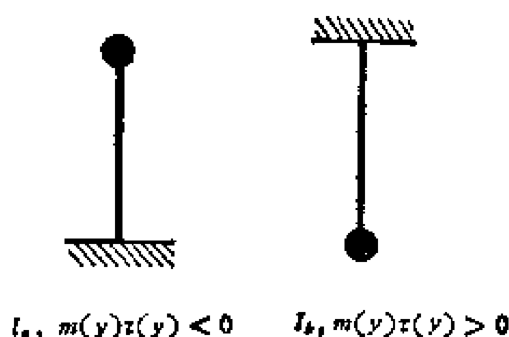


图 1　方程 (4.1) 的振荡系统示意图

其周期解具有稳定或准稳的性质.

在§5中，我们将推导保证准稳（或准周期）的条件．同时对 $G(x)=C\sin bx$ 的特例加以验证．§6对整个图象作出综述，并将指出深入一步的问题.

§5. 准稳条件之推导

对微分方程组(2.1)，任取一特解 $(y^{(0)}(x), z^{(0)}(x))$，为了研究这个特解附近的解的定性行为，作变换

$$\varphi=y-y^{(0)}(x),\quad \psi=z-z^{(0)}(x). \tag{5.1}$$

方程(2.1)化为

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1(x) & \alpha_2(x)\\ \alpha_3(x) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}_2, \tag{5.2}$$

其中

$$\begin{cases}\alpha_1(x)=-\dfrac{[y_0+y^{(0)}(x)]^2+a^2}{\{[y_0+y^{(0)}(x)]^2-a^2\}^2}\\ \qquad\qquad\times[Az^{(0)}(x)+G(x)],\\ \alpha_2(x)=-\dfrac{[y_0+y^{(0)}(x)]A}{[y_0+y^{(0)}(x)]^2-a^2},\\ \alpha_3(x)=\dfrac{B}{[y_0+y^{(0)}(x)]^2},\end{cases} \tag{5.3}$$

而 $\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}_2$ 为 (φ,ψ) 的二次以上的项，其系数为 $y^{(0)}(x)$，$z^{(0)}(x)$ 及 $G(x)$ 的函数.

由(5.3)知，$\alpha_3(x)$ 与 B 同号；且当 $[y_0+y^{(0)}(x)]>a$ 时有 $\alpha_2(x)>0$．而[15]中讨论的是 $\alpha_2(x)<0$ 的情形．可以证明，当 $G(x)$ 为周期函数且 $|G(x)|$ 不很大时，(2.1)可以近似地求出周期解 $(y^{(0)}(x), z^{(0)}(x))$，其周期与 $G(x)$ 相同；并且当 $|G(x)|$ 不很大时，也有 $y_0+y^{(0)}(x)>a$．由于 $\alpha_2(x)$ 与 $\alpha_3(x)$ 的正负号相反，解族的定性行为发生根本的变化，不能像[15]那样得到完全不稳定的结论．相反，我们要研究的是，或者稳定；或者虽不稳定，但是在

周期解附近来回振动，而不是单纯地离开.

下面我们假设:

(1) $a^2 < y_0^2$,

(2) 外力即$|G(x)|$不太大,

(3) 特解满足 $y_0 + y^{(0)}(x) > a$.

在上面三个条件下，我们来研究 (5.2) 在 $(\varphi, \psi) = (0, 0)$ 附近的解的定性行为. 首先讨论线性部分的定性行为.

引理 5.1: 方程组

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1(x) & \alpha_2(x)\\ \alpha_3(x) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} \tag{5.4}$$

若满足下列条件:

(甲) $\alpha_1(x) \leqslant A_1$, $A_1 > 0$,

(乙) $0 < \underline{A}_2 \leqslant \alpha_2(x) \leqslant \overline{A}_2$, $\overline{A}_2 \geqslant \underline{A}_2 > 0$,

(丙) $0 < -\overline{A}_3 \leqslant -\alpha_3(x) \leqslant -\underline{A}_3$, $\underline{A}_3 \leqslant \overline{A}_3 < 0$,

其中 A_1, $\underline{A}_2$, $\overline{A}_2$, $\underline{A}_3$, $\overline{A}_3$ 为常数，并且满足

(丁) $A_1^2 < -4\underline{A}_2\overline{A}_3$,

则 (5.4) 的解或者停留在 (0, 0) 附近，或者虽然离开 (0, 0)，但是以螺旋形式离开，并且离开的速度由 $e^{\frac{A_1}{2}x}$ 控制.

证: 先对 (5.4) 的积分曲线在 $\varphi = 0$ 及 $\psi = 0$ 两轴上作一点定性分析.

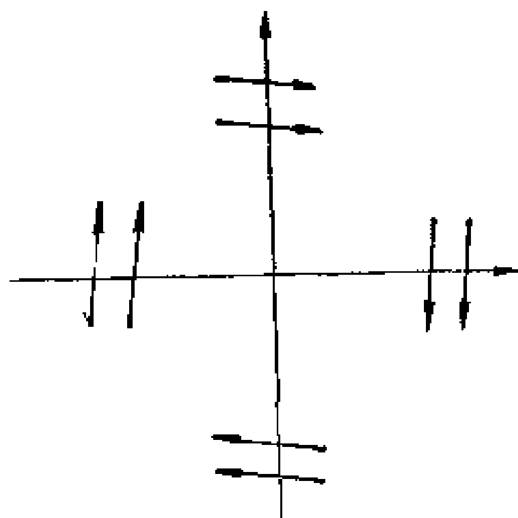


图 2 (5.4) 积分曲线的定性行为示意图

在 $\varphi > 0$, $\psi = 0$ 上，有

$$\frac{d\psi}{dx} = \alpha_3(x)\varphi < 0;$$

在 $\varphi = 0$, $\psi > 0$ 上，有

$$\frac{d\varphi}{dx} = \alpha_2(x)\psi > 0;$$

在 $\varphi < 0$, $\psi = 0$ 上，有

$$\frac{d\psi}{dx} = \alpha_3(x)\varphi > 0;$$

在 $\varphi = 0$, $\psi < 0$ 上，有

$$\frac{d\varphi}{dx}=\alpha_2(x)\psi<0.$$

定性行为如图 2 所示．故有一种旋转的趋向．但是，在每一象限之内，我们仍然还可能有不同的拓扑结构.

作控制方程

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1(\varphi,\psi) & \beta_2(\varphi,\psi)\\ \beta_3(\varphi,\psi) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

其中 $\beta_1(\varphi,\psi)$，$\beta_2(\varphi,\psi)$，$\beta_3(\varphi,\psi)$ 定义如下：

(I) 当 $\varphi\geqslant 0$，$\psi>0$ 时(即第一象限)，取

$$\beta_1(\varphi,\psi)=A_1,\ \beta_2(\varphi,\psi)=\bar{A}_2,\ \beta_3(\varphi,\psi)=\bar{A}_3,$$

这时有

$$\alpha_1(x)\varphi+\alpha_2(x)\psi\leqslant A_1\varphi+\bar{A}_2\psi,$$
$$\alpha_3(x)\varphi\leqslant\bar{A}_3\varphi\leqslant 0.$$

(II) 当 $\varphi<0$，$\psi\geqslant 0$ 时 (第二象限)，作直线 $A_1\varphi+\underline{A}_2\psi=0$ 将第二象限分成两部分：

(II_1) $\varphi<0$，$\psi\geqslant 0$，$A_1\varphi+\underline{A}_2\psi>0$ 时，取

$$\beta_1(\varphi,\psi)=A_1,\ \beta_2(\varphi,\psi)=\underline{A}_2,\ \beta_3(\varphi,\psi)=\underline{A}_3,$$

这时有

$$\alpha_1(x)\varphi+\alpha_2(x)\psi\geqslant A_1\varphi+\underline{A}_2\psi>0,$$
$$0<\alpha_3(x)\varphi\leqslant\underline{A}_3\varphi.$$

(II_2) $\varphi<0$，$\psi\geqslant 0$，$A_1\varphi+A_2\psi\leqslant 0$ 时，取

$$\beta_1(\varphi,\psi)=A_1,\ \beta_2(\varphi,\psi)=\underline{A}_2,\ \beta_3(\varphi,\psi)=\bar{A}_3,$$

这时有

$$\alpha_1(x)\varphi+\alpha_2(x)\psi\geqslant A_1\varphi+\underline{A}_2\psi,$$
$$\alpha_3(x)\varphi\geqslant\bar{A}_3\varphi>0.$$

(III) 当 $\varphi\leqslant 0$，$\psi<0$ 时(第三象限)，作控制方程同 (I).

(IV) 当 $\varphi>0$，$\psi\leqslant 0$ 时(第四象限)：

(IV_1) $\varphi>0$，$\psi\leqslant 0$，$A_1\varphi+\underline{A}_2\psi\leqslant 0$ 时，所作控制方程同 (II_1).

(IV_2) $\varphi>0$，$\psi\leqslant 0$，$A_1\varphi+A_2\psi>0$ 时，所作控制方程同 (II_2).

这样，(5.4) 及 (5.5) 的向量场在 (φ,ψ) 平面上有图 3 的形

式，其中箭头表示 x 增加的方向. 所以，如果 (5.5) 的积分曲线绕着 $(\varphi, \psi)=(0, 0)$ 旋转，则 (5.5) 便构成对 (5.4) 的积分曲线的一组控制曲线.

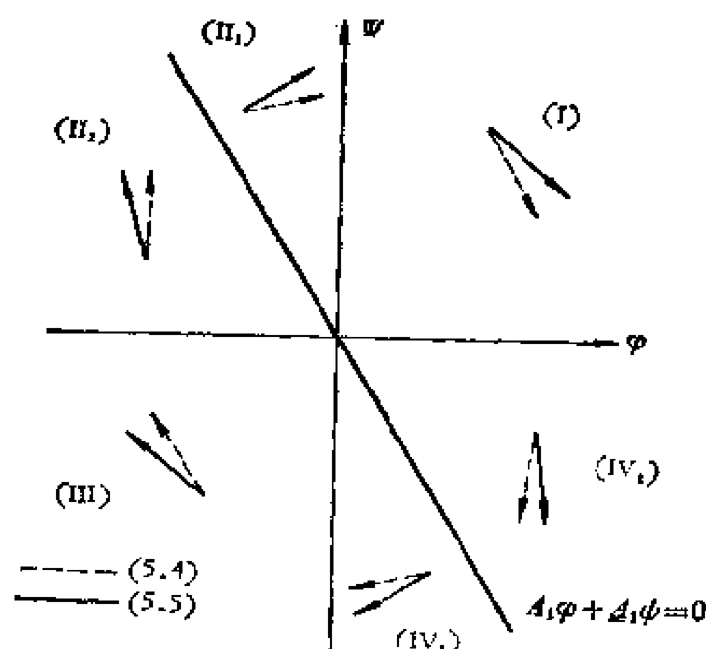


图 3 (φ, ψ) 平面上 (5.4) 及 (5.5) 的向量场，它们分别对应于虚线和实线

下面研究 (5.5) 在不同区域中的性质.

在 (I) 和 (III) 中，(5.5) 为

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1 & \overline{A}_2\\ \overline{A}_3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}. \qquad (5.6)$$

(5.6) 的特征方程和特征根分别为：

$$\begin{vmatrix}A_1-\lambda & \overline{A}_2\\ \overline{A}_3 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-A_1\lambda-\overline{A}_2\overline{A}_3=0,$$

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(A_1\pm\sqrt{A_1^2+4\overline{A}_2\overline{A}_3}\right).$$

在 (II_1) 和 (IV_1) 中，(5.5) 为

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1 & \underline{A}_2\\ \underline{A}_3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}; \qquad (5.6')$$

(5.6′) 之特征方程和特征根分别为：

$$\begin{vmatrix}A_1-\lambda & \underline{A}_2\\ \underline{A}_3 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-A_1\lambda-\underline{A}_2\underline{A}_3=0,$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(A_1 \pm \sqrt{A_1^2 + 4\underline{A}_2\underline{A}_3}).$$

在 (II_2) 和 (IV_2) 中，(5.5) 为

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\varphi \\ \phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_1 & \underline{A}_2 \\ \overline{A}_3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi \\ \phi\end{pmatrix}; \qquad (5.6'')$$

(5.6″) 之特征方程和特征根分别为：

$$\begin{vmatrix}A_1 - \lambda & \underline{A}_2 \\ \overline{A}_3 & -\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - A_1\lambda - \underline{A}_2\overline{A}_3 = 0,$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(A_1 \pm \sqrt{A_1^2 + 4\underline{A}_2\overline{A}_3}).$$

因为

$$-\underline{A}_2\overline{A}_3 < -\overline{A}_2\overline{A}_3, \quad -\underline{A}_2\overline{A}_3 < -\underline{A}_2\underline{A}_3,$$

由于条件(丁)，$A_1^2 < -4\underline{A}_2\overline{A}_3$，故这些 λ 皆为复数.

因此，在 I、III 象限内，(5.6) 为一族绕原点之螺线. 在 II、IV 象限之 (II_1)、(IV_1) 内，(5.6′) 为一族绕原点之螺线. (II_2)、(IV_2) 内，(5.6″) 为一族绕原点之螺线. 这些螺线在 φ 轴，ϕ 轴及直线 $A_1\varphi + \underline{A}_2\phi = 0$ 上联接起来，形成一族新的螺线. 这族新的螺线构成了对 (5.4) 的积分曲线的控制曲线族.

下面分两种情形讨论. 一种情形是 (5.4) 的某一条积分曲线进入四个象限之一以后，不再走出这一象限. 另一种情形是，积分曲线进入任何象限后均走出这一象限.

第一种情形，由于这个象限及 (5.5) 的控制，这条积分曲线即停留在 (0, 0) 附近.

第二种情形，积分曲线或停留在 (0, 0) 附近打圈，或者逐渐离开，但由于 (5.5) 的螺线族的限制，只能打圈地离开，不能如 $a^2 > y_0^2$ 时那样不打圈地离开[15]. 这时控制曲线 (5.5) 增长的量级不超过 $e^{\frac{A_1 x}{2}}$，故也可作 (5.4) 的控制量级的上限. 进一步的估计可用 $\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_1(x)dx$ 来描述 x 经过 2π 的主要变化量级.

引理 5.1 证毕.

注意条件(丁)也不能削弱. 因为若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为常数，则条件

(丁)是必要的.

根据(5.3),我们可具体求出 $\underline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\underline{A}_2$, $\overline{A}_3$, $\underline{A}_3$ 等几个量,由于 $y^{(0)}(x)$ 是 $x^{(0)}(x)$ 在 x 的某一闭区间 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 上是连续函数,因此有最大值和最小值,故可有

$$|y^{(0)}(x)| \leqslant Y.$$

可以看出, $\alpha_2(x)$ 是 $y^{(0)}(x)$ 的单调递减函数,即

$$\alpha_2(x) = A\left\{[y_0 + y^{(0)}(x)] - \frac{\alpha^2}{[y_0 + y^{(0)}(x)]}\right\}^{-1};$$

由此有

$$\frac{A(y_0 + Y)}{(y_0 + Y)^2 - a^2} \leqslant \alpha_2(x) \leqslant \frac{A(y_0 - Y)}{(y_0 - Y)^2 - a^2}.$$

故可取

$$\underline{A}_2 = \frac{A(y_0 + Y)}{(y_0 + Y)^2 - a}, \quad \overline{A}_2 = \frac{A(y_0 - Y)}{(y_0 - Y)^2 - a^2}.$$

由于 $-\alpha_3(x) = \dfrac{-B}{[y_0 + y^{(0)}(x)]^2}$ 是 $y^{(0)}(x)$ 的单减函数,故

$$\frac{-B}{(y_0 + Y)^2} \leqslant -\alpha_3(x) \leqslant \frac{-B}{(y_0 - Y)^2}.$$

故可取

$$\underline{A}_3 = \frac{B}{(y_0 - Y)^2}, \quad \overline{A}_3 = \frac{B}{(y_0 + Y)^2}.$$

记 $\alpha_1(x)$ 中的因子

$$\frac{[y_0 + y^{(0)}(x)]^2 + a^2}{\{[y_0 + y^{(0)}(x)]^2 - a^2\}^2} = f[y^{(0)}(x)].$$

因为

$$\frac{df[y^{(0)}(x)]}{dy^{(0)}(x)}$$

$$= -\frac{2[y_0 + y^{(0)}(x)]\{[y_0 + y^{(0)}(x)]^2 + 3a^2\}}{\{[y_0 + y^{(0)}(x)]^2 - a^2\}^3} < 0,$$

故 f 为 $y^{(0)}(x)$ 的单减函数,因此有

$$\frac{[y_0 + y^{(0)}(x)]^2 + a^2}{\{[y_0 + y^{(0)}(x)]^2 - a^2\}^2} \leqslant \frac{(y_0 - Y)^2 + a^2}{[(y_0 - Y)^2 - a^2]^2}.$$

还有，由于连续函数有上界，故有

$$-K \leqslant Az^{(0)}(x)+G(x) \leqslant K.$$

所以，就得到

$$-[Az^{(0)}(x)+G(x)]\frac{[y_0+y^{(0)}(x)]^2+a^2}{\{[y_0+y^{(0)}(x)]^2-a^2\}^2}$$

$$\leqslant K\frac{[y_0+y^{(0)}(x)]^2+a^2}{\{[y_0+y^{(0)}(x)]^2-a^2\}^2} \leqslant K\frac{(y_0-Y)^2+a^2}{[(y_0-Y)^2-a^2]^2}.$$

故取

$$A_1=K\frac{(y_0-Y)^2+a^2}{[(y_0-Y)^2-a^2]^2}.$$

这样，条件(丁)即化为

$$K^2\left\{\frac{(y_0-Y)^2+a^2}{[(y_0-Y)^2-a^2]^2}\right\}^2<-\frac{4AB}{(y_0+Y)[(y_0+Y)^2-a^2]}. \tag{5.7}$$

(5.7)便是保证特解$(y^{(0)}(x), z^{(0)}(x))$附近的解在其附近绕圈的定性条件．由此得到下面的定理．

定理 5.1：方程组

$$\begin{cases}\dfrac{(y_0+y)^2-a^2}{y_0+y}\dfrac{dy}{dx}=Az+G(x),\\ (y_0+y)\dfrac{dz}{dx}=By,\end{cases} \tag{5.8}$$

其中 $A>0$, $B<0$, $a^2<y_0^2$, 设有特解 $(y^{(0)}(x), z^{(0)}(x))$，并且 $y_0+y^{(0)}(x)>a$, $|y^{(0)}(x)|\leqslant Y$，则下面的不等式

$$K^2\left\{\frac{(y_0-Y)^2+a^2}{[(y_0-Y)^2-a^2]^2}\right\}^2<-\frac{4AB}{(y_0+Y)[(y_0+Y)^2-a^2]}$$

保证$(y^{(0)}(x), z^{(0)}(x))$附近的解或者停留在它附近；或者如要离开它，必须在它附近以绕圈的方式逐渐离开．

文献[15]中的定理和这个定理的物理意义是：当$a^2>y_0^2$时，$(y^{(0)}(x), z^{(0)}(x))$是不稳定的，其附近的解除一个零测度集合上的解外，都与它远离；而当$a^2<y_0^2$并满足不等式(5.7)时，则$(y^{(0)}(x), z^{(0)}(x))$是稳定的解或者准稳的解．

当$|Y|\ll y_0$时，(5.7)式为

$$\frac{K}{\sqrt{A(-B)}} < 2\frac{(y_0^2 - a^2)^{3/2}}{y_0^2 + a^2}. \tag{5.9}$$

满足 (5.9) 即可保证准稳.

下面来证明，加上非线性项以后不改变特解 $(y^{(0)}(x), z^{(0)}(x))$ 的准稳性质.

上面分析的是线性情形. 加上非线性项后，注意到 (5.3) 中的高次项的系数是连续有界函数，因此这些系数均有上下界，由此，可以作出不带 x 的只含 (φ, ψ) 二次以上的控制函数.

注意到当定理 **5.1** 成立时，线性控制方程的积分曲线一定是螺线或中心曲线，因此，加上非线性项后，在 $(\varphi, \psi) = (0, 0)$ 附近，螺线的性质不变，中心曲线可能仍为中心的，也可能变成螺线[12]. 总之，旋转性质不变. 因此，作为控制曲线仍有效. 结论是:

定理 5.2: 定理 5.1 中考虑非线性项以后，在条件

$$y_0 + y^{(0)}(x) > a$$

及不等式 (5.7) 的控制下，周期解或为稳定的，或为准稳的.

(二) 线性密度波引力分布情形之验证

线性密度波的自洽解有 $G(x) = C\sin bx$. 而弱的非线性密度波解即线性解[8]，在 $|y^{(0)}(x)| \ll y_0$ 的情形下，近似地有

$$y^{(0)}(x) = C_3\cos bx, \tag{5.10}$$

$$z^{(0)}(x) = C_4\sin bx, \tag{5.11}$$

其中

$$C_3 = \frac{-bc}{AB + b^2(y_0^2 - a^2)}, \tag{5.12}$$

$$C_4 = \frac{-Bc}{AB + b^2(y_0^2 - a^2)}. \tag{5.13}$$

条件 $|y^{(0)}(x)| \ll y_0$，即要求 $|C_3| \ll y_0$，代入系数

$$\begin{cases} A = 2(\varpi\Omega),\ B = -\dfrac{K^2\varpi}{2\Omega},\ C = F(\varpi\Omega)^2, \\ b = \dfrac{2}{\sin i}, \quad y_0 = (\Omega - \Omega_p)\varpi\sin i, \end{cases} \tag{5.14}$$

经过整理就得到

$$F \ll \left|\frac{\left[\left(\frac{K}{\Omega}\right)^2-4\left(1-\frac{\Omega_p}{\Omega}\right)^2\right]\sin i+4\left(\frac{a}{\varpi\Omega}\right)^2}{2\sin i}\right|. \quad (5.15)$$

另外，由于

$$K = \mathrm{Max}|Az^{(0)}(x)+G(x)| = |AC_4 + C|$$
$$= C\left|\frac{b^2(y_0^2-a^2)}{AB+b^2(y_0^2-a^2)}\right|,$$

条件 (5.9) 就可化为

$$F < \frac{1}{2}\frac{K}{\Omega}\sqrt{\left|\left(1-\frac{\Omega_p}{\Omega}\right)^2\sin^2 i-\left(\frac{a}{\varpi\Omega}\right)^2\right|}$$
$$\left|\frac{4\left[\left(1-\frac{\Omega_p}{\Omega}\right)^2\sin^2 i-\left(\frac{a}{\varpi\Omega}\right)^2\right]-\left(\frac{K}{\Omega}\right)^2\sin^2 i}{\left(1-\frac{\Omega_p}{\Omega}\right)^2\sin^2 i+\left(\frac{a}{\varpi\Omega}\right)^2}\right|. \quad (5.16)$$

条件 (5.15) 保证 $|y^{(0)}(x)| \ll y_0$，条件 (5.16) 保证准稳.

对于一般银河系的考数值，若恒星弥散速度 $a \approx 30$ 公里/秒，则有

$$\frac{K}{\Omega} \simeq 1.2, \quad \sin i \sim \frac{1}{8}.$$

对于 $\Omega_p/\Omega \simeq 0.5$，则当 $F \ll 0.27$ 时即保证准稳.

§6. 结论的综合论述

前面的研究表明，基态流为超声速（$W_{\eta_0} > a$）时，只要扰动引力场不很大，密度波的非线性周期解是准稳的；即虽然不一定能保持严格的周期性，但不会迅速地发散. 在 [15] 中我们曾得到，基态流为亚声速（$W_{\eta_0} < a$）时，密度波的非线性周期解是不稳定的，以指数形式增长. [16] 中的简单分析结果与这两个结果是一致的. 这些结果综合在一起，就构成一幅完整的图案.

在 [17] 中我们详细地讨论了这些结果在解释星系结构中的含义. 在完整的数学描述中，扰动引力是流场和空间变量的某个函数. 我们在分析中将扰动引力假设为条件很宽的空间变量的函

数．它必然包含了一般有物理意义的自洽解，但同时也可能引入某些非自洽解，这会影响结论的适用性．有必要进一步分析自洽意义下的稳定性解的性质．

由于目前讨论的星系激波往往假设扰动引力场即恒星的扰动谐波场，是确定的空间变量函数，我们的分析完全可以应用于讨论这些非线性气体激波的性质．近年来，非线性的气体激波解的稳定性研究引起人们的很大重视［17］．根据我们的结论，当 $W_{\eta_0}>a$ 时有稳定的周期解或准稳的周期解，而 $W_{\eta_0}<a$ 时解不稳定，其中 a 为气体等效声速．当然，在 $W_{\eta_0}<a$ 时，还会遇到不能光滑地跨过声速线 $W_{\eta_0}+W_{\eta}=a$ 的奇异性困难．将本文的结果用于分析由叠代法求解自洽的星系激波解时[16]，可以得到当 $W_{\eta_0}>a$ 时，解是稳定的或准稳的．

本文的结论指出了 $W_{\eta_0}>a$ 时非线性密度波解的准稳性．如果仿照［18］的叠代方法，求非线性密度波解，则每一步叠代过程中解都是准稳的．用这种方法，人们可能求出同时满足运动方程和泊松方程的非线性密度波解．这类非线性密度波解具有某种渐近意义下的准稳性．

文献［15］中，讨论了 $W_{\eta_0}<a$ 时非线性密度波解的不稳定性．人们为了数学上的简化，有时在给定外力下计算非线性解的性质．徐遐生等人发现这类非线性解在计算时表现出不稳定性[8]．最近，伍德沃德（Wood ward）又讨论了这类解的性质[19]．根据［15］中的分析，从理论上严格证明了这类计算中表现出来的不稳定性的必然性．因此，就有必要进一步搞清楚这种不稳定性的物理含义．它可能是由于未严格分析自洽意义下的稳定性，由假设外力条件而引入的非自洽解造成；也可能是由于自洽解本身造成的．搞清楚这个问题，对认识星系密度波当然是很重要的．在［15］中我们指出，徐遐生等的非线性解中引入了指数形式解[8]，这部分解可能是不自洽的．

完全求解（1.1）—（1.4）则形成一个偏微分方程的稳定性问题，已由数值计算方法解决．

参 考 文 献

第一篇 第一章

[1] Ляпунов, А. М., Общая задача об устойчивости движения, Физматгиз 1959.

[2] 秦元勋,运动稳定性的一般问题讲义,科学出版社,1958.

[3] Дубошин, Г. Н., Основы теории устойчивости движения, Изд-во МГУ, 1952.

[4] Еругин, Н. П., Первый метод Ляпунова, *Дифференциальные уравнения*, том III, № 4, 1967.

[5] Лётов, А. М., Устойчивость нелинейных регулируемых систем, Физматгиз, 1962.

[6] Гантмахер, Ф. Р., Якубович, В. А., Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем, труды II, Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, 1966.

[7] Malkus, L., Escape times for ordinary differential equations, *Rend. Sem. Mat. Univ. di Torino*, Vol II, 1951—2.

[8] Hartman, P., Ordinary differential equation, John Wiley and Sons, 1964.

[9] Гантмахер, Ф. Р., Теория матриц, «Наука» 1967. 中译本: Ф. Р., 甘特马赫尔,矩阵论,高等教育出版社,1955.

[10] Барбашин, Е. А., Красовский, Н. Н., Об устойчивости движения в целом, *ДАН СССР*, 86, № 6, 1952.

[11] Красовский, Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959.

[12] Четаев, Н. Г., Устойчивость движения, «Наука», 1965.

[13] Красовский, Н. Н., Об условиях обращения теорем А. М. Ляпунова о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений, *ДАН СССР*, 101, №1, 1955.

[14] Lasalle, J. and Lefschetz, S., Stability by Liapunov's direct method with applications, New York, Academic Press, 1961, p. 66.

第一篇 第二章

[1] Massera, J. L., On Liapunov's condition of stability, *Annals of Mathematics*, Vol. 50, No. 3, 1949.

[2] Малкин, И. Г., Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952. 中译本: И. Г., 马尔金,运动稳定性理论,科学出版社,1958.

[3] Степанов, В. В., Курс дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1950. 中译本: В. В., 史捷班诺夫,微分方程教程,高等教育出版社,1956.

[4] Massera, J. L., Contributions to stability theory, *Annals of Mathematics*, Vol. **64**, No. 1, 1956.
[5] Whitney, H., Regular families of curves, *Annals of Mathematics*, Vol. **34**(1933), pp. 240—277.
[6] 秦元勋, Regular families of curves and pseudo-harmonic functions, Doctorate thesis, Harvard University, 1947.
[7] 江泽涵,拓扑学引论,第一分册,点集拓扑学,上海科学技术出版社,1964.
[8] Малкин,И. Г., К вопросу об обратимости теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, *ПММ* т. **18** (1954),129—138.
[9] Малкин. И. Г., Построение функций Ляпунова для систем линейных уравнений. *ПММ*. т. **16**(1952),239—249.
[10] Персидский К. П., К теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. *У М Н*, Том**1** вып. 3—6 (1946), 250—255.
[11] Барбашин, Е. А., Красовский, Н. Н., О существовании. функций Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом, *ПММ*, т. **18** (1954), 345—350.
[12] 王联,广义李雅普诺夫函数的作法,中国科学,9,1980.
[13] Antosiewicz, H. A., A survey. of Liapunov's second method, *Con. N. O.*, Vol. IV, pp. 141—166, Princeton Uni., 1958.
[14] Kalman, R. E., Bertram, J. E., Control system analysis and design via "the second method of Liapunov's", continuoustime systems, *Journal of Basic Engineering*, 1960, pp. 371—392.
[15] Марачиков, М., Один теоремы об устойчивости, *Изв. Физ-матем. об-ва Казанск. Гос. Ун-те*, Том **12**(3)(1940), 171—174.
[16] Sanson, G., Conti, R., Non-linear differential equations, Pergamon Press, 1964.

第一篇 第三章

[1] 见参考文献第一篇第一章[14].
[2] Yoshizawa, T. (吉泽太郎), Liapunov's function and boundness of solutions, *Funkcialaj Ekvacioj*, **2**(1959), pp. 95—142.
[3] Antosiewicz, H. A., On non-linear differential equations of the second order with integrable forcing term, *J. London Math. Soc.* **30**(1955), pp. 64—67.
[4] Winter, A., (1) The non-local existence problem of ordinary differential equations, *Amer. J. Math.* **67**(1945), pp. 277—284; (2) The infinities of the non-local existence problem of ordinary differential equations, ibid., **68**(1946) pp. 173—178.
[5] 见参考文献第一篇第二章[16].
[6] Mizohata, S. (溝畑茂), Yamaguti, M., (山口昌哉), On the existence of periodic solutions of the nonlinear differential equation.

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + \varphi(x) = p(t)$$

Mem. College of Sci. Univ. of Kyoto Ser A. **27**(1952), pp. 109—113.

[7] Reuter, G. E. H., (1). A boundedness theorem for nonlinear differential equations of the second order, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 47(1951), pp. 49—54. (2) Boundedmess theorems for non-linear differential equations of the second order (II). *J. London Math. Soc.* 27(1952), pp. 48—58.

第二篇

[1] 见参考文献第一篇第二章[2].
[2] 见参考文献第一篇第一章[12].
[3] 李森林, $\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_j)$ $(s=1,2,\cdots,n)$ 的解的全局稳定性及其应用 (I)(II), 数学学报**14**(1964)353—366, 571—577.
[4] Barnett, S., Starey, C., Stability analysis of constant linear systems by Lyapunov's second method, *Electron, Letters*, **2**, (1966), No. 5.
[5] Taussky, O., A remark on a theorem of Lyapunov, *Journal of Mathematical Analysis and Application*, **2**, (1961), pp. 105—107.
[6] 蔡燧林,常系数线性微分方程组的李雅普诺夫函数的公式,数学学报**9**:4(1959).
[7] Барбашин, Е. А., Функций Ляпунова, Физ. Мат. Гиз., 1970.
[8] Lehnigk, S. H., Quadratic forms as Lyapunov functions for linear differential equations with real constant coefficients, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **61**(1965).
[9] 见参考文献第一篇第一章[2].
[10] Lotka, A. J., A contribution to the theory of self-renewing aggregates with special refernce to industrial replacement, *Ann. Math. Stat* X (1939), pp. 1—25.
[11] Grujic, L. T. and Šiljak, D. D., Asymptotic stability and instability of large-scale systems, IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. AC-18. Dec. (1973), pp. 643—645.
[12] Thompson, W. E., Exponential stability of interconnected systems, IEEE Trans. Automat. Contr. (Corresp.), Vol. AC-15, (1970), pp. 504—506.
[13] Michel, A. N. and Porter, D. W., Stability analysis of composite systems. IEEE Trans. Automat. contr. (Short Papers), Vol. AC-17 Apr. (1972), pp. 222—226.
[14] Michel, A. N., Stability analysis of interconnected systems, *SIAM. J. Contr.*, Vol. **12**, Aug. (1974), pp. 554—579.
[15] 王慕秋,稳定性理论中方程组的分解问题,科学记录,**4**:1(1960),1—5.
[16] Bailey, F. N., The application of Lyapunov's second method to interconnected systems, *J. SIAM. Control, Ser. A*, **3**:(1965), pp. 443—462.
[17] 王慕秋,稳定性参数区域之扩大,数学学报 2(1975).
[18] Красовский, Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.
[19] 钱学森,工程控制论(第十二章),科学出版社,1958.

[20] Hacker, T., Flight stability and control. American Elsevier pub. Co. Inc., 1970.
[21] Pao, C. V., On stability of nonlinear differential systems, *Int. J. Non-linear Mechanics* 8(1973), pp. 219—238.
[22] Hayashi. C. (林知己夫), Forced oscillations in non-linear systems, Osaka, 1953.
[23] Rosenbrok, H. H., The stability of linear time dependent control systems. *Journal of Electronics and Control.* Vol. 14—15 (1—6), 1963.
[24] 秦元勋、刘永清、王联，带有时滞的动力系统的稳定性，科学出版社，1963.
[25] 秦元勋、王联、王慕秋，变系数动力系统的运动稳定性，数学学报，21:2(1978), 176—186.
[26] 秦元勋、王联、王慕秋，缓变系数动力系统的运动稳定性，中国科学，专辑(I) (1979), 242—253.
[27] Hale, J., Theory of functional differential equations, Springer-Verlag (1977), pp. 127—129.
[28] Yakubovich, V. A., Starzhinskii, V. M., Linear differential equations with periodic coefficients (D. Lovish 译自俄文), Wiley, 1975.
[29] Siljak, D. D., Large-scale dynamic systems stability and structure, North-Holland. 1978.

第三篇

[1] Моисеев, Н. Д., Очерки развития теории устойчивости, Гиттл, 1949.
[2] Айзерман, М. А., Об одной проблеме, касающейся устойчивости «в большом» динамических систем, *УМН*, 4, в. 4 (1949), 187—188.
[3] Красовский, Н. Н., Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений, *ПММ*, 16 в. 5 (1952), 547—564.
[4] Плисс, В. А., Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом, ЛГУ, 1958.
[5] Малкин, И. Г., Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования, *ПММ*, 16, в. 3 (1952), 365—368.
[6] Красовский, Н. Н., Об одной задаче устойчивости движения в целом, ДАН СССР 88, №. 3, (1952) 401—414.
[7] Плисс, В. А., Необходимые и достаточные условия устойчивости в целом для систем н дефференциальных уравнений, ДАН СССР, 103, №.1, (1955), 17—18.
[8] Шиманов, С. Н., Об устойчивости решения одного нелинейного уравннения третьего порядка, *ПММ*, 17 в. 3 (1953), 369—372.
[9] 见参考文献第二篇[7].
[10] Барбашин, Е. А., Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка, *ПММ*, 16, в. 5 (1952), 629—632.
[11] Барбашин, Е. А., Труды международного конгресса международной Федерации по автоматическому управлению, АН СССР (1951), 742—751.
[12] Гантмахер, Ф. Р., Крейн М. Г., Осциляционные матрицы и ядра и ма-

лые колебания механических систем, Гиттл, 1950.
[13] Янко-тринницкий, А. А., Новый метод анализа работы синхронных двигателей при разнопеременных нагрузках, Госэнергоиздат, 1958.
[14] Walker, J., A., Glark, L. G., An integral method of Liapunov function generation for nonlinear autonomous systems, *Journal of Applied Mechanics*, Sept. (1965), pp. 569—576.
[15] 见参考文献第二篇[3].
[16] 见参考文献第二篇[3].
[17] Wall, E. T. and Moe, M. L., An energy metric algorithm for the generation of Lyapunov function. IEEE trans. Automat. Contr. (Corresp). Vol. AC-13, Feb. (1968), pp. 121—122.
[18] Wall, E. T., A modification of the energy metric algorithm to include the Routh-Hurwitz Criteria, IEEE trans. Automat. Contr. (Corresp.), Vol. AC-15, June (1970), pp. 373—374.
[19] 见参考文献第一篇第一章[14].
[20] Stewart, D. F., A matrix formulation of the energy metric algorithm for the generation of Liapunov function. M. S. Thesis Univ. Colorado, Denver, 1969.
[21] Stewart, D. F. and Wall, E. T., A matrix transformation for the direct generation of Liapunov state functions, *Acta. Tech.* (Prague). No. 6, 1969.
[22] Wall, E. T. and Moe, M. L., Generation of Lyapunov functions for time-varying nonlinear systems, IEEE trans. Automat. Contr. (Corresp.) Vol. AC-14, Apr. (1969), p. 211.
[23] 王联、王慕秋，论 $n=2$ 情形下的 V. I. Arnold 问题，科学通报，8(1979), 342—347.
[24] Arnold, V. I., Proceeding of symposium in pure mathematics, *America Mathematic Society*. Vol. 28(1976).
[25] Ляпунов, А. М., Общая задача об устойчивости движения, Академик А. М. Ляпунов собрание сочинений, томII, pp. 275—328. Изд. АН СССР. 1956.
[26] 见参考文献第一篇第一章[2].
[27] 秦元勋，微分方程所定义的积分曲线(上册)，科学出版社，1959.
[28] 见参考文献第二篇[24].
[29] Баутин, Н. Н., О числе предельных циклов, появляющихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа Фокуса или центра, Мат. сб., т. 30 (72)(1952), 181—196.
[30] 秦元勋，吕卡提方程定义的系统，科学通报，23(1979).
[31] Verdinand, F., Two-body problem with slowly decreasing mass, *Celestial Mechanics*, Vol. 5, No. 1 1972.
[32] 王联、王慕秋，具有鉴相特性为 $g(\varphi)=\dfrac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\cos\varphi}$ 的二阶锁相环路方程的定性分析，应用数学学报，2(1979), 110—118.
[33] 王联、王慕秋，具有正切鉴相特性的连续二阶锁相环路，应用数学学报，1(1977).

[34] 刘尊全、秦朝斌，微分方程公式的机器推导(I)，中国科学 8(1980)，
[35] 刘尊全、秦朝斌，微分方程公式的机器推导(II)，数学研究与应用，1(1980)。
[36] 秦元勋、刘尊全，微分方程公式的机器推导(III)，数学研究与应用，1(1980)。

第四篇 第十三章

[1] 见参考文献第一篇第三章[1]。
[2] 见参考文献第一篇第三章[2]。
[3] 见参考文献第一篇第三章[3]。
[4] 见参考文献第一篇第三章[4]。
[5] 见参考文献第一篇第三章[6]。
[6] 见参考文献第一篇第三章[7]。
[7] Massera, J. L., The existence of periodic solution of systems of differential equation, *Duke. Math. J.*, **17**(1950), 457—475.
[8] 王联，高压输电网任务设计中所出现的二阶非线性常微分方程：
$\ddot{x} + RF'(x)\dot{x} + \frac{1}{L}F(x) = A\cos\omega t, F(x) = \alpha x + \beta x^3$，数学的实践和认识，1(1978)。
[9] 见参考文献第一篇第二章[16]。
[10] 秦元勋，微分方程所定义的积分曲线(下册)，科学出版社，1959。
[11] Levinson, J. J., On a non-linear differential equation of the second order, *J. Math Phys* **22**(1943), pp. 181—187.
[12] Lasalle, J. P., The extent of asymptotic stability, *Proc. Nat. Acad. Sci.* Vol. **46**(1960), p. 363.
[13] Lasalle, J. P., Some extensions of Liapunov's second method, IRE. Trans. on Circuit Theory, Vol. CT-7 (1961), p. 520.
[14] Levin, J. J. and Nohel, J. A., Global asymptotic stability for nonlinear systems of differentiul equations and applications to reactor dynamics, *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. **5**(1960), p. 194.
[15] Levin, J. J., On the global asymptotic behavior of nonlinear systems of differential equations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. **6**(1960), p. 65.
[16] Cesari, L., Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Heft 16, Springer-Verlag, 1959.
[17] Hale, J. K. and Stokes, A. P., Behavior of solutions near integral manifolds, *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. **6**(1960), p. 133.
[18] Markus, L., Asymptotically autonomous differential systems, contributions to the theory of non-linear oscillation, Vol III, *Annals. of Math. Studies* No. 36. Princeton University Press, 1956, pp. 17—19.
[19] Opial, Z., Sur la dépendence des solutions d'un systèm d'équations différentielles de leurs second membres, application aux systèmes presque autonomos, *Ann. Polonici Math*, Vol. 8(1960), p. 75.
[20] 见参考文献第一篇第三章[2]。

[21] 见参考文献第一篇第三章[2].
[22] Yoshizawa, T. (吉澤太郎), Existence of a bounded solution and existence of a periodic solution of the differential equation of the second order, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A*, Vol. 33(1960), p. 301.
[23] Lefschetz, S., Differential equations. geometric theory, Interscience Publishers, 1957.
[24] Yoshizawa, T., (吉澤太郎), Asymptotic behavior of solutions of a system of differential equations, Contribution to Differential Equations, No I, 1963.
[25] Yoshizawa, T.(吉澤太郎), Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions, Springer Verlag, 1975.

第四篇 第十四章

[1] Лурье, А. И., постников, В. Н., К теории устойчивости регулируемых систем, *ПММ*, 8:3, 1944.
[2] 见参考文献第一篇第一章[5].
[3] Якубович, В. А., Об устойчивости в целом невозмущенного движения для уравнений непрямого автоматического регулирования, *Вестник ЛГУ*, 19:4, 1957.
[4] 见参考文献第一篇第一章[14].
[5] 见参考文献第二篇[7].
[6] 见参考文献第二篇[16].
[7] Пионтковский, А. А., Рутковская, Л. Д., Исследование некоторых задач теории устойчивости с помощью метода векторной функции Ляпунова, *Автоматика* и Телемеханика, №, 10 (1967).
[8] 见参考文献第二篇[17].
[9] 赵素霞，直接调节系统的绝对稳定性，数学学报，22:4(1979)，404—419.
[10] Лурье, А. И., Некторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951.
[11] Летов, А. М., Устойчвность нелинейных регулируемых систем, Гостехиздат, 1959. 中译本，А. М.列托夫，非线性调节系统的稳定性，科学出版社，1959.
[12] Малкин, И. Г., К теории устойчивости регулируемих систем, *П. М. М*, т XV, вып. 1, 1951.
[13] Айзерман, М. А., Гантмахер, Ф. Р., Абсолютная устойчивость регулируемых систем, Изд. АН СССР, 1963.

第四篇 第十五章

[1] Белюстина, Л. И., Белых, В. Н., Качественное исследование динамической системы на цилиндре, *Дифференциальные Уравнения*, том. IX, №. 3, 1973.

[2] 蒋君章,锁相技术基础讲座,无线电通讯,1,1973.
[3] 见参考文献第三篇[27].
[4] 见参考文献第三篇[33].
[5] T. A. Burton, The generalized Lenard equations, *Appl. Math. Soc. A. Control*, **3**, 1965.
[6] 见参考文献第三篇[32].
[7] 王联、王慕秋,柱面上一类微分方程的研究(II),数学学报,4,1980.
[8] 王慕秋、王联,柱面上一类微分方程的研究(I),数学学报,3,1980.
[9] 王慕秋, RC 积分滤波器延时锁相环的定性分析,应用数学学报,3(1979),236—240.
[10] 王慕秋、王联,柱面上一类微分方程的定性研究,中国科学,数学专辑(II),1979.
[11] 王联、王慕秋,锁相技术中的常微分方程,计算机与应用数学,2,1979.
[12] 王慕秋、张锦炎、王联,调频输入正切锁相环路方程及其推广,中国科学,2,1980.
[13] 王联、王慕秋,柱面上一类带强迫项的二阶非线性方程的定性研究,数学学报 5,(1980).

第四篇 第十六章

[1] 林家翘,星系的螺旋结构理论,胡文瑞、韩念国译,科学出版社,1977.
[2] Toomre, A., Group velocity of spiral waves in galactic disk, *Astrophys. J.*, 158 (1969), 899.
[3] Lindblad, P. O., Gravitational response effects in the central layer of a galaxy, in interstellar matler in galaxies, Woltzer L., 1962, p. 222.
[4] Miller, R. H., Prendergast, K. H., Quirk, N. J., Numerical experments on spiral structure, *Astrophys. J.*, 161 (1970), p. 903.
[5] Fujimoto M., In non-stable phenomena in galaxies, *IAU Symp.*, No. 29 (1968), p. 453.
[6] Roberts, W. W., Large-scale shock formation in spiral galaxies and its implications on star formation, *Astrophys. J.*, 158 (1969), p. 123.
[7] Vandervoort, P. O., Nonlinear density waves in galaxies, *Astrophys. J.*, 166 (1971), 37.
[8] 徐遐生, Milione, V., Roberts, W. W., Nonlinear gaseous density waves and galactic shocks, *Astrophys. J.*, 183 (1973), p.819.
[9] 胡文瑞,关于星系激波,第二次全国流体会议文集,科学出版社.
[10] 胡文瑞,密度波理论中星系激波的性质,科学通报,2(1977),79.
[11] 秦元勋,运动稳定性的一般问题讲义,科学出版社,1958.
[12] 秦元勋,微分方程所定义的积分曲线,科学出版社,1959,41—42.
[13] Малкин, И. Г., Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952.
[14] 胡文瑞,共转圈的奇异性对波状星系密度波的影响,中国科学,2(1977),109—115.
[15] 秦元勋、王联、王慕秋、胡文瑞,星系密度波在共转区的非线性不稳定性,北京天文台台刊,11,1977.

[16] 林家翘、徐遐生，Density wave in disk galaxies，摘自 Radio Astronomy and Galactic System (Van Woerden, H. 编), *IAU. Symp.*, No. 31 (1967), p. 313.
[17] 秦元勋、王联、王慕秋、胡文瑞，星系激波和非线性密度波的稳定性分析，1977年全国天体物理会议论文集，科学出版社，1978.
[18] 胡文瑞、敖超，星际气体自引力星系激波解，中国科学，1(1980).
[19] Woodward, P. R., On the nonlinear time development of gas flow in spiral density waves, *Astrophys. J.*, 195 (1975), p. 61.
[20] 秦元勋、王慕秋、王联、胡文瑞，基态为超声速时星系非线性密度波的准稳性，北京天文台台刊，12，1978.